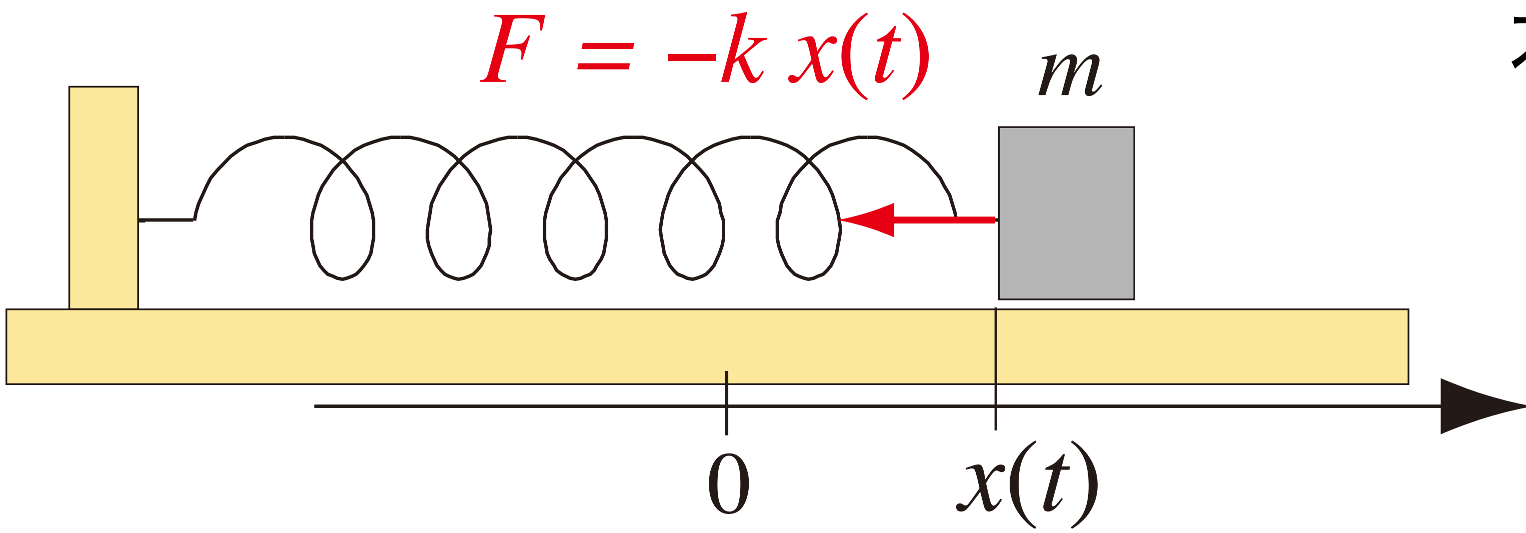
# 単振動

# 1.10 振動　　1.10.1 単振動　　P33-36

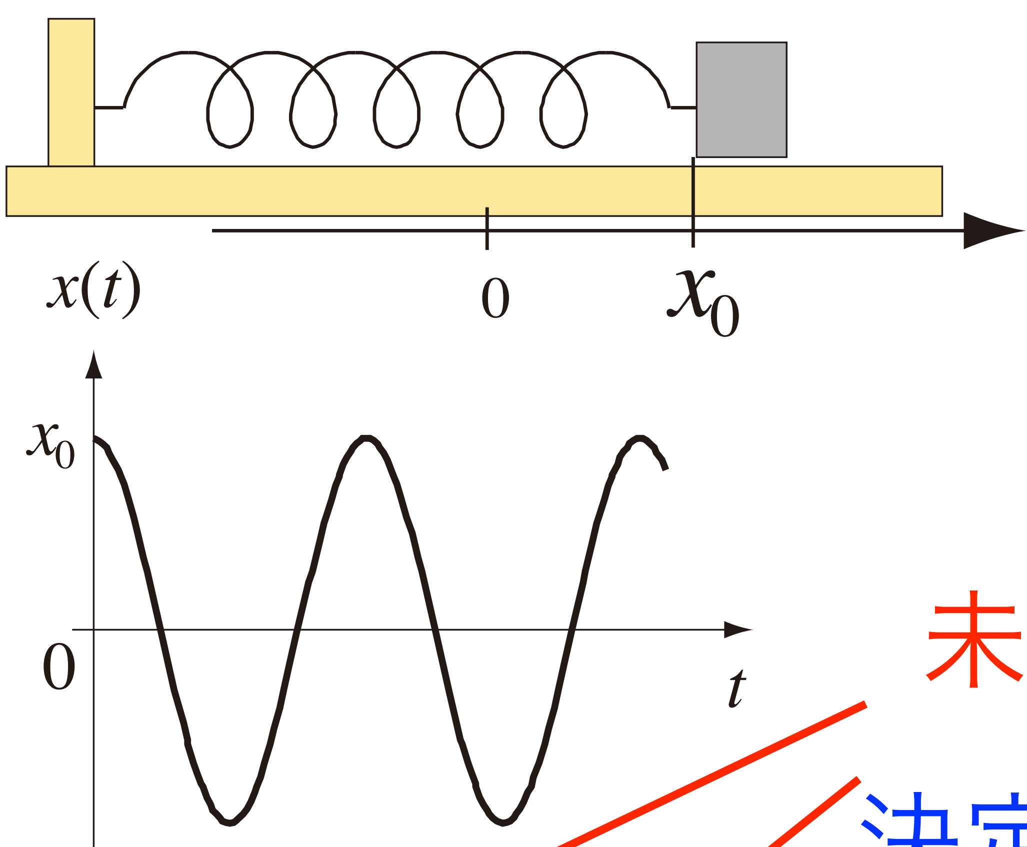


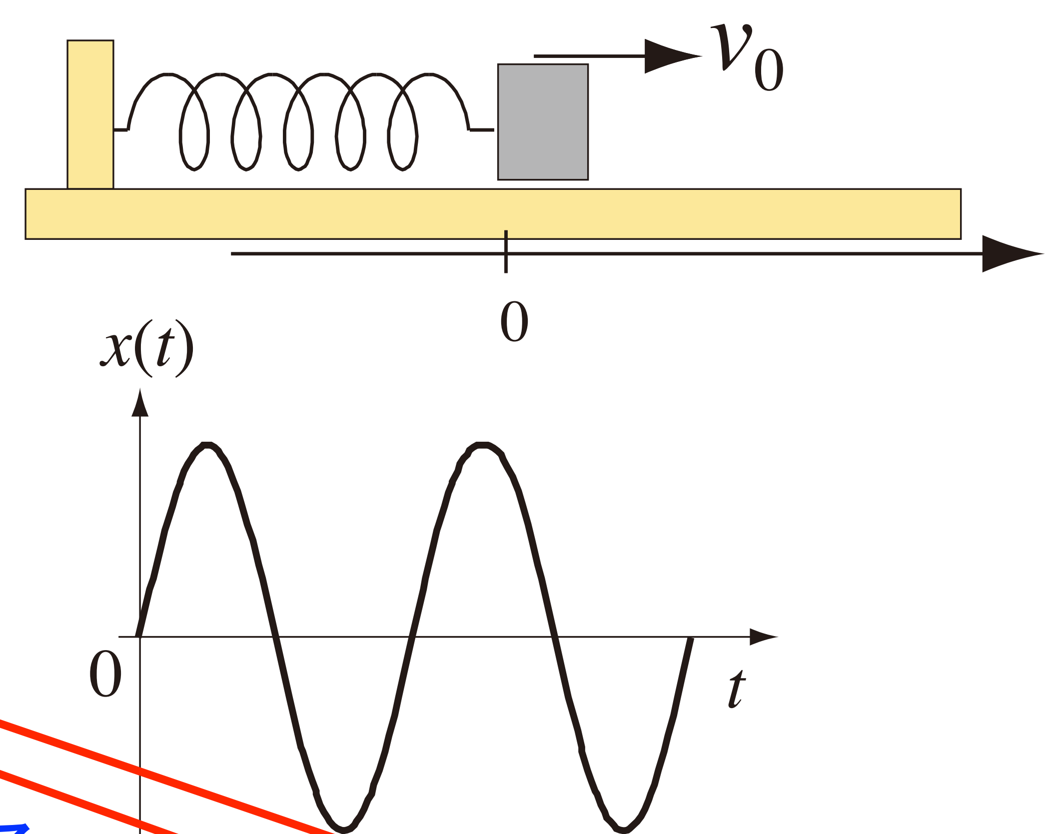

運動方程式

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t)$$

$x(t)$ がどうなるか

## 初期条件 ($t$=0)



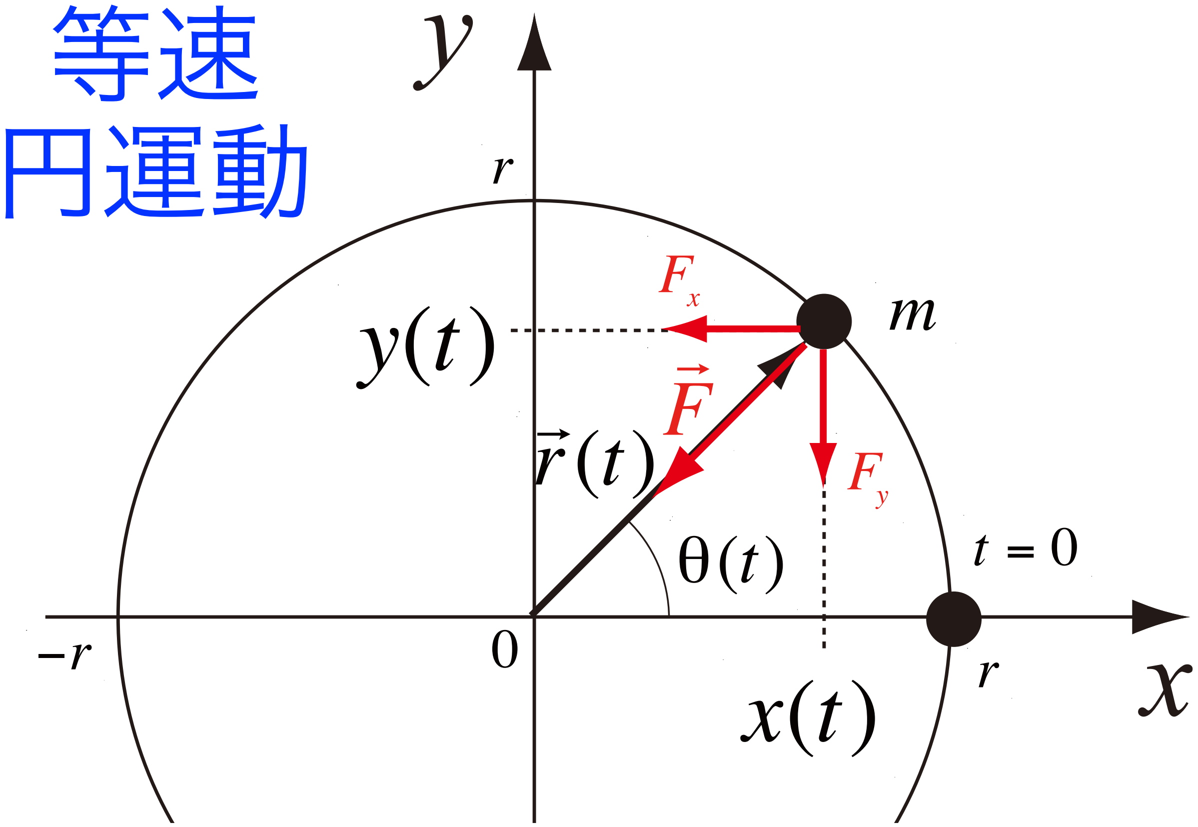




未定

決定する

$x(t) = A\cos(\omega\, t)$　　　$x(t) = B\sin(\omega\, t)$

# 等速円運動



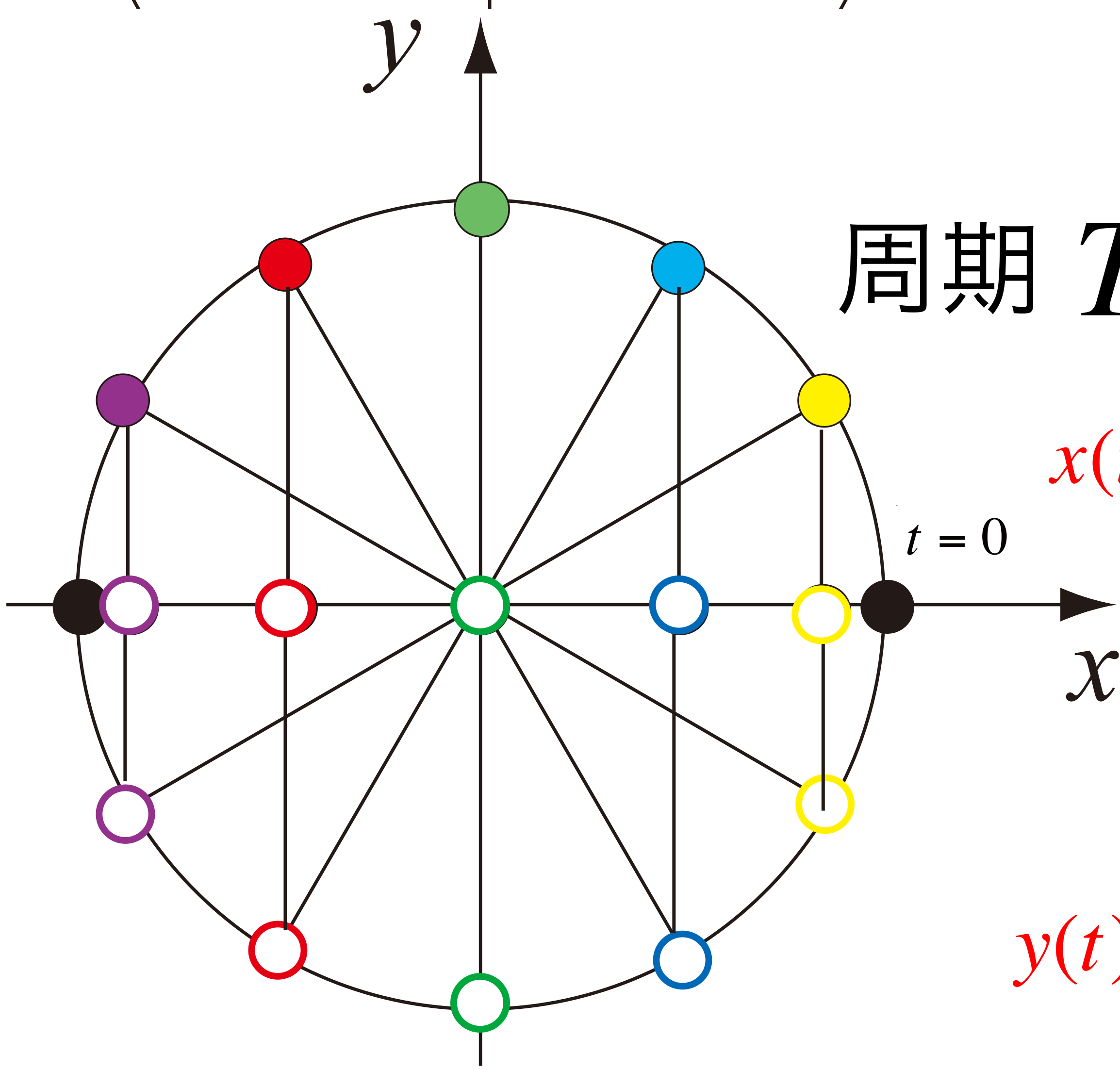

運動方程式 $m\dfrac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}=\vec{F}$

成分で書くと

$$\left(m\frac{d^2x(t)}{dt^2}, m\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right)=\left(F_x, F_y\right)$$

$$=\left(-F\cos\theta(t), -F\sin\theta(t)\right)$$

$$=\left(-F\frac{x(t)}{r}, -F\frac{y(t)}{r}\right)$$




周期 $T$

$$x(t)=r\times\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

解

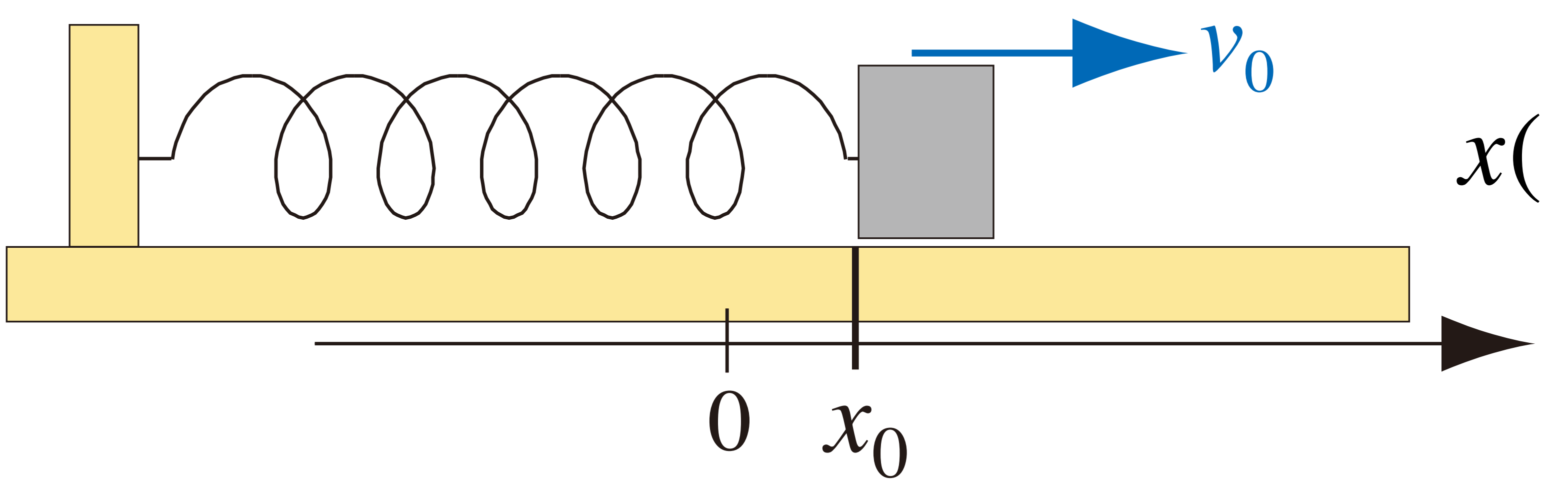
定数

単振動 $\begin{cases} m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}=-\boxed{\dfrac{F}{r}}x(t) \\ m\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}=-\boxed{\dfrac{F}{r}}y(t) \end{cases}$

$$y(t)=r\times\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

解

# 一般の初期条件 ($t$=0)




$x(t)$ の予想

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

運動方程式に代入

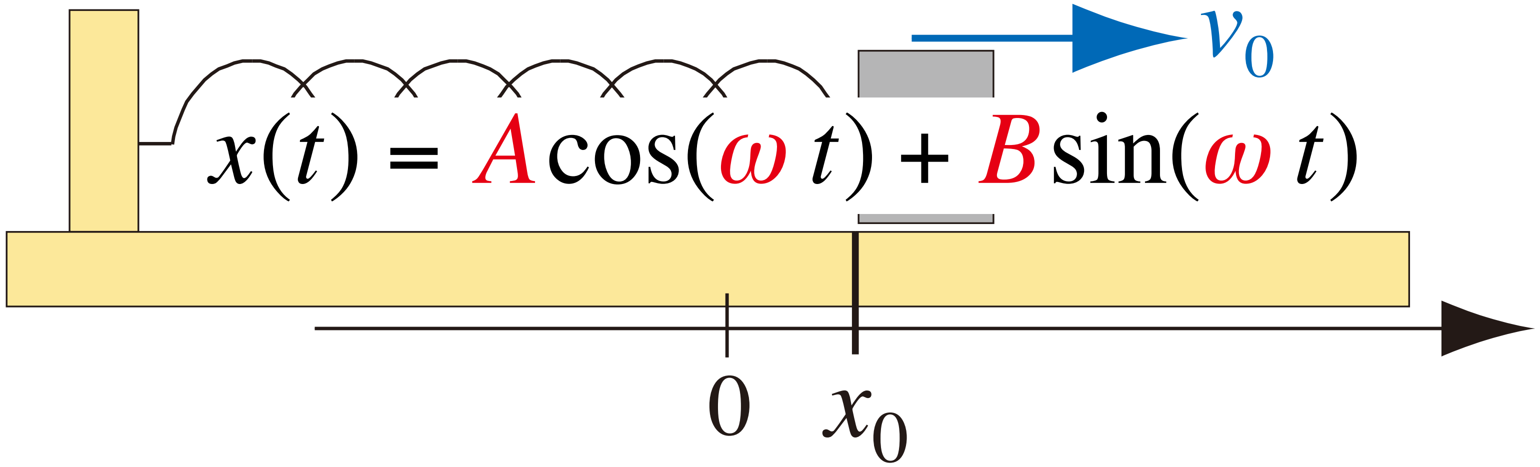
$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = m\left[-A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t)\right]$$

$$\parallel$$

$$-kx(t) = -k\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right]$$

両辺が等しくなるには
$t$ についての恒等式

$$m\omega^2 = k \longrightarrow \omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}$$




## 初期条件

$$x(0) = x_0$$

$$v(0) = v_0$$

$$x(0) = A\cos(\omega \times 0) + B\sin(\omega \times 0) = A = x_0$$

$$v(0) = -A\omega\sin(\omega \times 0) + B\omega\cos(\omega \times 0) = B\omega = v_0$$

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}$$

解

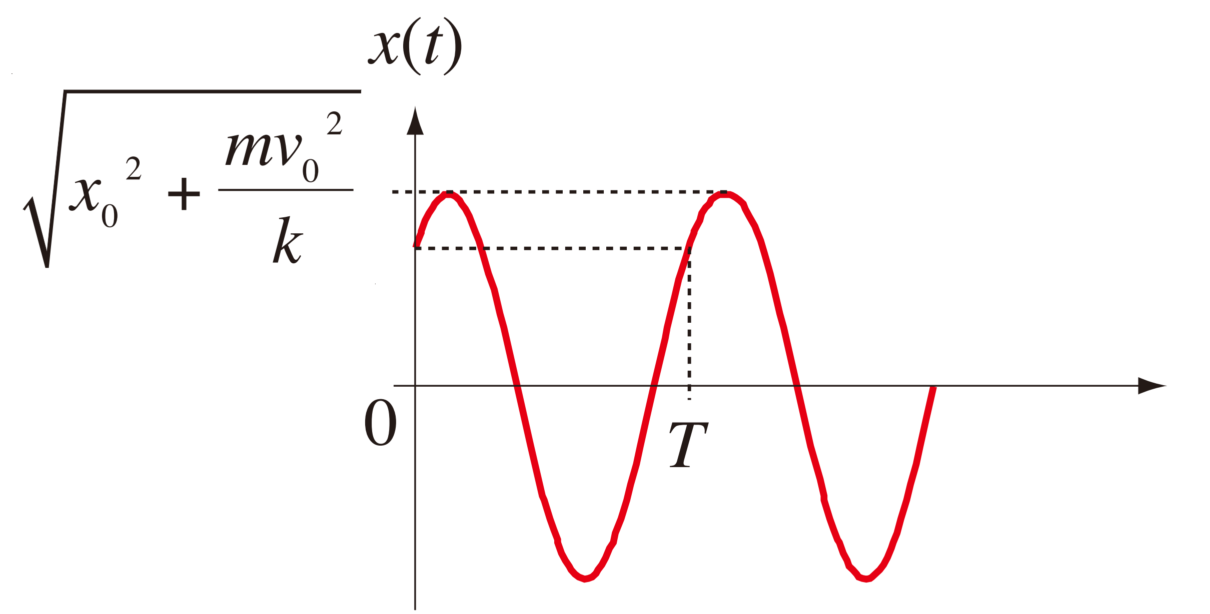
$$\boxed{x(t) = x_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)}$$

## 三角関数の公式

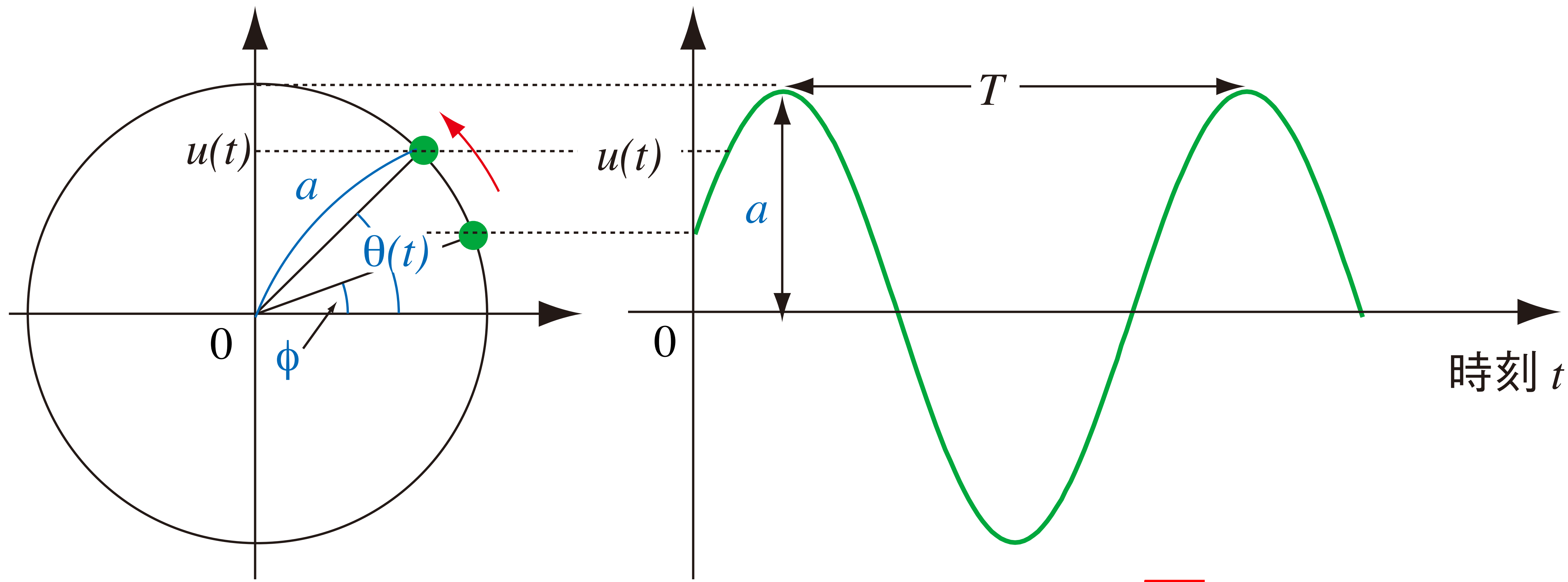
$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\phi)$$

$$\tan\phi = \frac{b}{a}$$

$$x(t) = \sqrt{x_0{}^2 + \frac{mv_0{}^2}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right)$$



$$\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\phi\right)=\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t+\overset{\text{周期}}{T})+\phi\right)=\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\left(t+2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right)+\phi\right)=\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+2\pi+\phi\right)$$




● 周期（１回振動する時間）：$T$ [s]　　$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

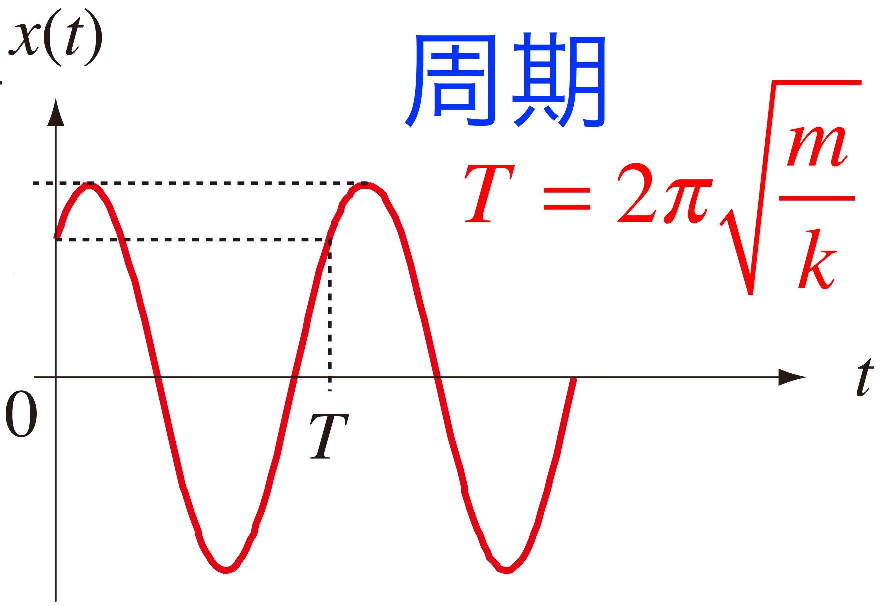
● 振動数（１秒間に何回振動するか）：$f$ (frequency) $=\frac{1}{T}$　[1/s] = [Hz] (ヘルツ)

● 角振動数 / 角速度（１秒間に増加する角度）：$\omega=2\pi f$ (オメガ)

● 振幅（振動の幅）：$a$ [m]

物理学入門
P19

$$\sqrt{x_0^{\,2}+\frac{mv_0^{\,2}}{k}}$$




周期

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

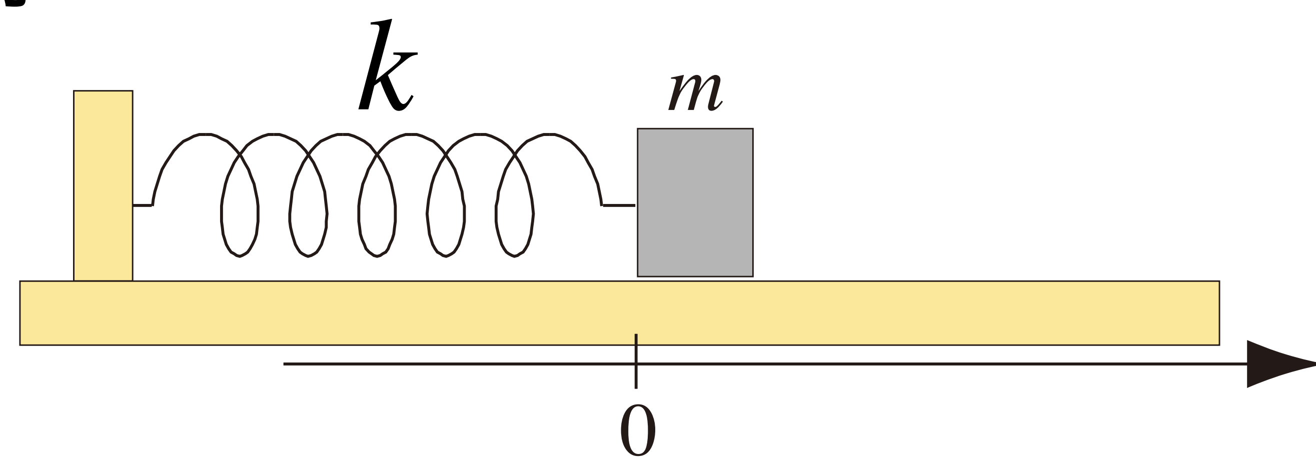
## 単位　ばね定数 $k$

$$F=-k\times x$$

$$[k]=\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]=\left[\frac{\mathrm{kg}\times \mathrm{m/s^2}}{\mathrm{m}}\right]=\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s^2}}\right]$$

$$\left[\sqrt{\frac{m}{k}}\right]=\left[\sqrt{\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kg/s^2}}}\right]=[\mathrm{s}]$$

## 周期



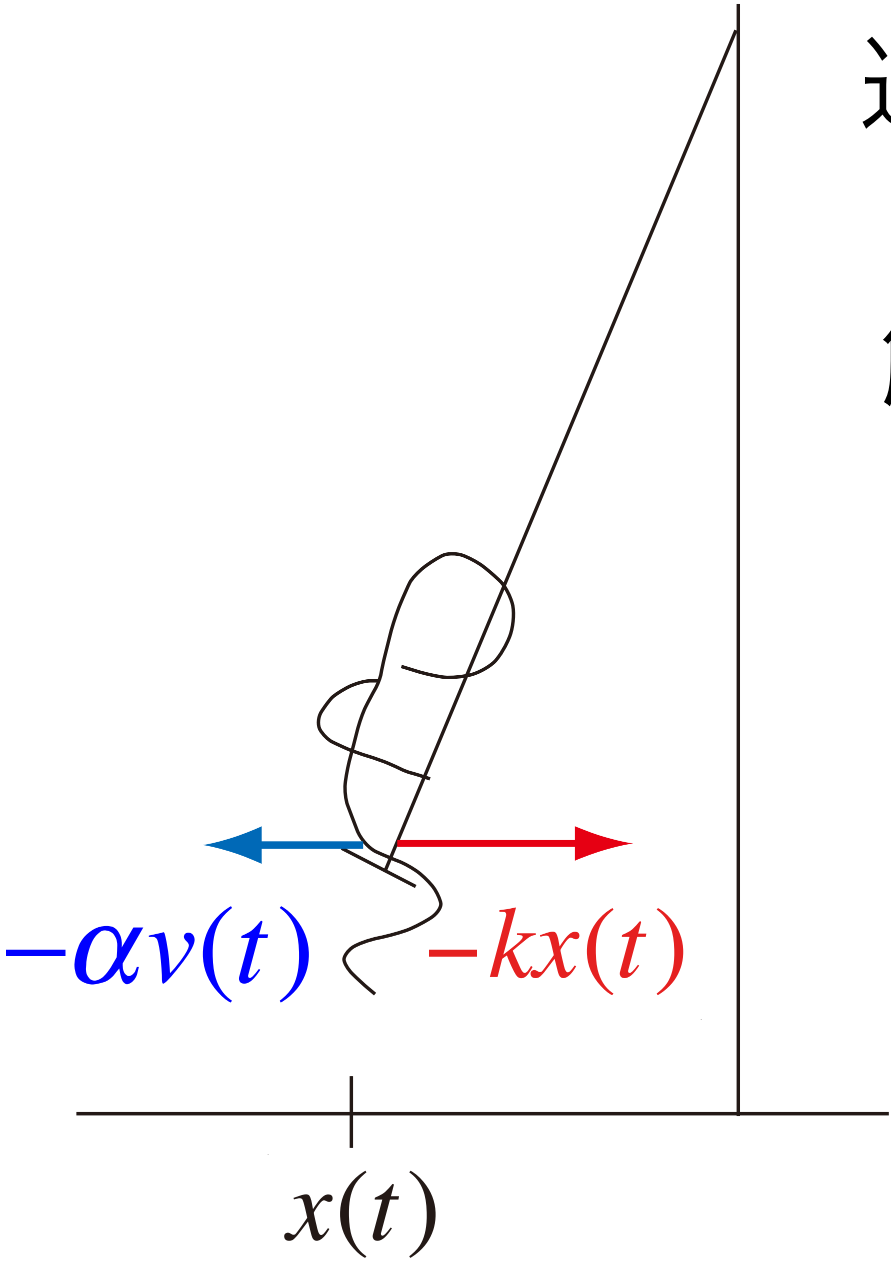

$k$→大　堅いバネ　速く動く　周期→小

$m$→大　ゆっくり動く　周期→大

# 共鳴

## 1.10.2　減衰振動





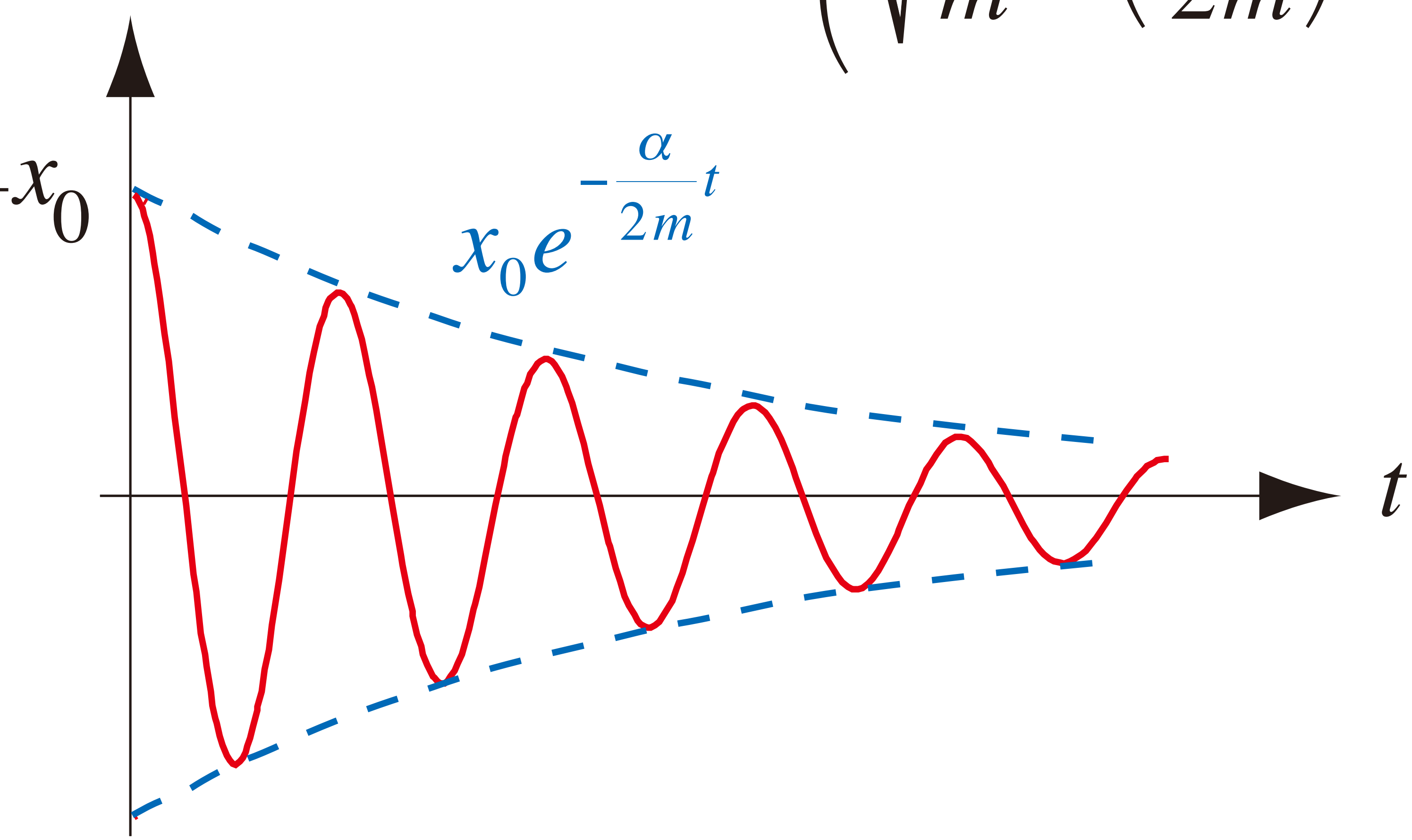

運動方程式　$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) - \alpha v(t)$$

解の予想　$$x(t) = A(t)\cos(\omega t)$$

振幅が時間によって変わる

↓

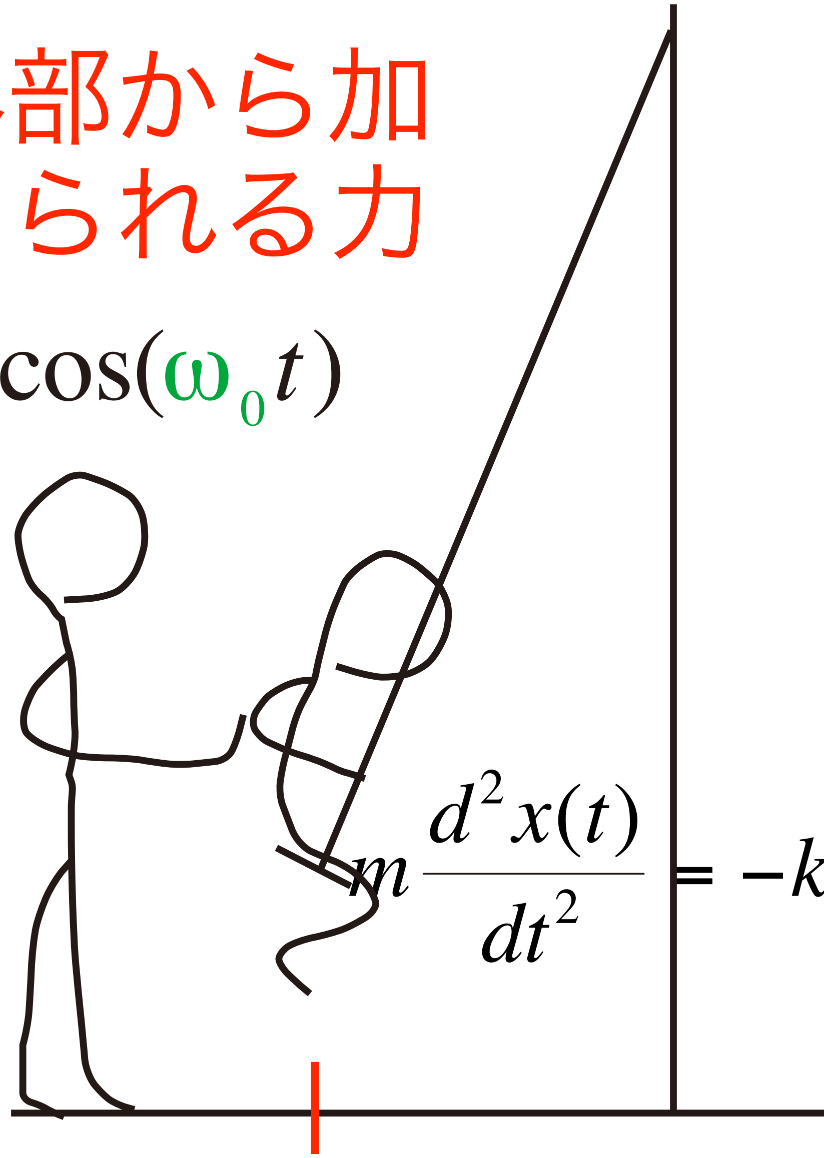
$$x(t) = x_0 e^{-\frac{\alpha}{2m}t}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2}\,t\right)$$



# 1.1 0.3　強制振動

外部から加えられる力

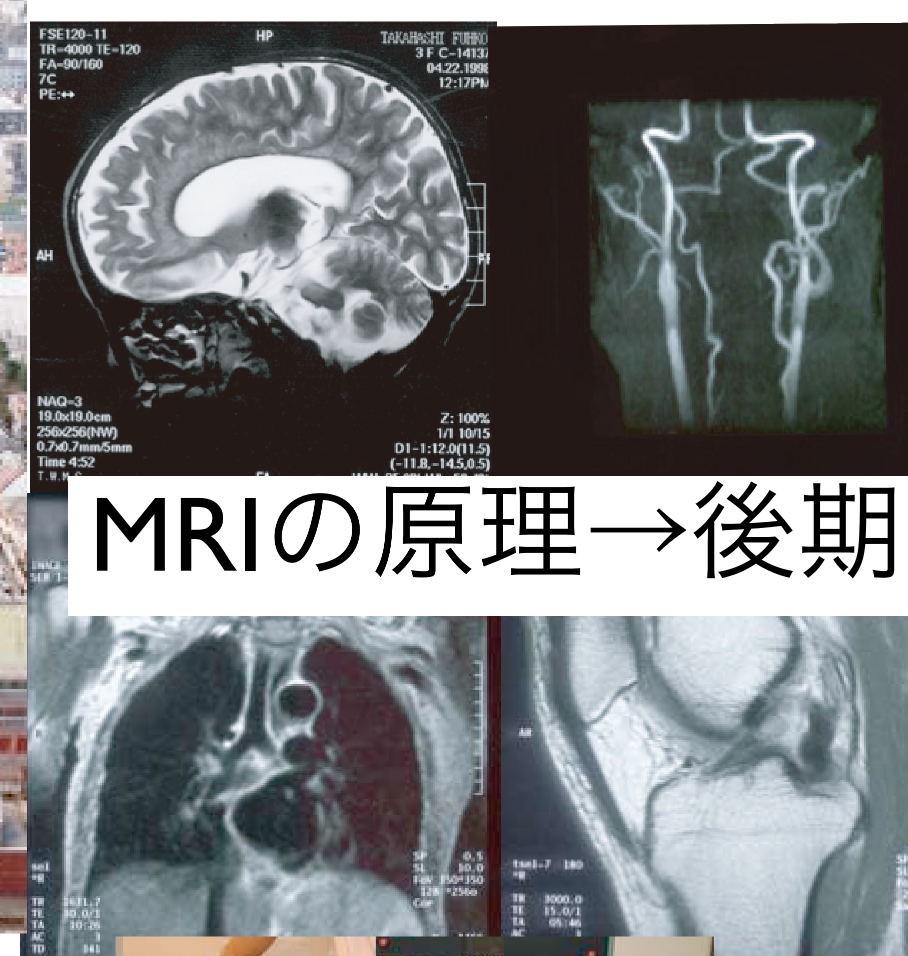
$F\cos(\omega_0 t)$



$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) - \boxed{\alpha\frac{dx(t)}{dt}}$$

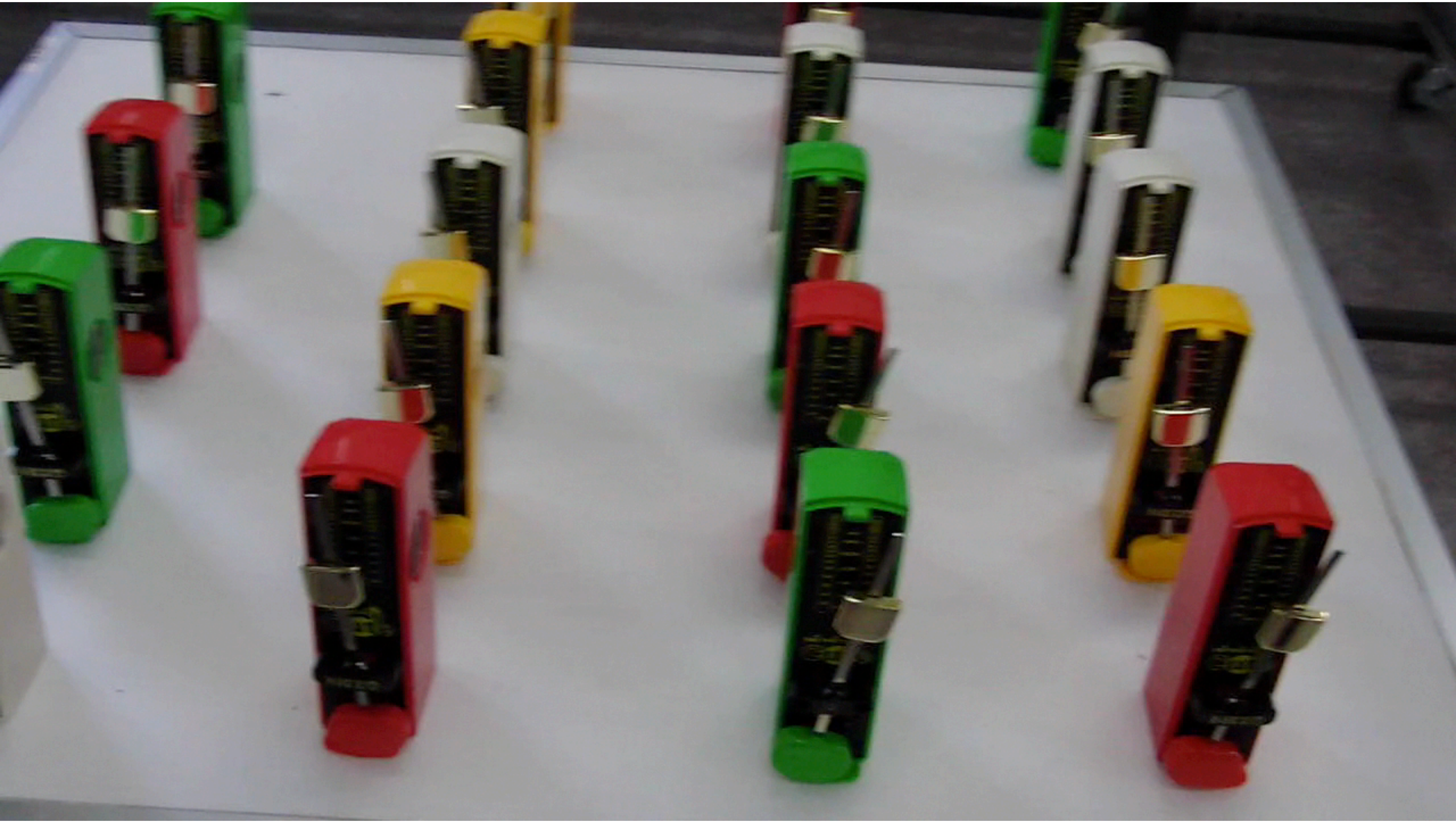
抵抗力

$x(t)$

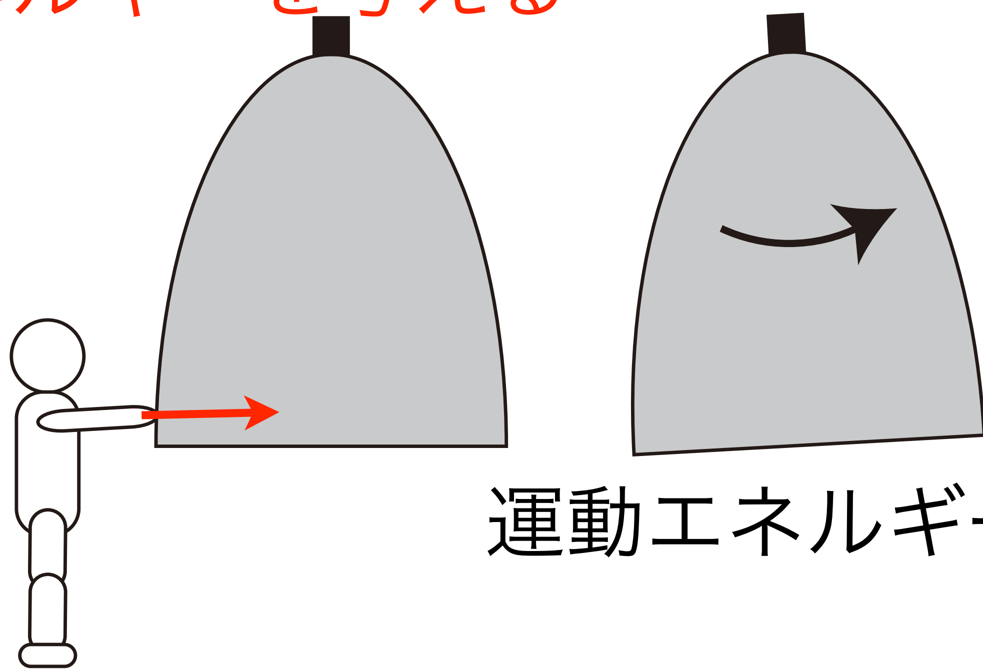




運動方程式

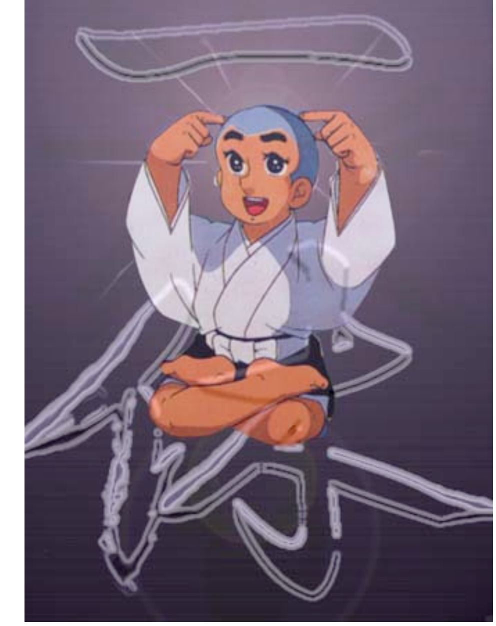
$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) - \alpha\frac{dx(t)}{dt} + F\cos\left(\omega_0 t\right)$$



エネルギーを与える

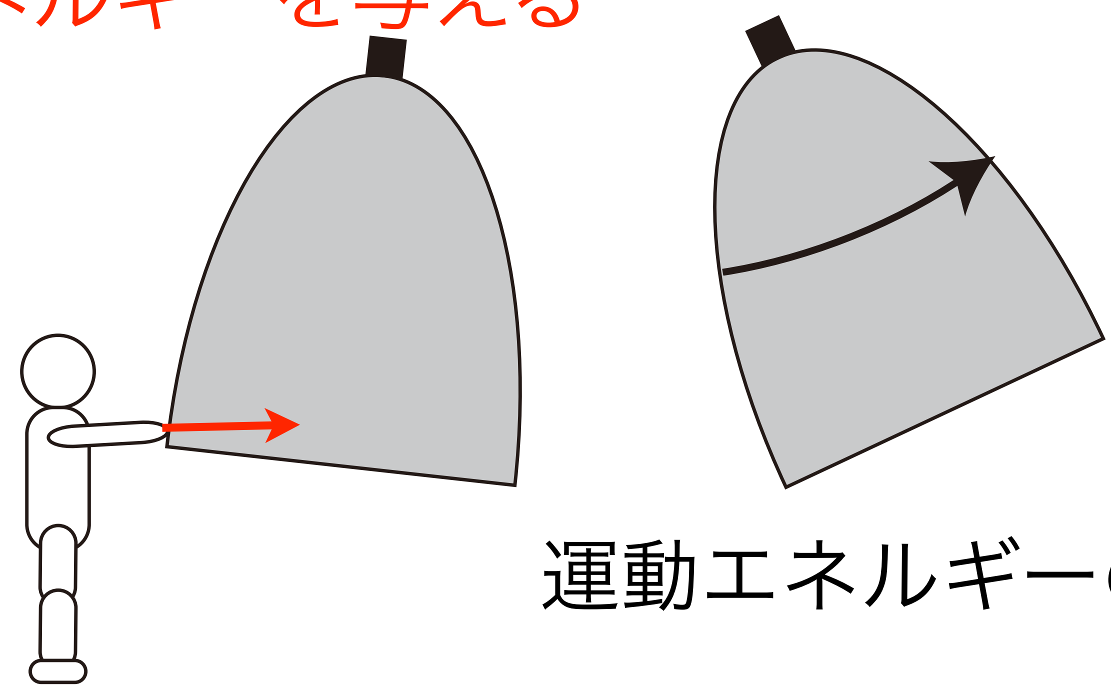


運動エネルギーの増加

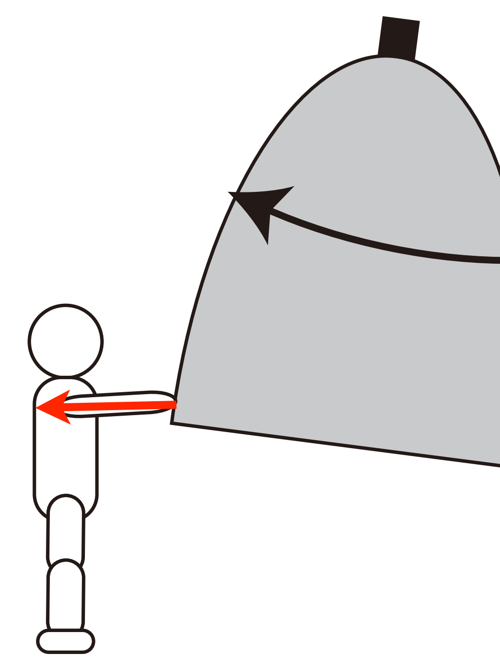


変なタイミングだと

エネルギーを与える



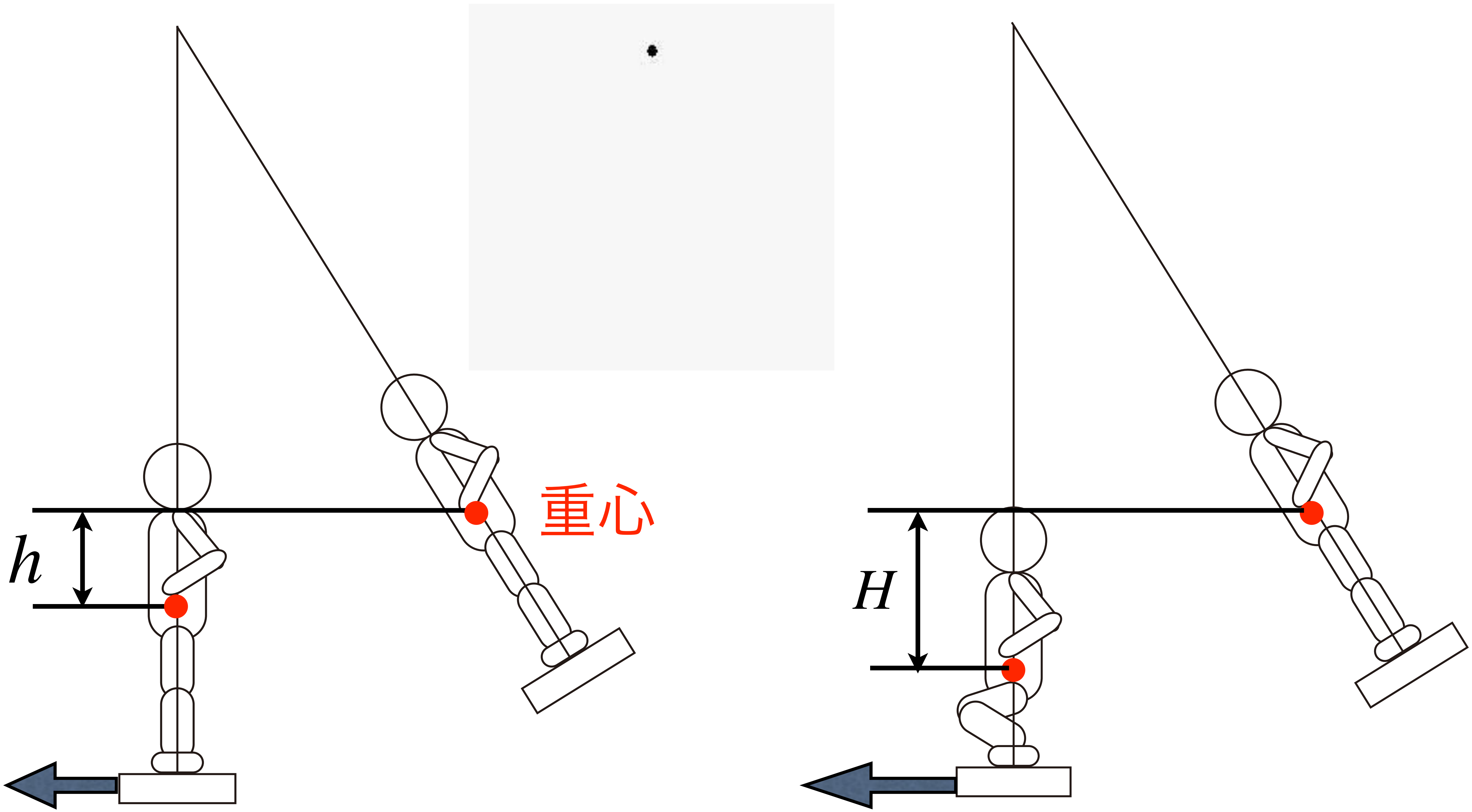
運動エネルギーの増加



エネルギーを奪う

共鳴は連続的なエネルギーの注入

# ひとりでブランコをこぐのって？




位置エネルギーの差　$mgh$

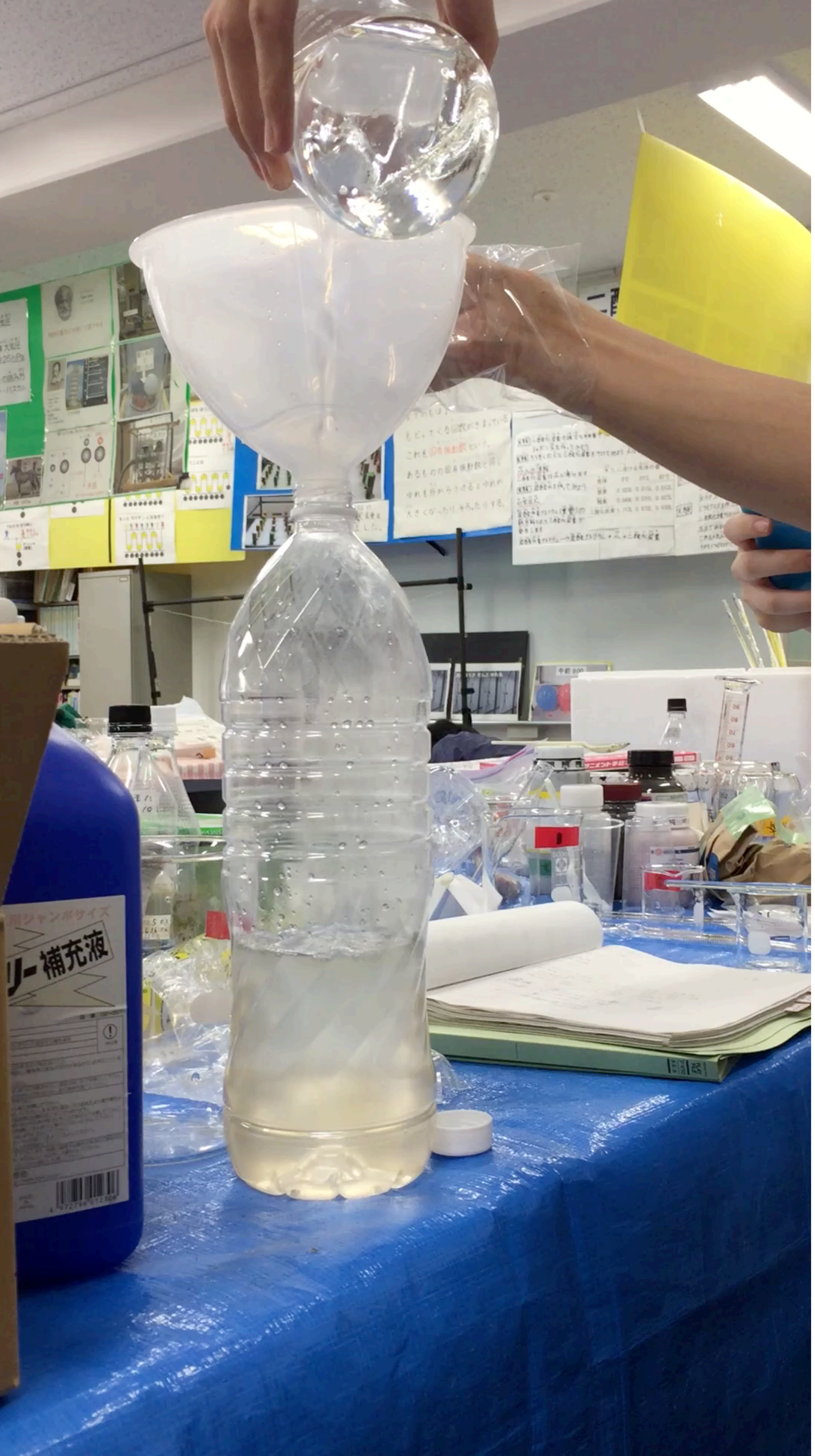
↓

ブランコの運動エネルギー

位置エネルギーの差　大

ブランコの揺れに
合わせて上下する

共鳴

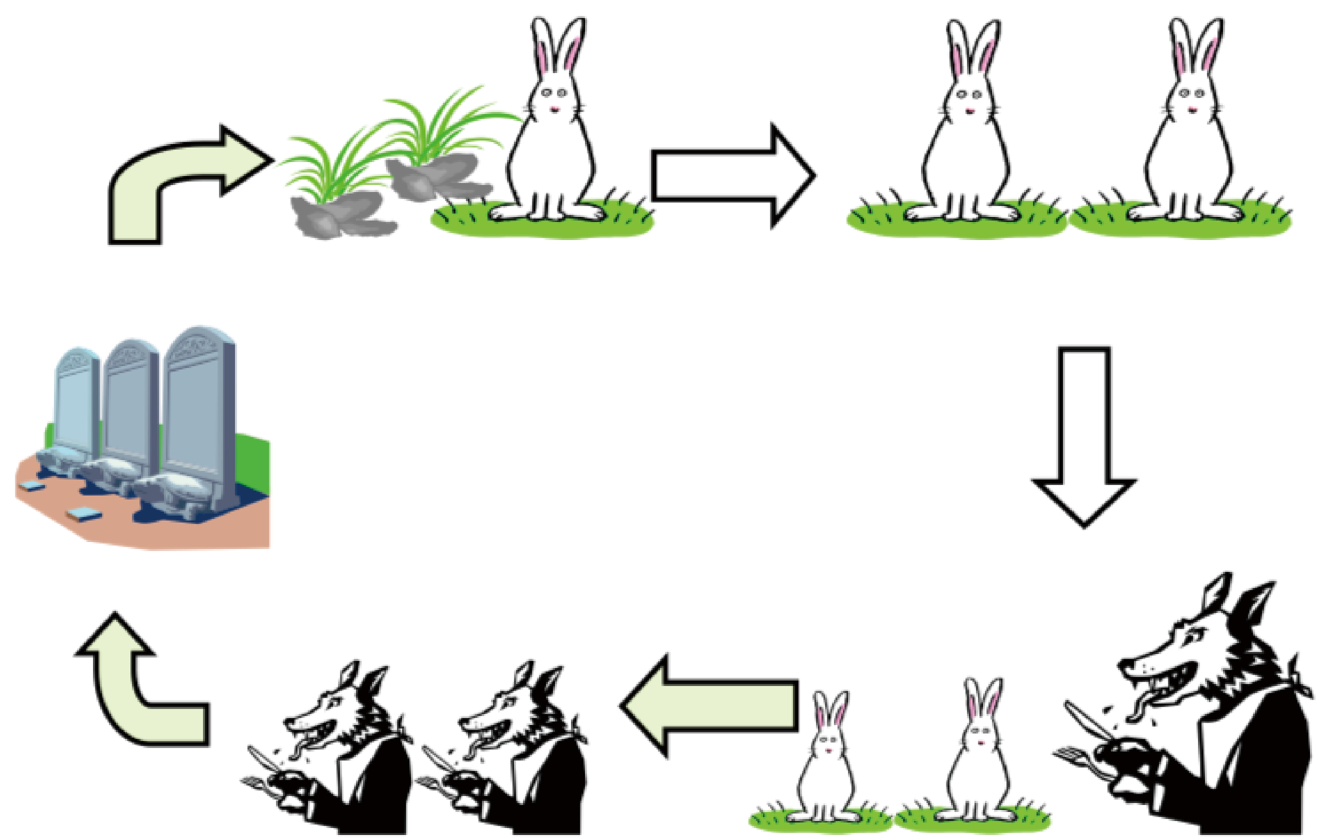


# ブリッグス・ラウシャー反応

$$IO_3^- + 2H_2O_2 + CH_2(COOH)_2 + H^+ \rightarrow ICH(COOH)_2 + 2O_2 + 3H_2O$$

マロン酸（**$CH_2(COOH)_2$**）をオオカミ、ヨウ素（**$I_2$**）をウサギ、過酸化水素（**$H_2O_2$**）を草とすると、以下のように表す事ができる。

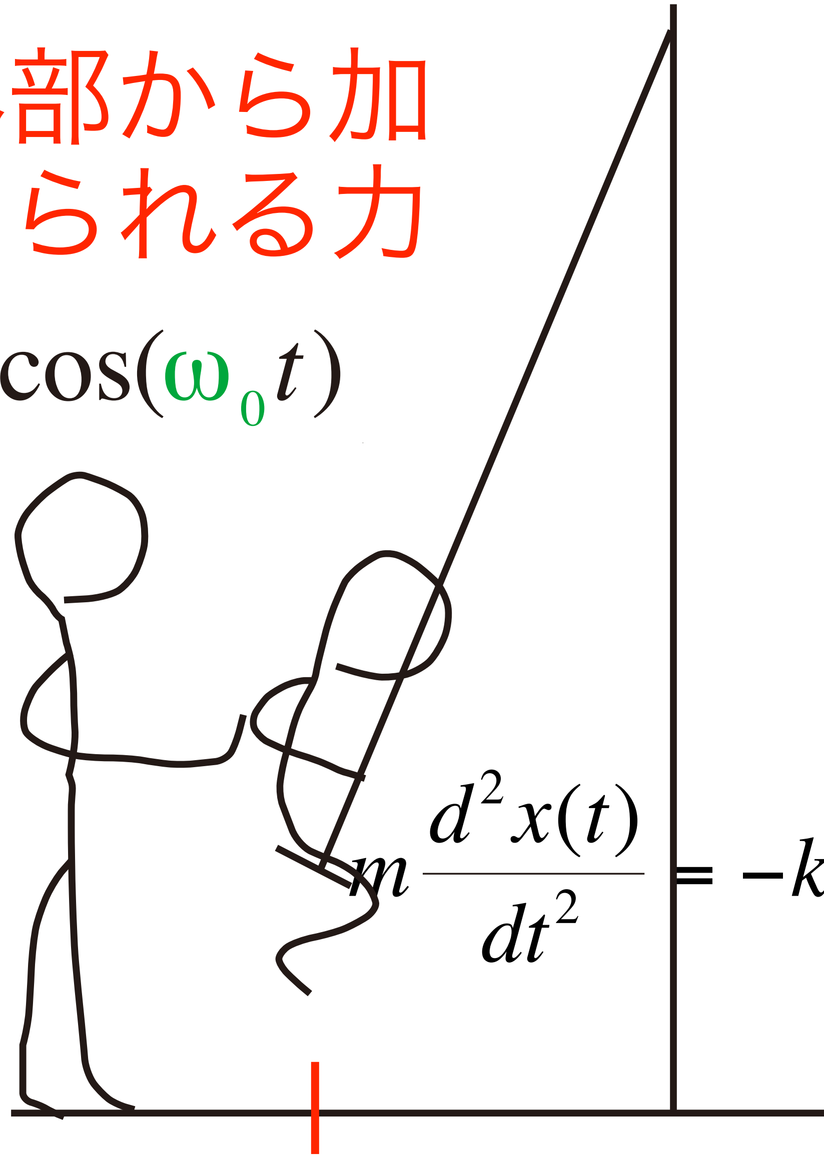
① 草がたくさん存在する　→ウサギが増える
② オオカミがウサギを食べる　→ウサギが減る事によって草が増える
③ 増えたウサギをオオカミが食べる→草が増える
④ 草が増える　→ウサギが増え、オオカミがウサギを食べる
⑤ ウサギが減り、草が増える　→草を食べてウサギが増える



# 1.10.3　強制振動

外部から加えられる力

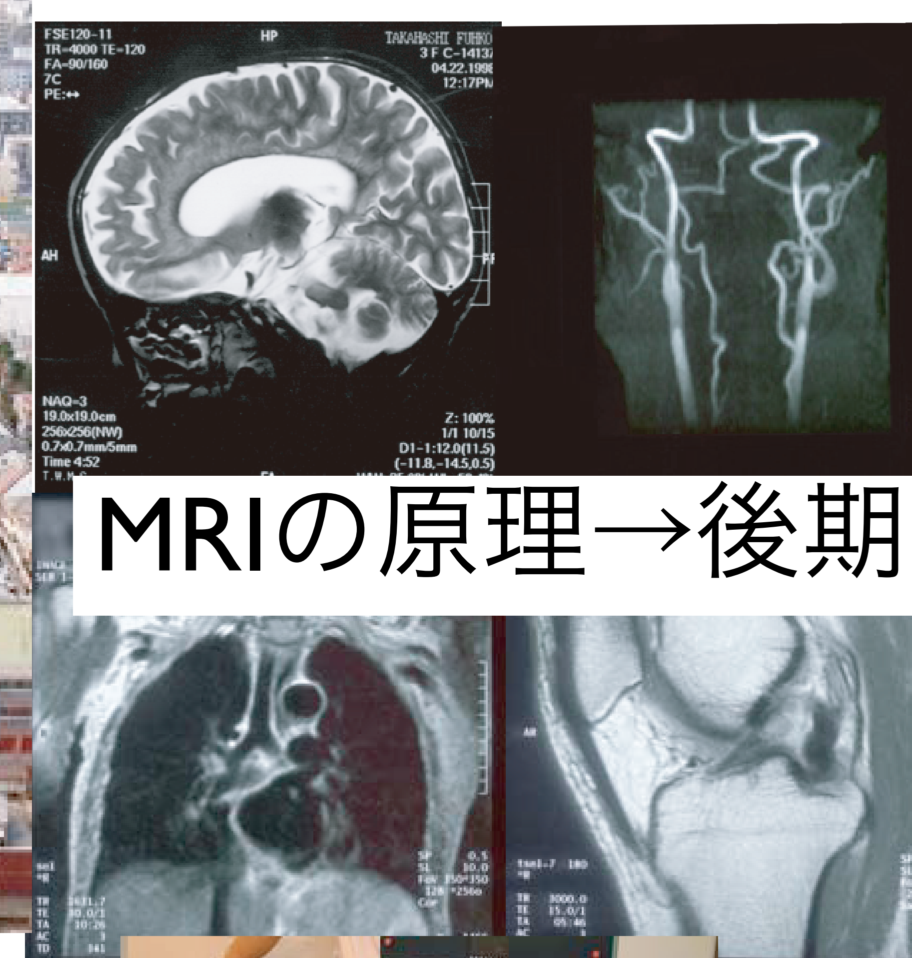
$F\cos(\omega_0 t)$



$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) \boxed{-\alpha\frac{dx(t)}{dt}}$$

抵抗力

$x(t)$


運動方程式　$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) - \alpha\frac{dx(t)}{dt} + F\cos\left(\omega_0 t\right)$$

# 運動方程式に代入

$$x(t) = A\cos\left(\omega_0 t\right) + B\sin\left(\omega_0 t\right)$$

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} \longrightarrow -m\omega_0{}^2 A\cos(\omega_0 t) - m\omega_0{}^2 B\sin(\omega_0 t)$$

$$+\alpha\frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow -\alpha\omega_0 A\sin(\omega_0 t) + \alpha\omega_0 B\cos(\omega_0 t)$$

$$+kx(t) \longrightarrow kA\cos(\omega_0 t) + kB\sin(\omega_0 t)$$

$$-F\cos(\omega_0 t) \longrightarrow -F\cos(\omega_0 t)$$

$$= 0 \qquad = 0$$

$t$ についての恒等式

条件

$$\left(-m\omega_0{}^2 + k\right)A + \alpha\omega_0 B - F = 0$$

$$-\alpha\omega_0 A + \left(-m\omega_0{}^2 + k\right)B = 0$$

条件 $\left(-m\omega_0{}^2+k\right)A+\alpha\omega_0 B-F=0$

$$-\alpha\omega_0 A+\left(-m\omega_0{}^2+k\right)B=0$$

$A$ と $B$ が求まる（連立方程式）

$$A=\frac{k-m\omega_0{}^2}{\left(k-m\omega_0{}^2\right)^2+\left(\alpha\omega_0\right)^2}F \qquad B=\frac{\alpha\omega_0}{\left(k-m\omega_0{}^2\right)^2+\left(\alpha\omega_0\right)^2}F$$

予想 $x(t)=A\cos\left(\omega_0 t\right)+B\sin\left(\omega_0 t\right)$

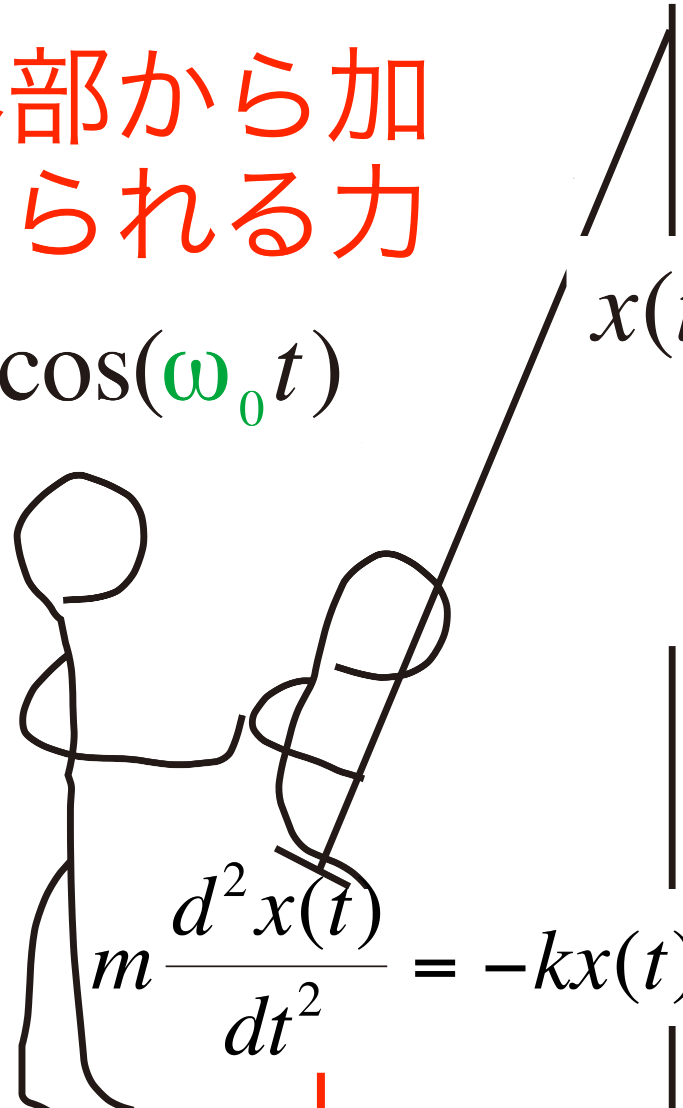
$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\phi\right)$$

$$\tan\phi=\frac{b}{a}$$

解 $x(t)=\dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{k}{m}-\omega_0{}^2\right)^2+\left(\dfrac{\alpha}{m}\omega_0\right)^2}}\dfrac{F}{m}\sin\left(\omega_0 t+\phi\right)$

外部から加えられる力

$$F\cos(\omega_0 t)$$

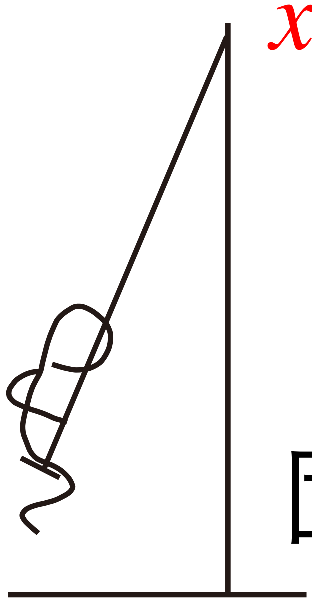


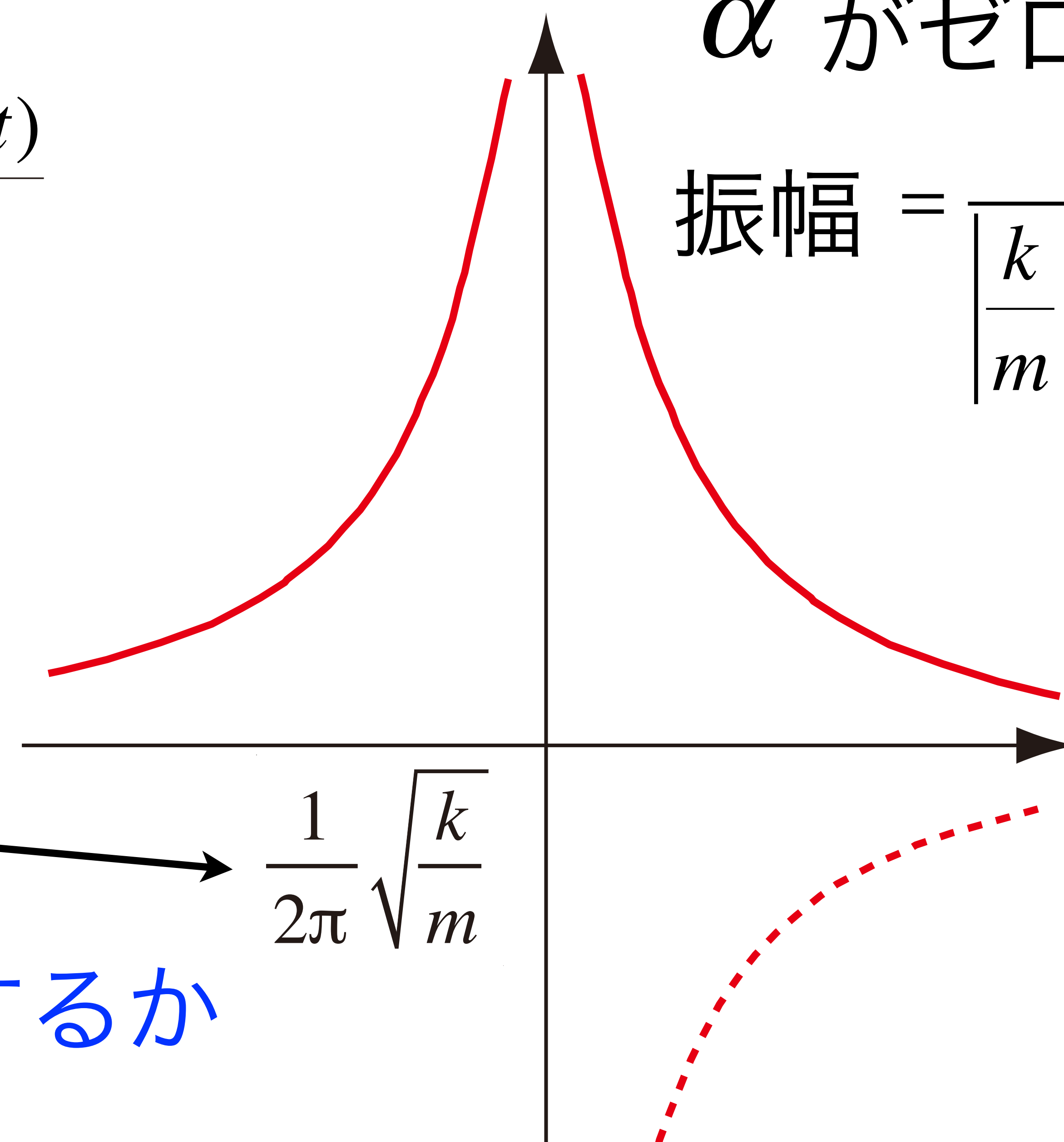
$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) - \alpha\frac{dx(t)}{dt}$$

$x(t)$

振幅

$$x(t) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega_0^{\ 2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{m}\omega_0\right)^2}}\frac{F}{m}}\sin(\omega_0 t + \phi)$$






$\alpha$ がゼロなら

$$振幅 = \frac{1}{\left|\frac{k}{m}-\omega_0^{\ 2}\right|}\frac{F}{m}$$

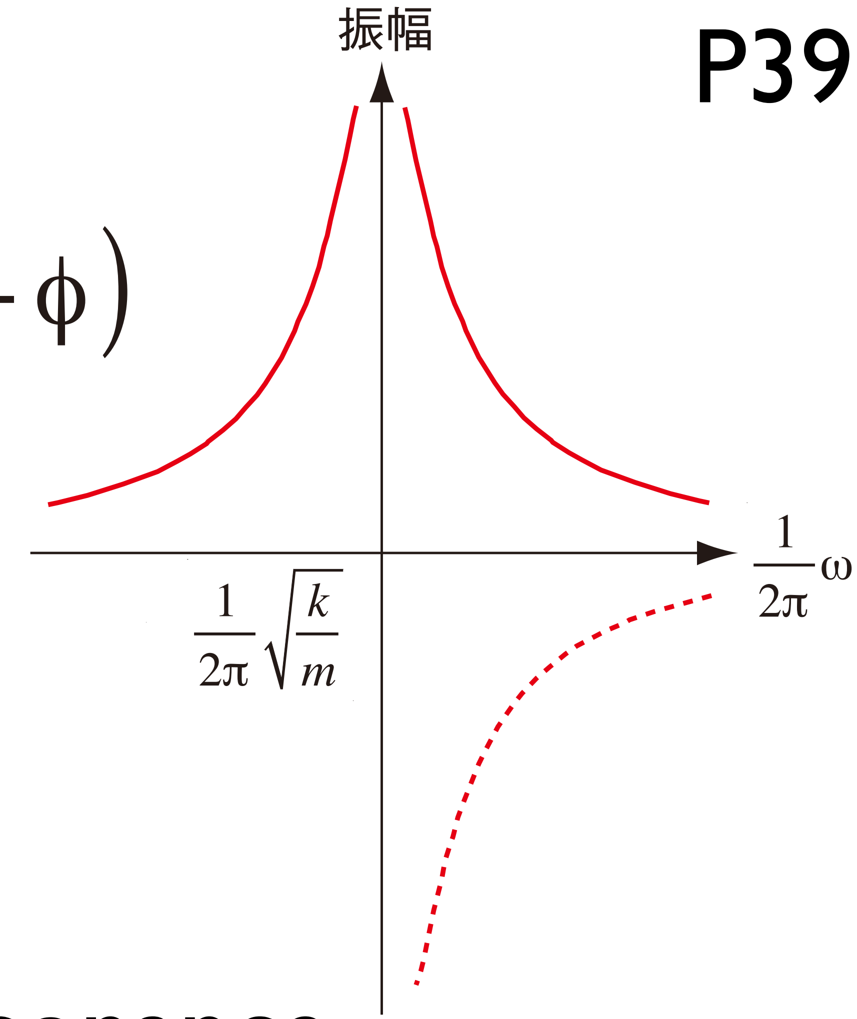
周期の逆数

固有の振動数 → $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

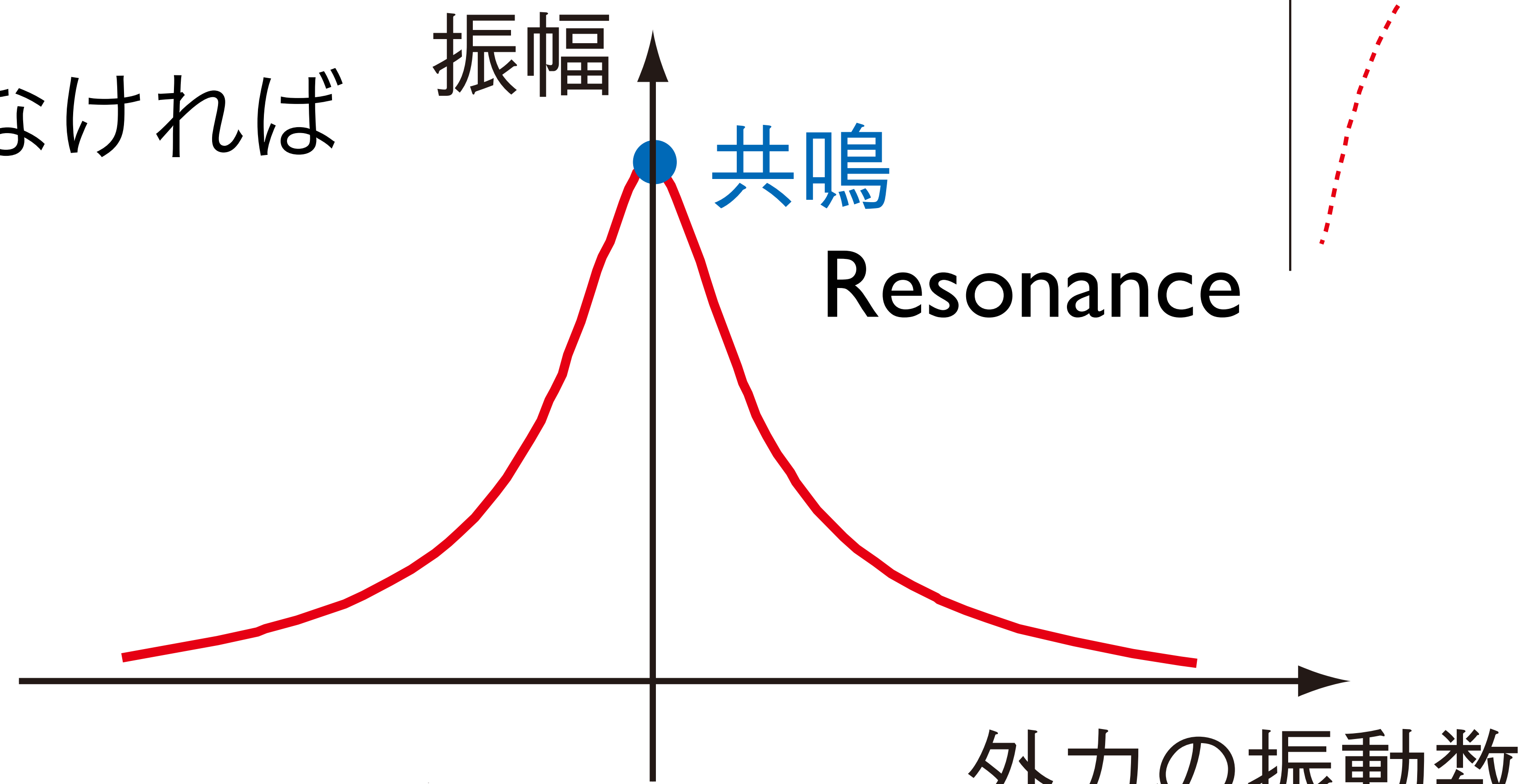
１秒間に何回振動するか

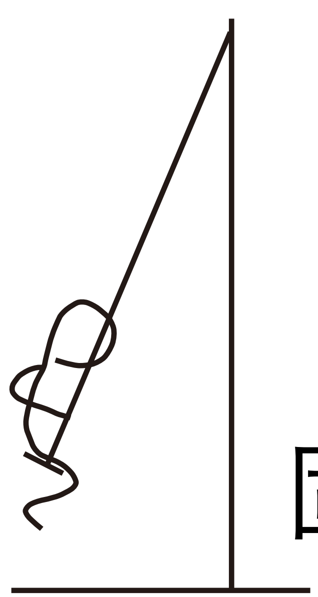
振幅

$$x(t)=\boxed{\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega_0{}^2\right)^2+\left(\frac{\alpha}{m}\omega_0\right)^2}}\frac{F}{m}}\sin\left(\omega_0 t+\phi\right)$$




$\alpha$ がゼロでなければ



固有の振動数 → $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

$\frac{\omega_0}{2\pi}$

タコマ橋 →

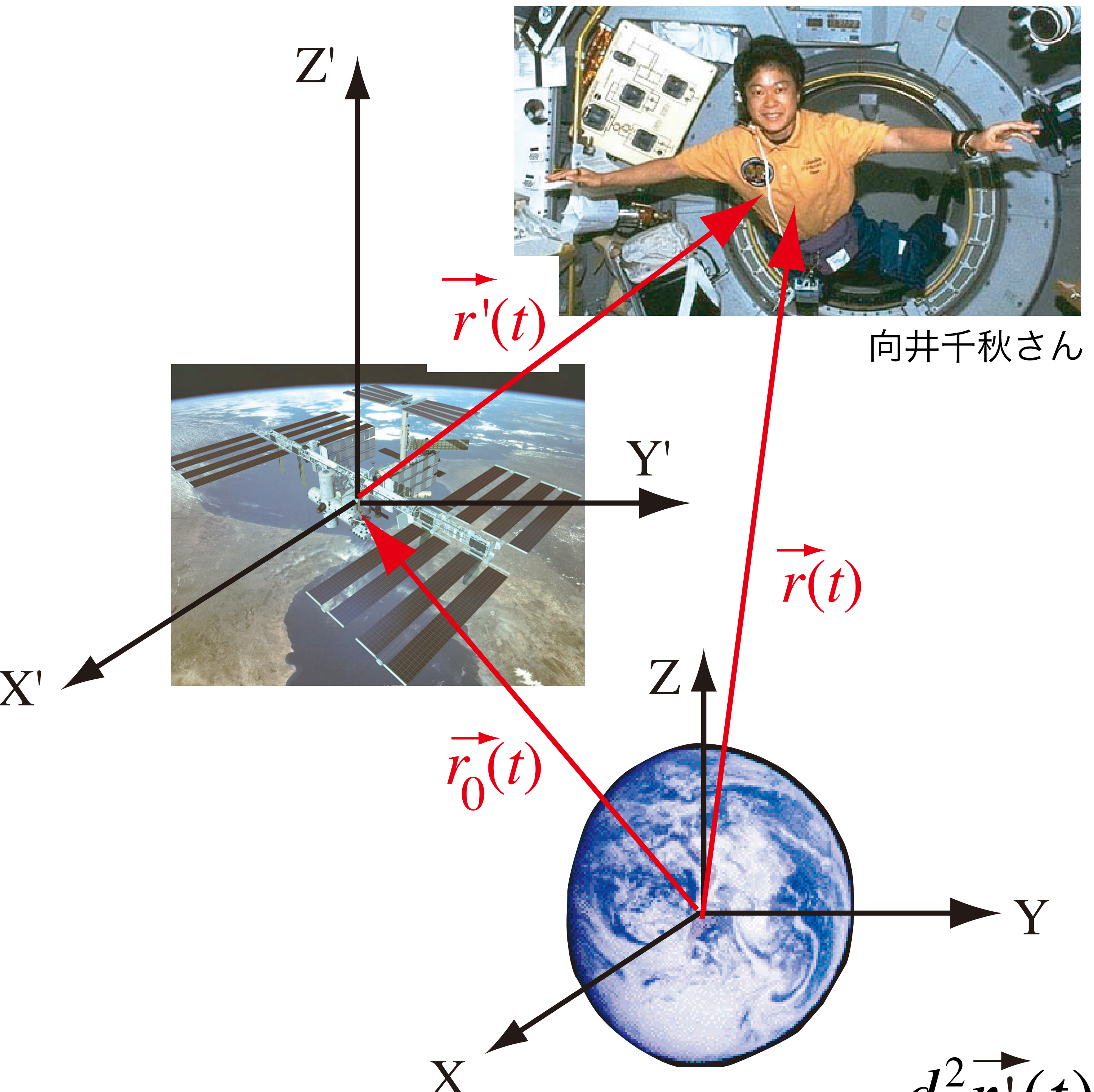
Cordova Bay
Friday Harbor
ANACORTES
SEDRO WOOLLEY
Lyman
Concrete
Leechtown
VICTORIA
Richardson
Rockport
Mount Vernon
Sooke
Metchosin
Conway
Cicero
Forston
Darrington
Bryant
Silvana
Camano
Warm Beach
Joyce
Dungeness
Agnew
Sequim
Fort Flagler
Mabana
Robe
Silverton
Gardiner
Irondale
Langley
MARYSVILLE
Blyn
Hartford
Olympic Hot Springs
EVERETT
Sultan
Startup
Kingston
BELLEVUE
BREMERTON
Fall City
Issaquah
SEATTLE
KENT
Auburn
Matlock
SHELTON
TACOMA
Enumclaw
McCleary
Elma
@ www.demis.nl


１９４０年　タコマ橋の崩落（完成から４ヶ月後）

第2次世界大戦 1939-1945

# 見かけの力（慣性力）

# 1.１１　慣性系と見かけの力




XYZので運動方程式

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}(t))$$

位置ベクトルの関係

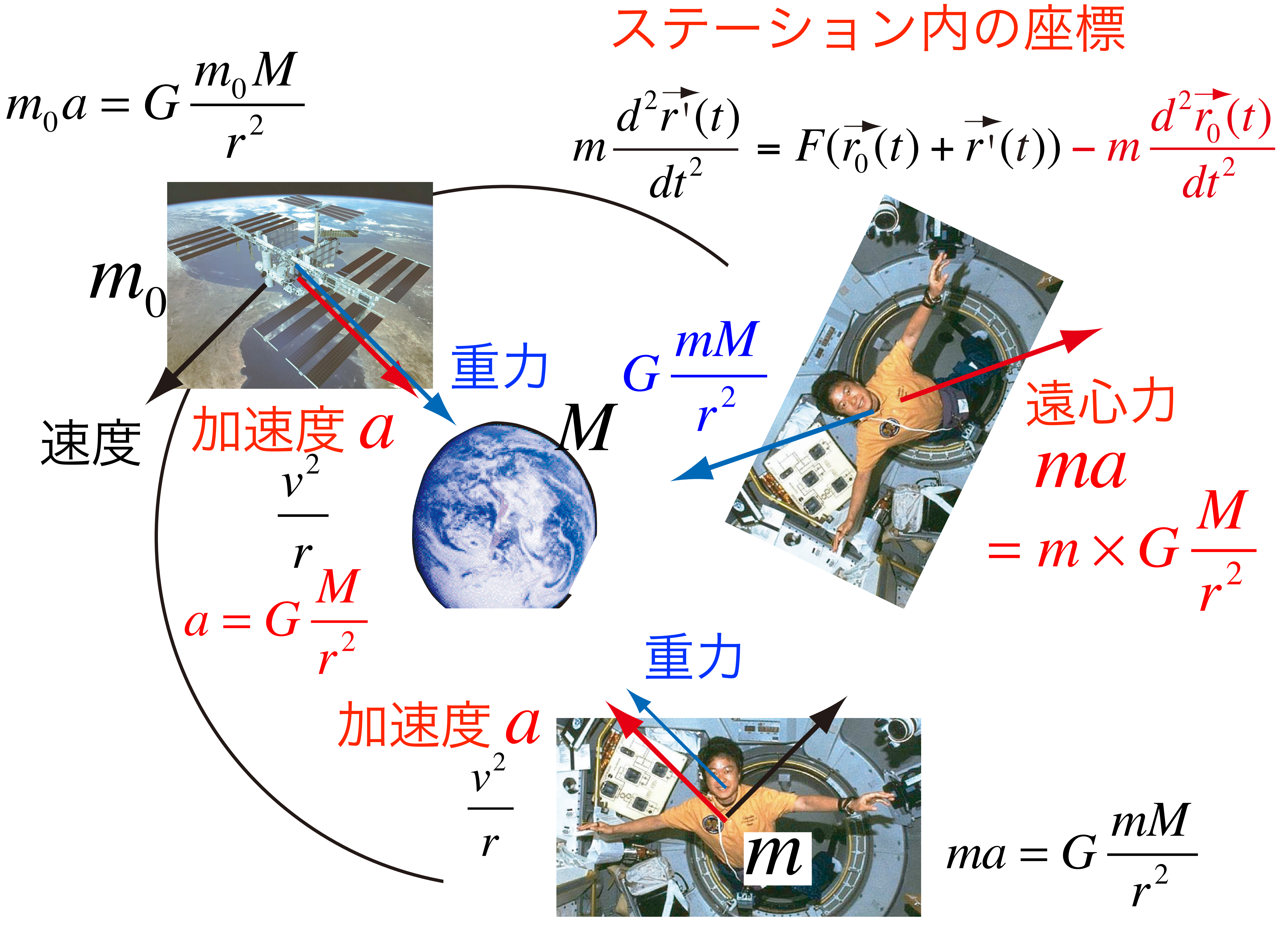
$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{r}_0(t)$$

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}'(t)}{dt^2} + \frac{d^2\vec{r}_0(t)}{dt^2}$$

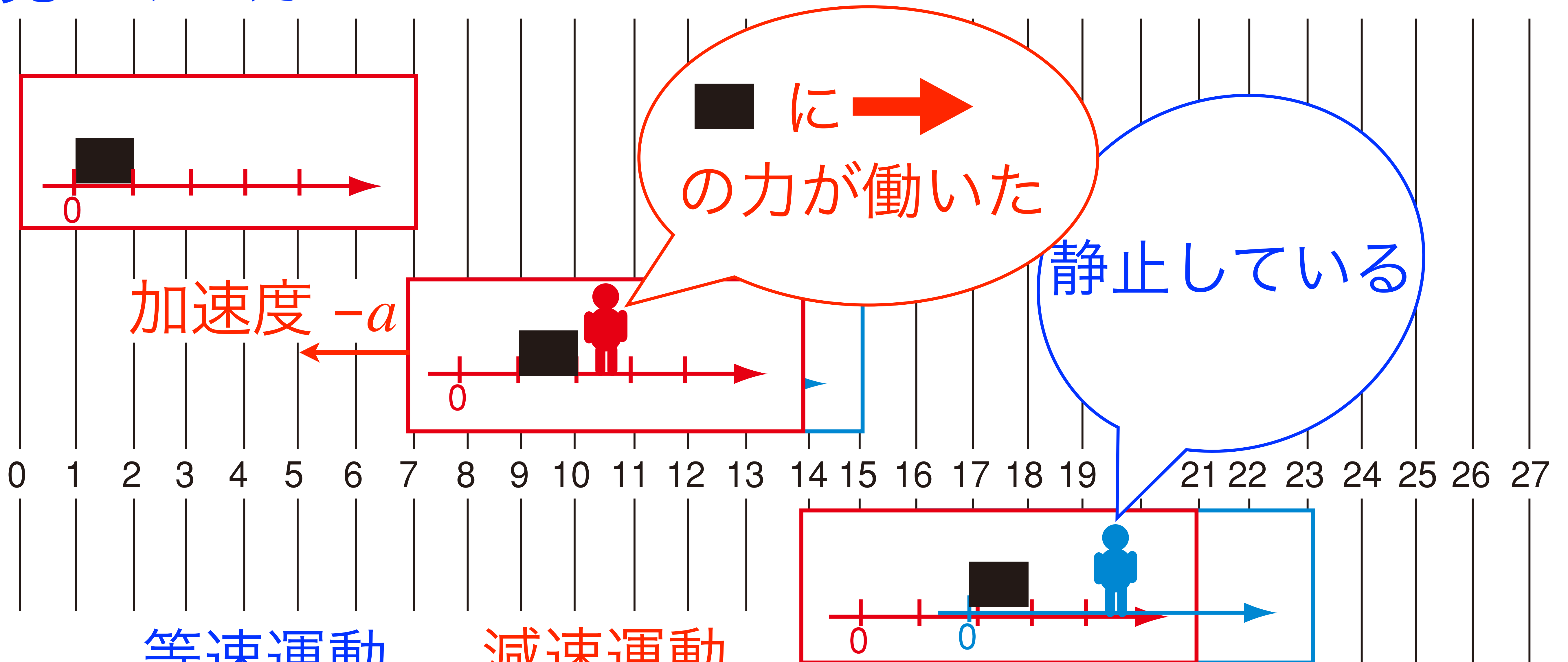
X’Y’Z’での運動方程式

$$m\frac{d^2\vec{r}'(t)}{dt^2} = F(\vec{r}_0(t) + \vec{r}'(t)) \boxed{-m\frac{d^2\vec{r}_0(t)}{dt^2}}$$

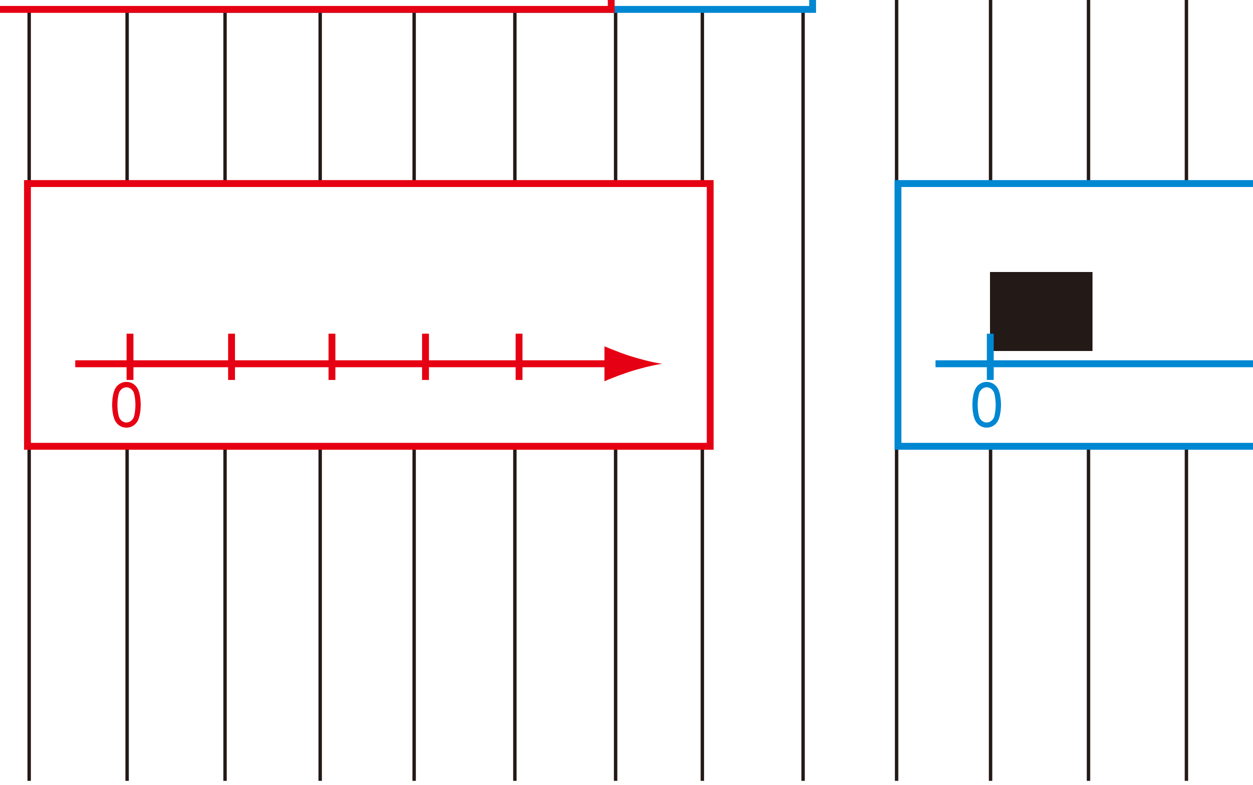
ステーションの加速度の逆向き　見かけの力


ステーション内の座標
$m_0 a = G\frac{m_0 M}{r^2}$
$m\frac{d^2\vec{r'}(t)}{dt^2} = F(\vec{r_0}(t)+\vec{r'}(t)) - m\frac{d^2\vec{r_0}(t)}{dt^2}$
$m_0$
重力
$G\frac{mM}{r^2}$
遠心力
$ma$
$= m \times G\frac{M}{r^2}$
速度
加速度 $a$
$\frac{v^2}{r}$
$M$
$a = G\frac{M}{r^2}$
重力
加速度 $a$
$\frac{v^2}{r}$
$m$
$ma = G\frac{mM}{r^2}$

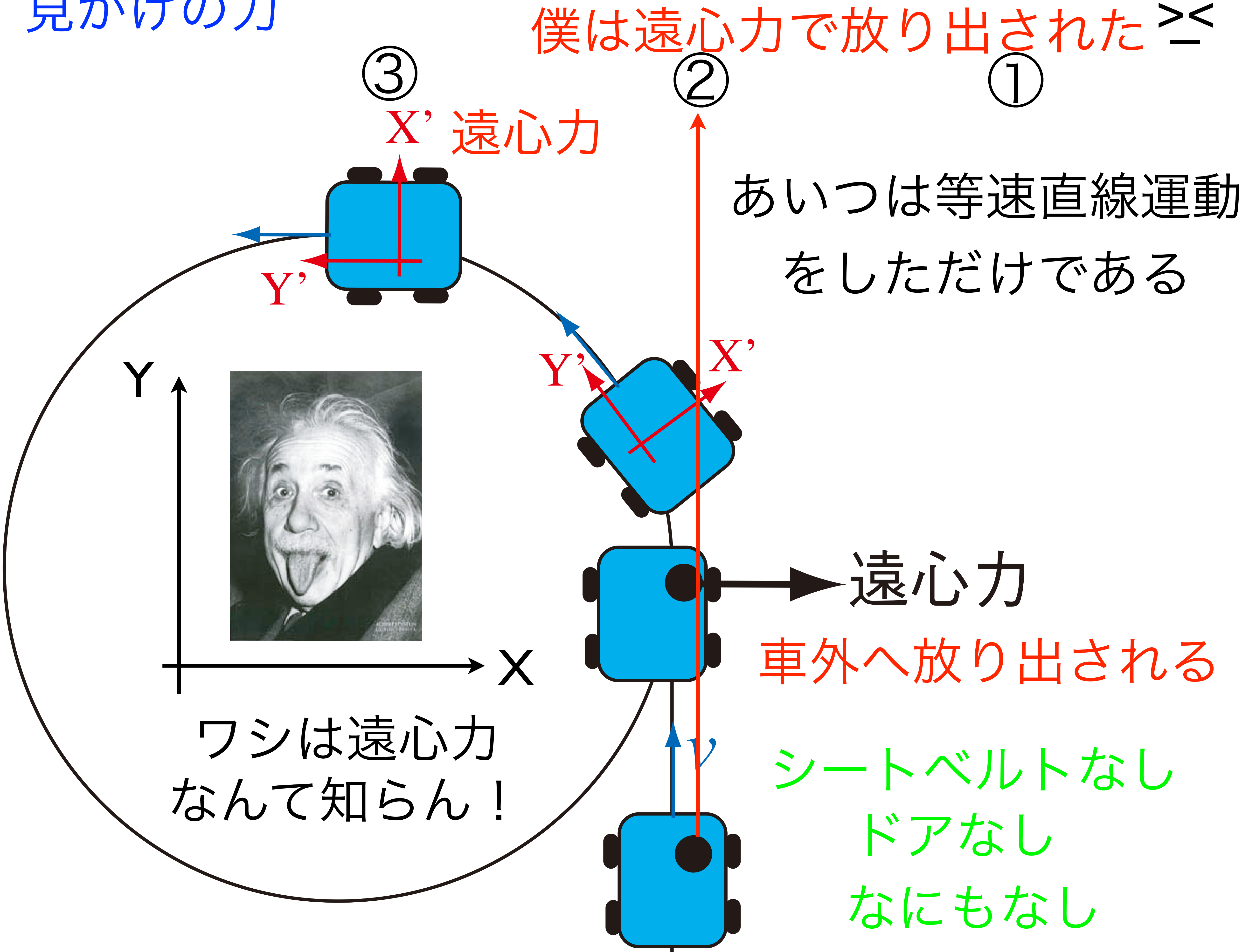
# 見かけの力について



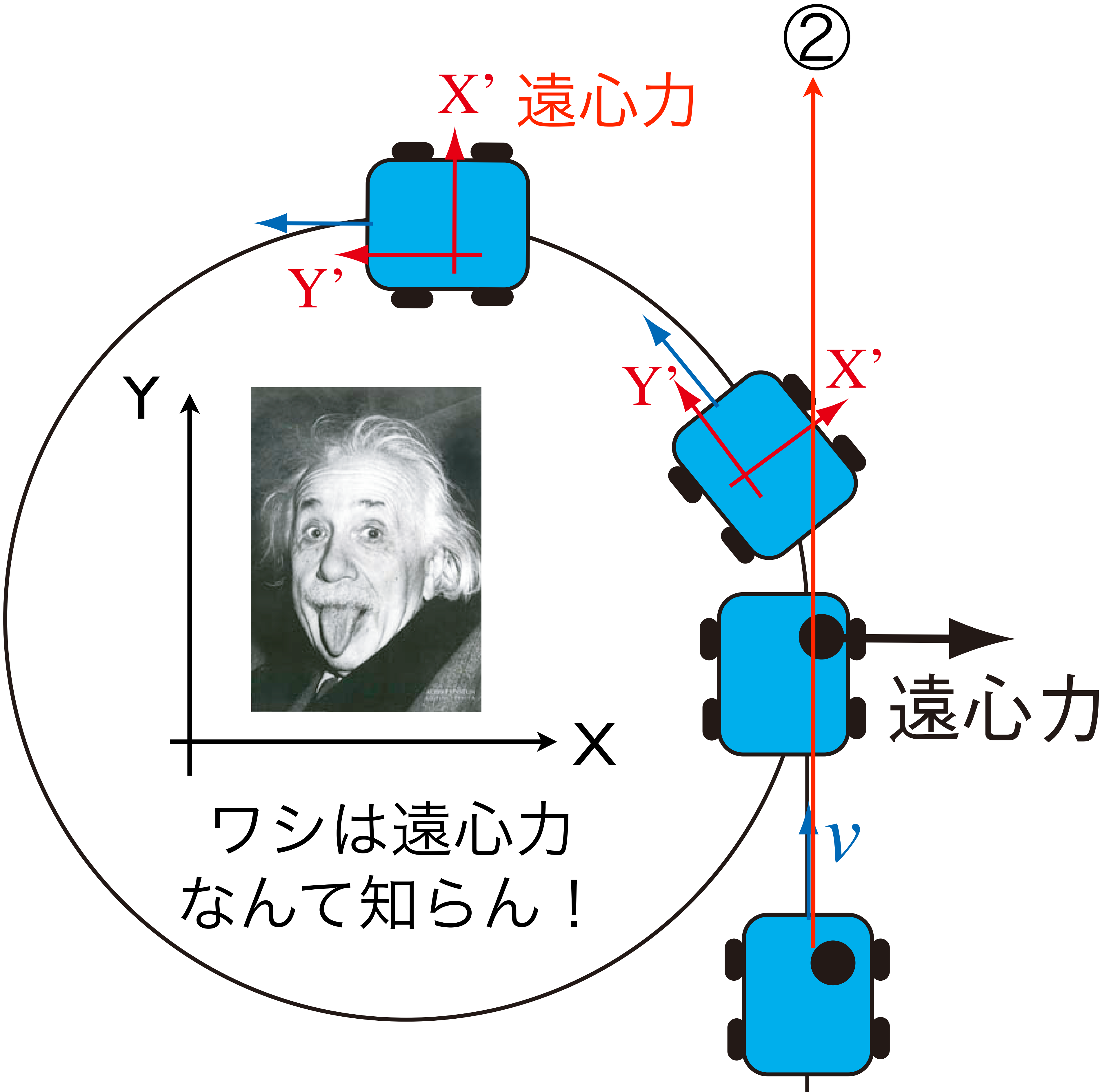

| 時刻 | 等速運動 $x = \overset{8}{v} \times t$ | 減速運動 $x = \overset{8}{v} \times t - \frac{1}{2}\overset{2}{a} \times t^2$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 8 | 8-1=7 |
| 2 | 16 | 16-2=14 |
| 3 | 24 | 24-9=15 |



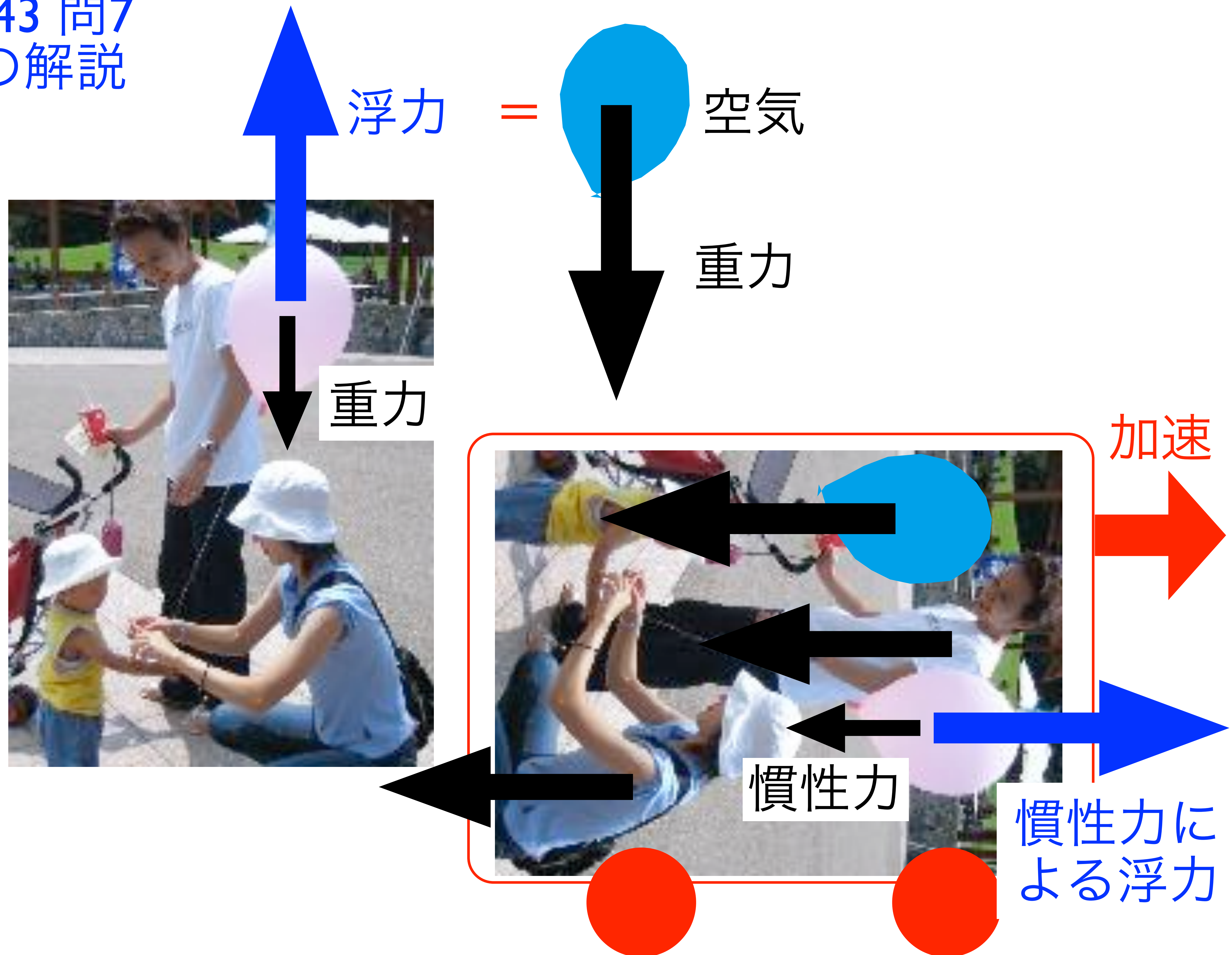
# 見かけの力



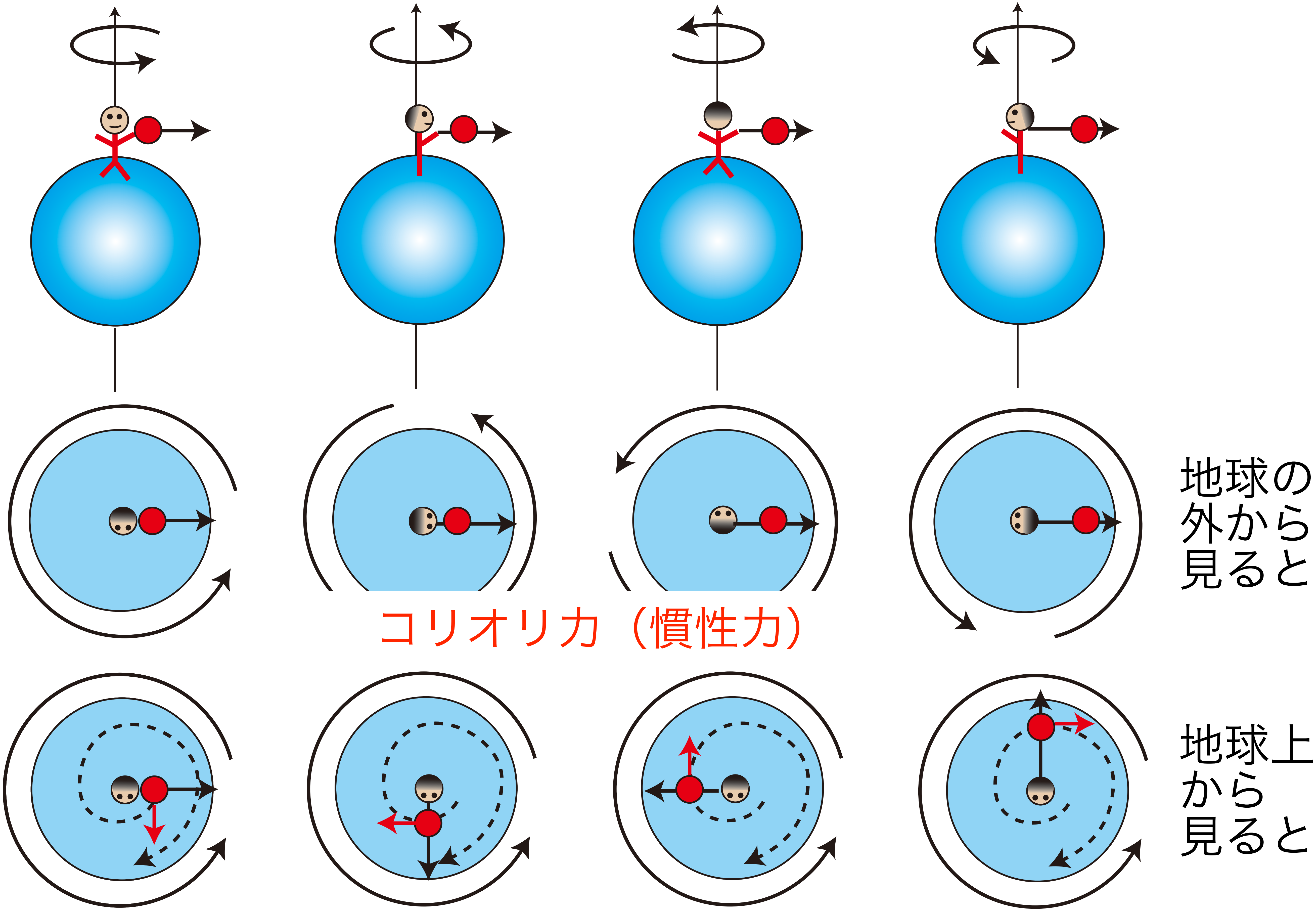
僕は遠心力で放り出された≥≤
③
②
①
X’ 遠心力
Y’
Y’
X’
あいつは等速直線運動
をしただけである
Y
X
遠心力
車外へ放り出される
ワシは遠心力
なんて知らん！
$v$
シートベルトなし
ドアなし
なにもなし


②
X' 遠心力
Y'
Y'
X'
Y
X
遠心力
v
ワシは遠心力
なんて知らん！

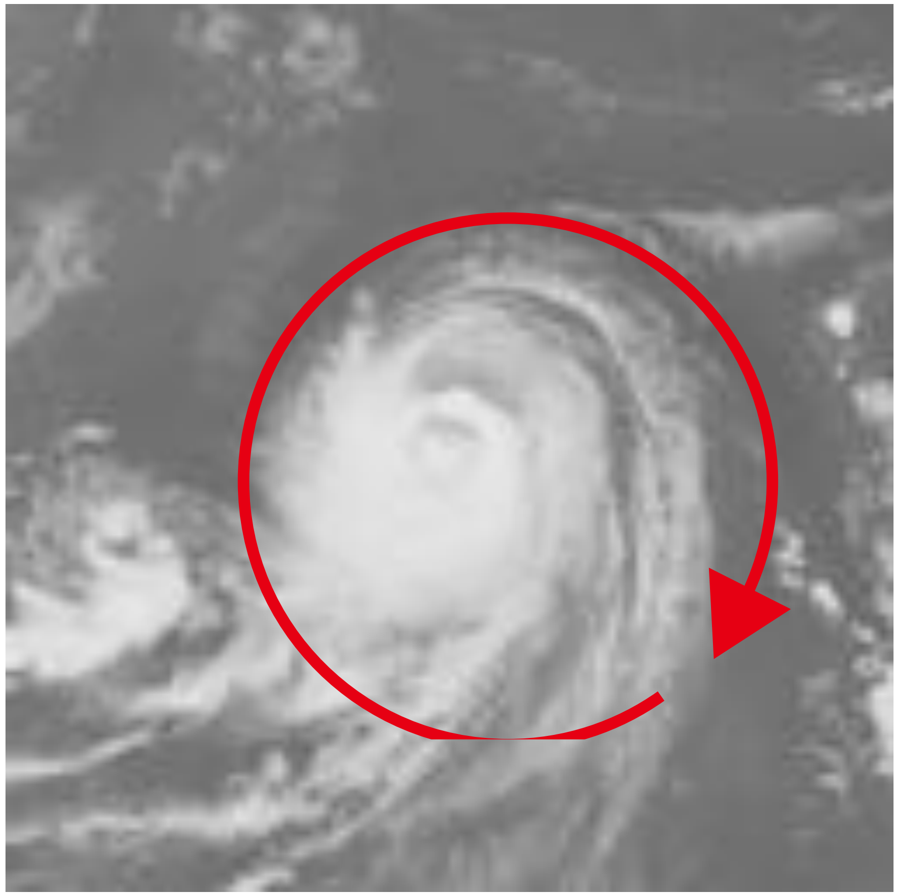
# P43 問7の解説



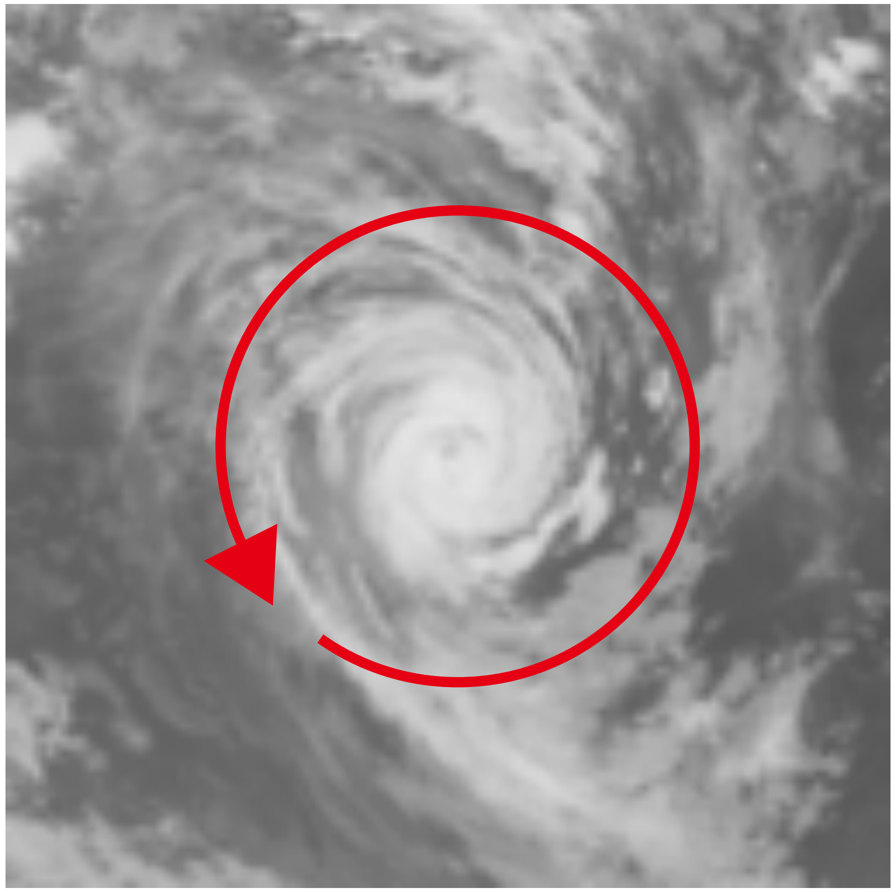
# コリオリ力ってなに？



北半球



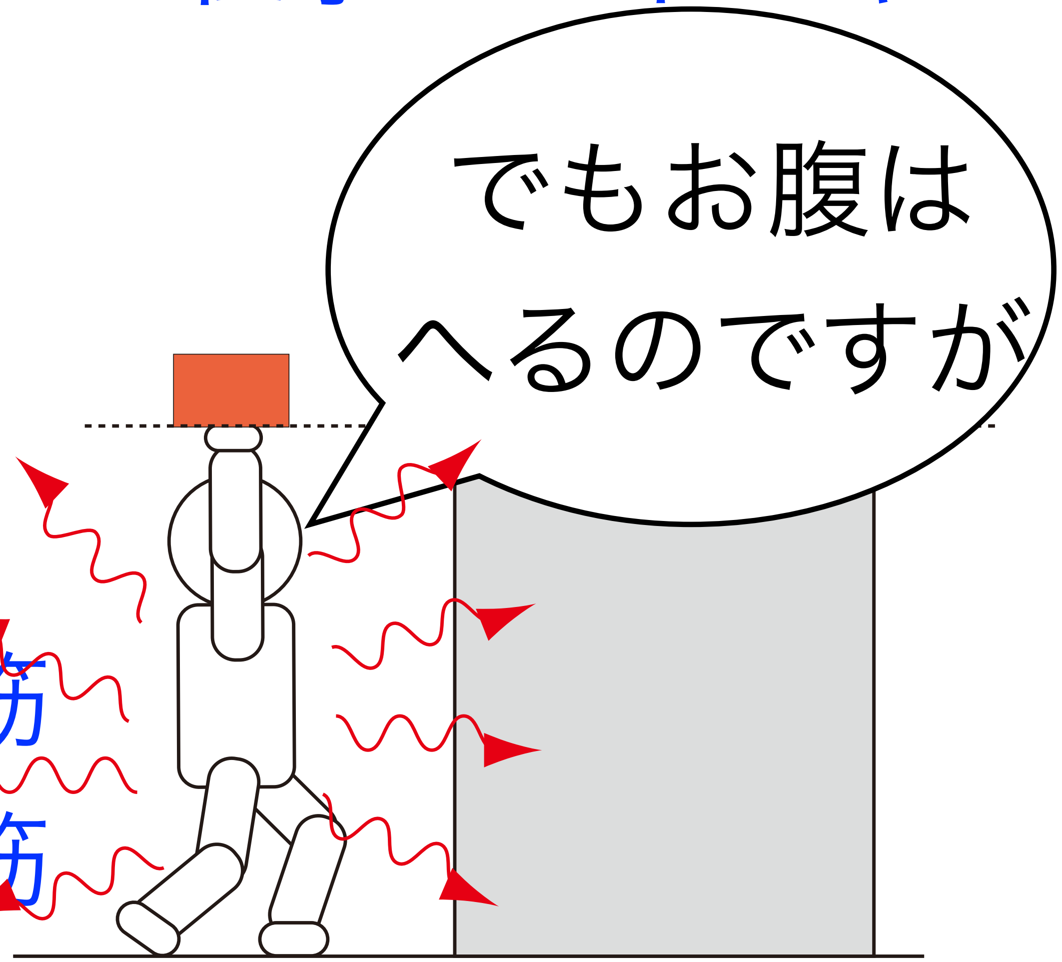
南半球



# エネルギー

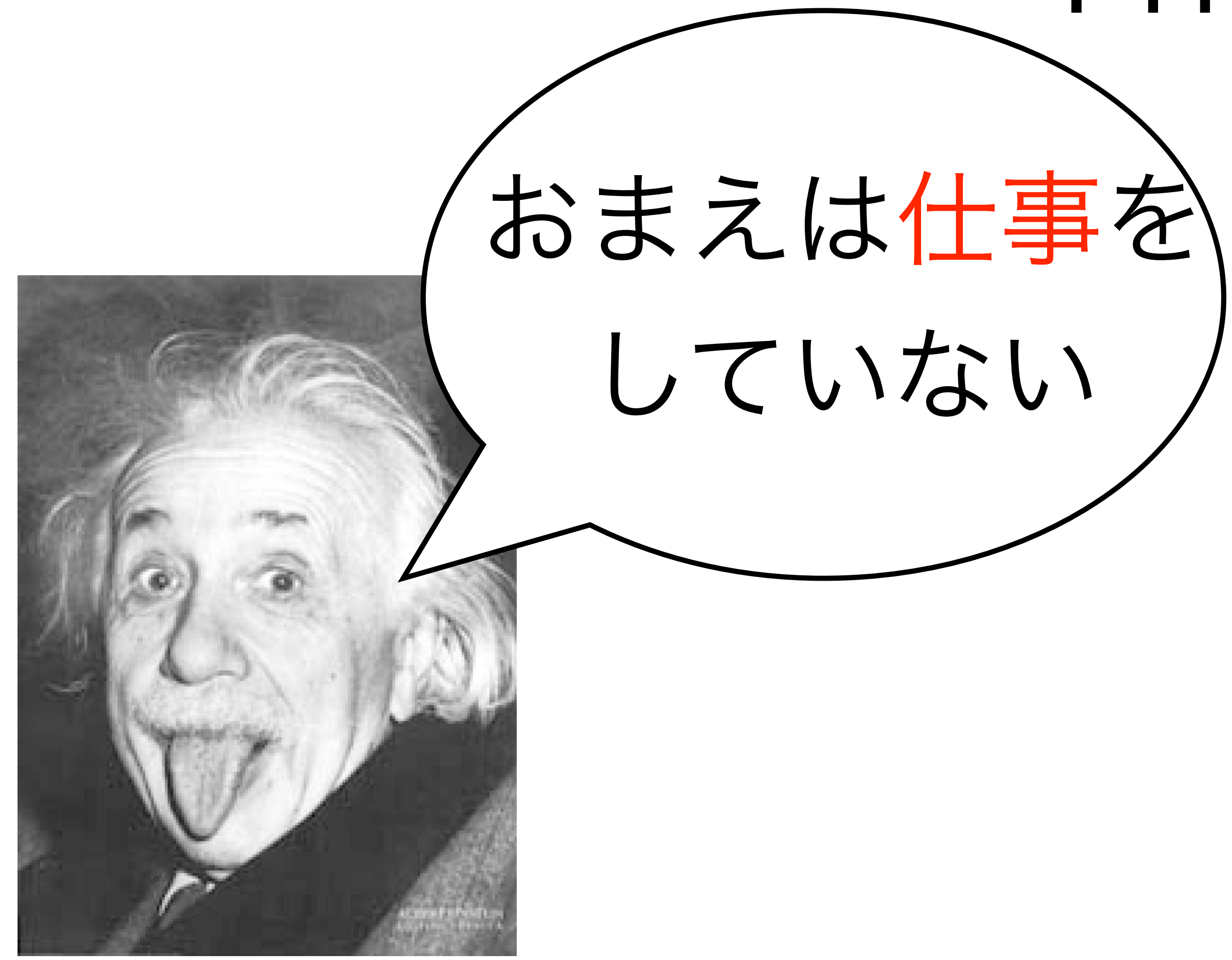
# 1.12　仕事とエネルギー

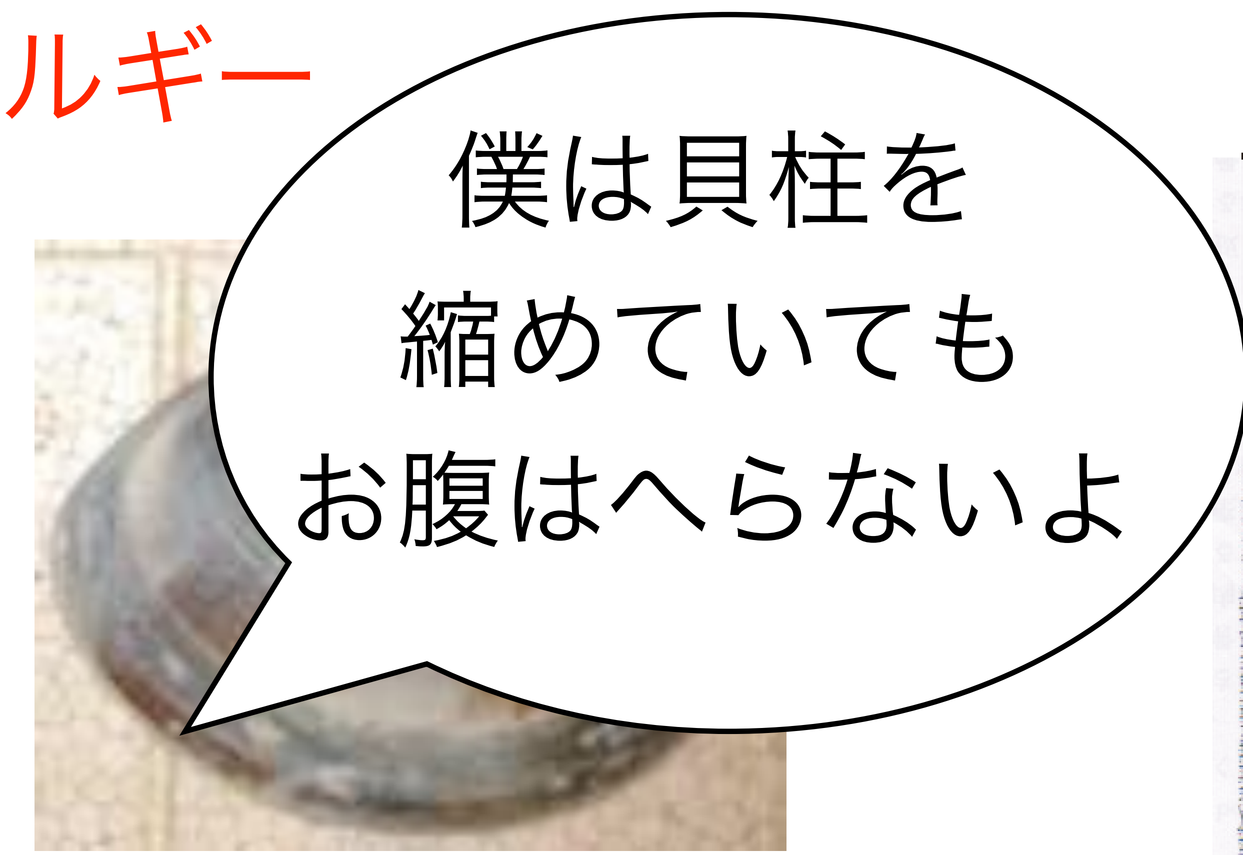




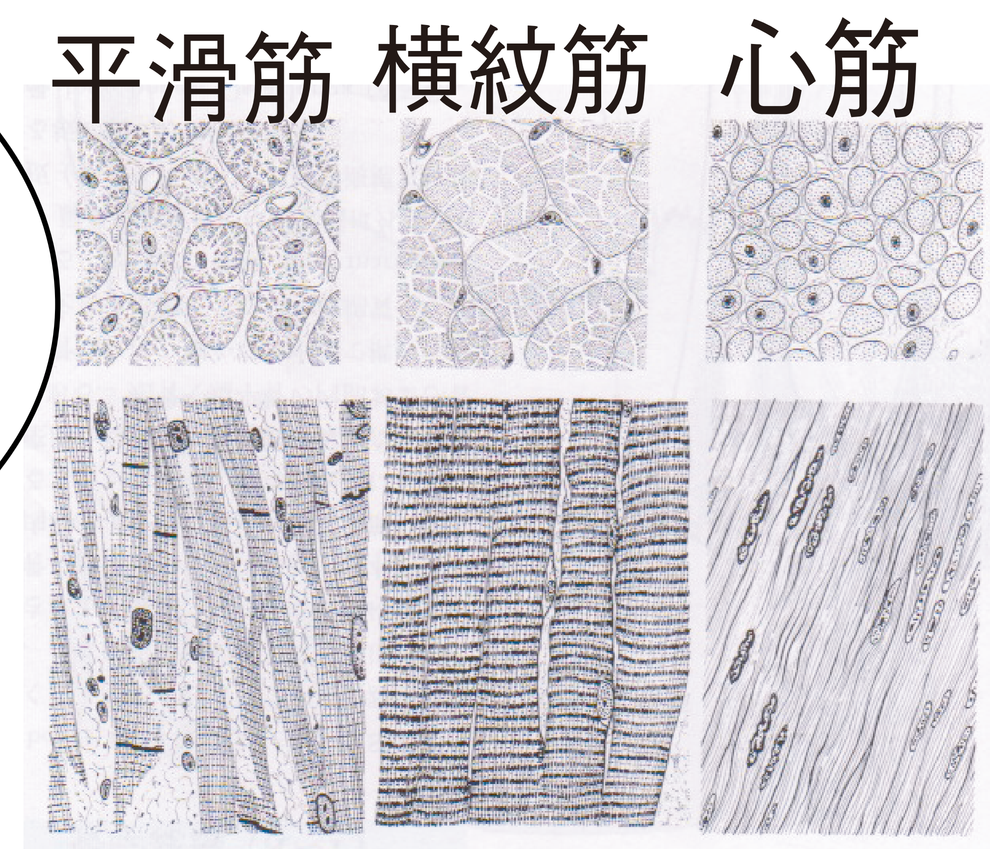

横紋筋
骨格筋

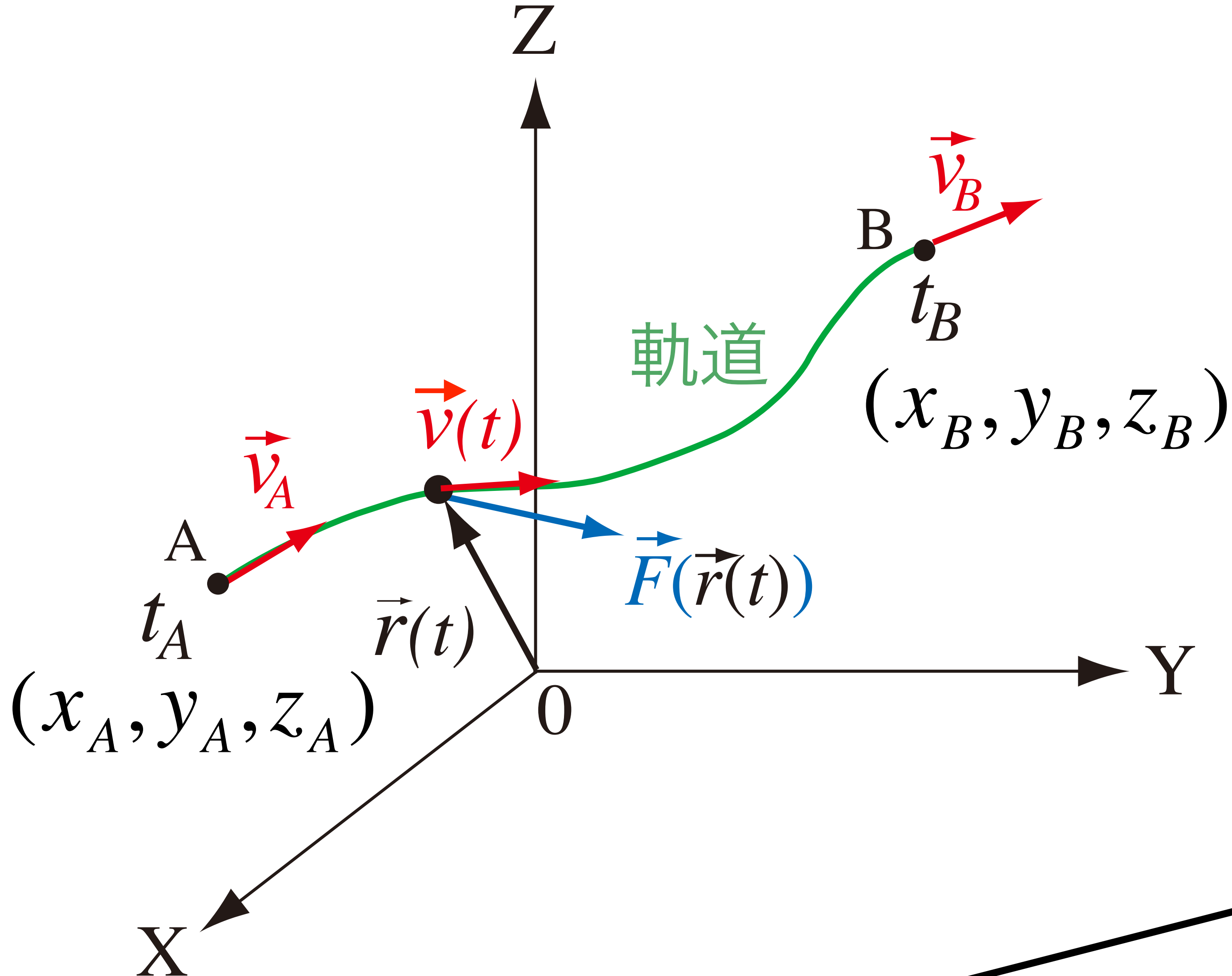
熱エネルギー




平滑筋
大閉殻筋






## 運動方程式

$$m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{F}(\vec{r}(t))$$

## 両辺に$\vec{v}(t)$との内積

$$\boxed{m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} \bullet \vec{v}(t)} = \vec{F}(\vec{r}(t)) \bullet \vec{v}(t)$$

$$m\left(\frac{dv_x(t)}{dt}v_x(t) + \frac{dv_y(t)}{dt}v_y(t) + \frac{dv_z(t)}{dt}v_z(t)\right)$$

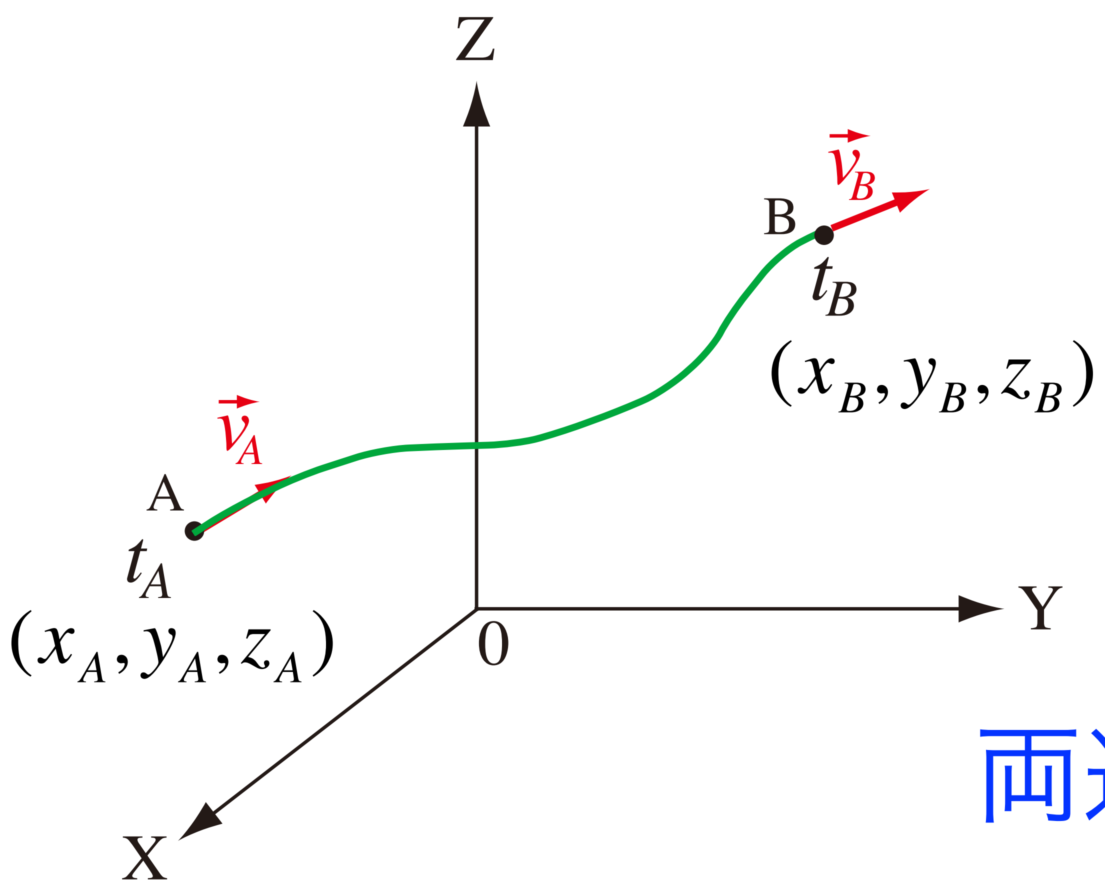
$$\frac{d}{dt}\left(v_{\bigcirc}(t)\right)^2 = 2v_{\bigcirc}(t)\frac{dv_{\bigcirc}(t)}{dt}$$

$$= \frac{m}{2}\left(\frac{d}{dt}\left(v_x(t)\right)^2 + \frac{d}{dt}\left(v_y(t)\right)^2 + \frac{d}{dt}\left(v_z(t)\right)^2\right)$$

$$\left|\vec{v}(t)\right| = v(t)$$

$$= \sqrt{\left(v_x(t)\right)^2 + \left(v_y(t)\right)^2 + \left(v_z(t)\right)^2}$$

$$= \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left(v_x(t)\right)^2 + \left(v_y(t)\right)^2 + \left(v_z(t)\right)^2\right\} = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(v(t)\right)^2$$




$$m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\bullet\vec{v}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))\bullet\vec{v}(t)$$

$$\parallel$$

$$\frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(v(t)\right)^2$$

両辺を　$t_A \sim t_B$　で積分

$$\int_{t_A}^{t_B}\frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(v(t)\right)^2 dt = \int_{t_A}^{t_B}\vec{F}(\vec{r}(t))\bullet\vec{v}(t)\,dt$$

$$\parallel$$

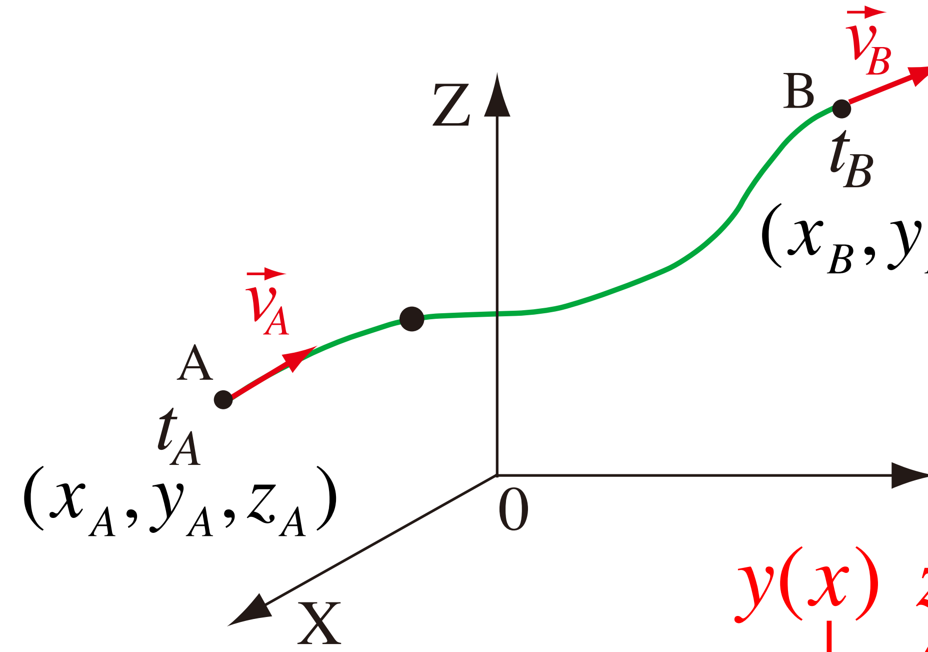
$$\left[\frac{m}{2}\left(v(t)\right)^2\right]_{t_A}^{t_B}$$

$$\parallel$$

$$\frac{m}{2}{v_B}^2 - \frac{m}{2}{v_A}^2$$　運動エネルギーの差

$$\frac{m}{2}{v_B}^2-\frac{m}{2}{v_A}^2=\int_{t_A}^{t_B}\vec{F}(\vec{r}(t))\bullet\underline{\vec{v}(t)}dt$$

$$\vec{v}(t) = \left(\frac{dx(t)}{dt},\ \frac{dy(t)}{dt},\ \frac{dz(t)}{dt}\right)$$




$$=\int_{t_A}^{t_B}F_x(x(t),y(t),z(t))\frac{dx(t)}{\cancel{dt}}\cancel{dt}$$

$$+\int_{t_A}^{t_B}F_y(x(t),y(t),z(t))\frac{dy(t)}{\cancel{dt}}\cancel{dt}$$

$$+\int_{t_A}^{t_B}F_z(x(t),y(t),z(t))\frac{dz(t)}{\cancel{dt}}\cancel{dt}$$

$x_B$ $x_A$

置換積分

$y(x)$ $z(x)$

$$=\int_{x_A}^{x_B}F_x(x,y,z)\,dx$$

$$+\int_{y_A}^{y_B}F_y(x,y,z)\,dy$$

$$+\int_{z_A}^{z_B}F_z(x,y,z)\,dz$$

まとめて

内積

$$=\int_A^B\vec{F}(\vec{r})\bullet d\vec{r}$$

線積分

$$\vec{F}(\vec{r}) = \left(F_x,\ F_y,\ F_z\right) \qquad d\vec{r} = \left(dx,\ dy,\ dz\right)$$

エネルギー保存則

$$\boxed{\frac{m}{2}{v_B}^2-\frac{m}{2}{v_A}^2=\int_A^B\vec{F}(\vec{r})\bullet d\vec{r}}$$

Bでの運動エネルギー

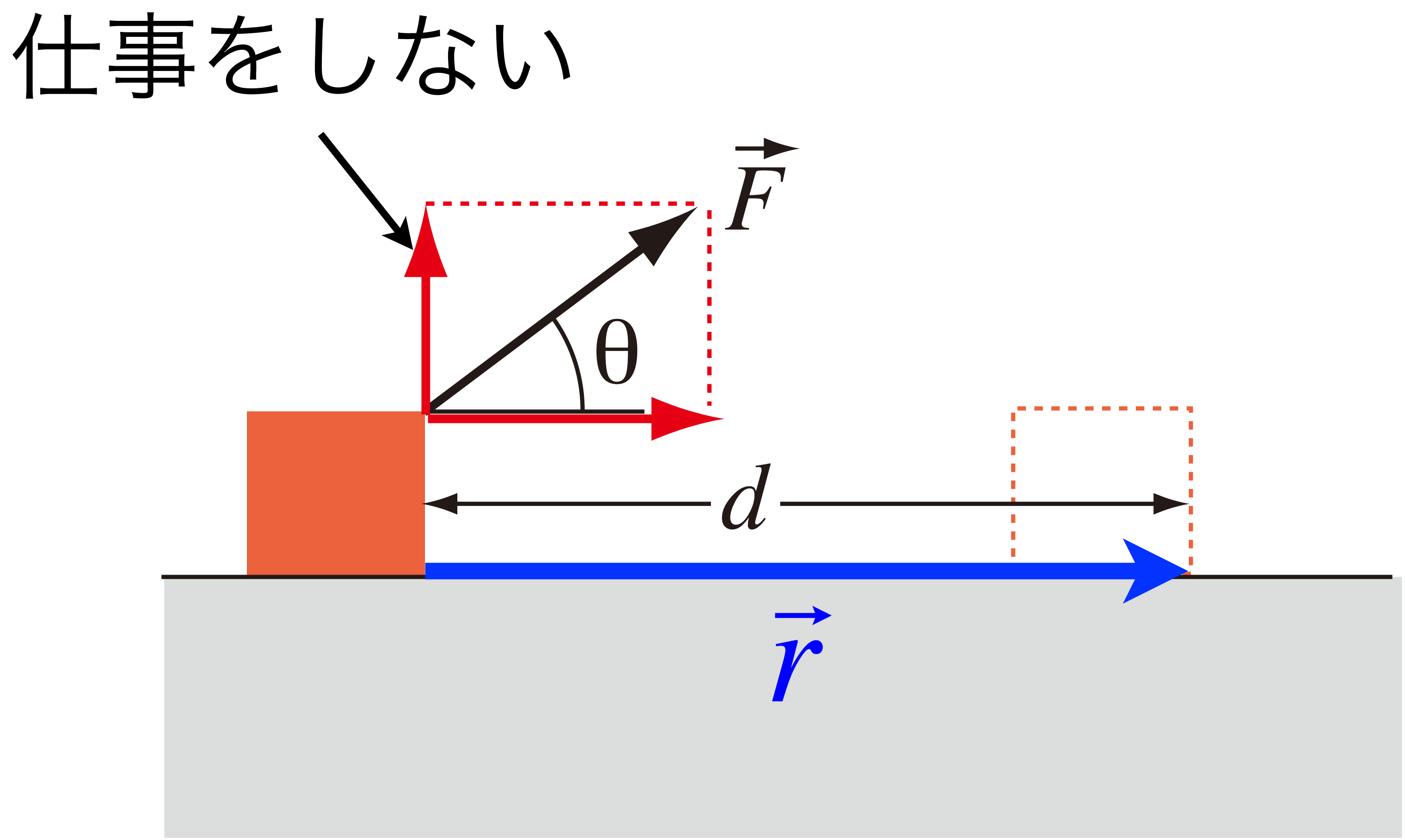
Aでの

A→Bで力$F$がした仕事

エネルギー保存則

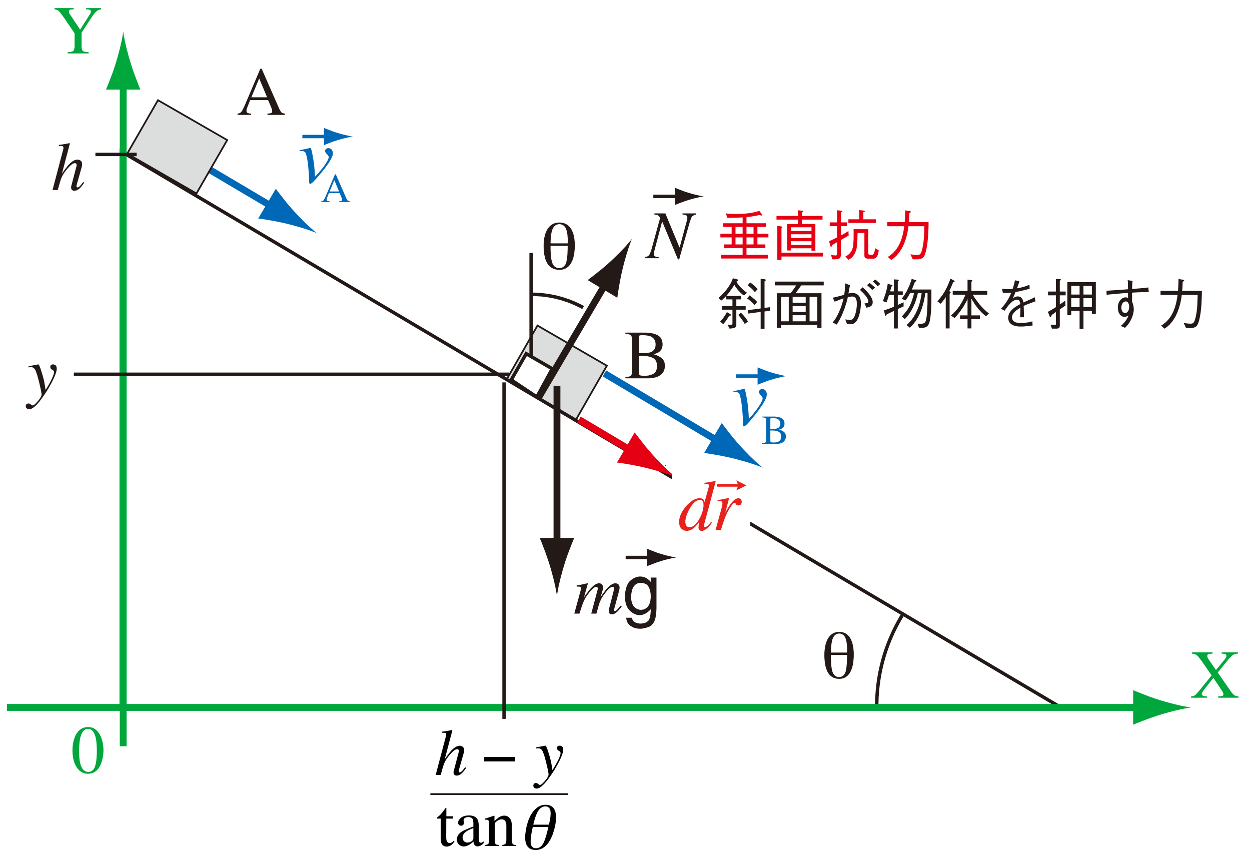
$$\boxed{\frac{m}{2}{v_B}^2 - \frac{m}{2}{v_A}^2 = \int_A^B \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}}$$

最も簡単な場合（力が一定）




力がする仕事

$$\left|\vec{F}\right|\cos\theta \times \left|\vec{r}\right| = \vec{F}\cdot\vec{r}$$




# エネルギー保存則

$$\boxed{\frac{m}{2}v_B{}^2-\frac{m}{2}v_A{}^2=\int_A^B\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}}$$

## 働いている力

$$\vec{F}=\left(N\sin\theta,\ N\cos\theta-mg\right)$$

## 微小ベクトル $d\vec{r}$

斜面の傾き $\dfrac{dy}{dx}=-\tan\theta \longrightarrow d\vec{r}=\left(dx,\ dy\right)=\left(dx,\ (-\tan\theta)dx\right)$

## A〜Bの仕事

$$\int_A^B\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_A^B\left(F_x dx+F_y dy\right)$$

$$-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

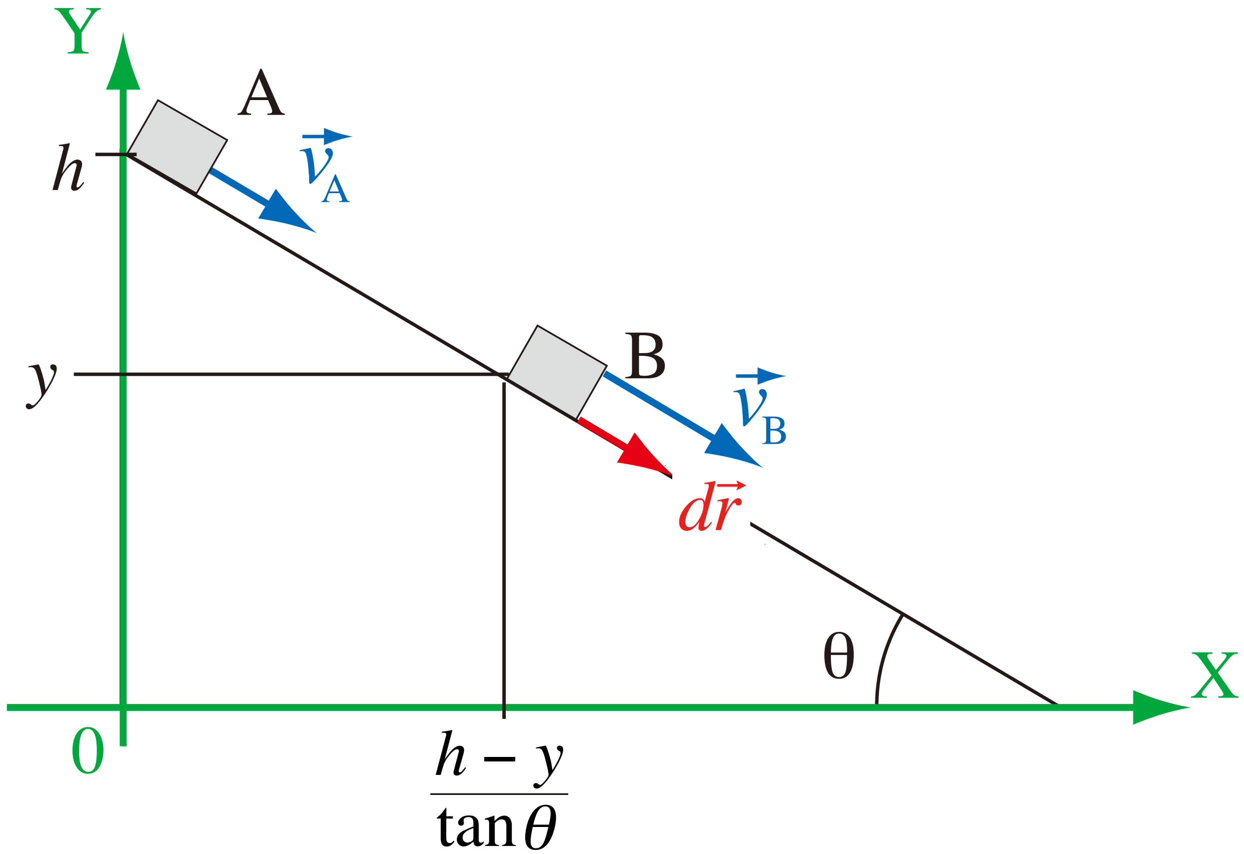
$$=\int_A^B\left\{\cancel{N\sin\theta}\,dx+(\cancel{N\cos\theta}-mg)(-\tan\theta)dx\right\}$$

$$=\int_0^{\frac{h-y}{\tan\theta}}mg\tan\theta\ dx$$

$$=mg(h-y)$$

移動方向と垂直な力は仕事をしない

P47




$$\boxed{\frac{m}{2}v_B^2-\frac{m}{2}v_A^2=\int_A^B \vec{F}(\vec{r})\bullet d\vec{r}}$$

$$mg(h-y)$$

$$\frac{1}{2}mv_B{}^2-\frac{1}{2}mv_A{}^2=mg(h-y)$$

$$=U_A-U_B$$

# エネルギー保存則

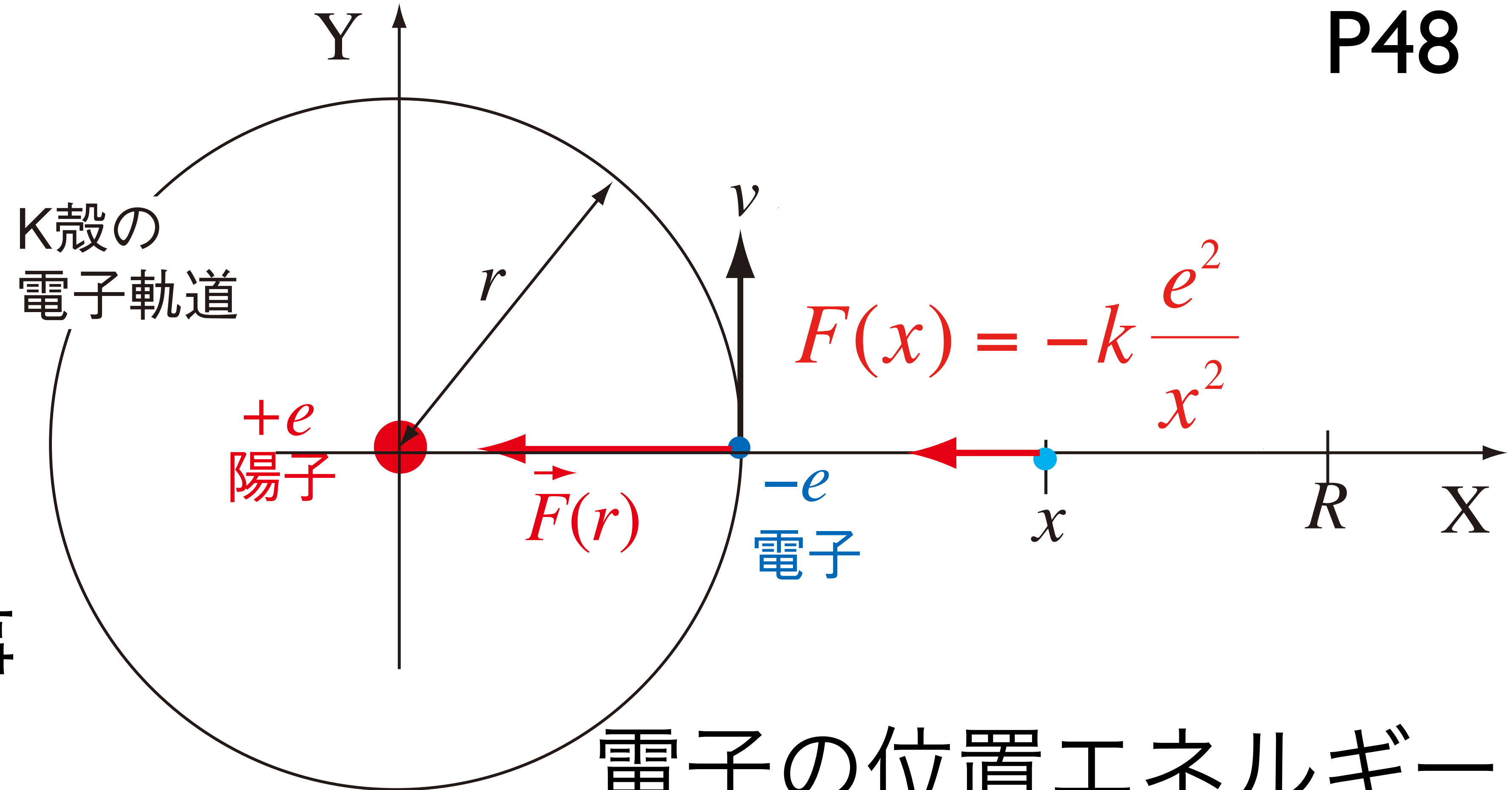
$$\frac{1}{2}mv_B{}^2+\overset{U_B}{mgy}=\frac{1}{2}mv_A{}^2+\overset{U_A}{mgh}=\text{一定}$$

運動エネルギー　　位置エネルギー　　全エネルギー

$$\longrightarrow\ U_A-U_B=\int_A^B \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

位置エネルギーの差　　仕事

# 例：水素原子の イオン化




A　B

電子が $R \to r$ に
移動するとき、
電気力がする仕事

$$U_A - U_B = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$$U(R) - U(r) = \int_R^r -k\frac{e^2}{x^2}\,dx$$

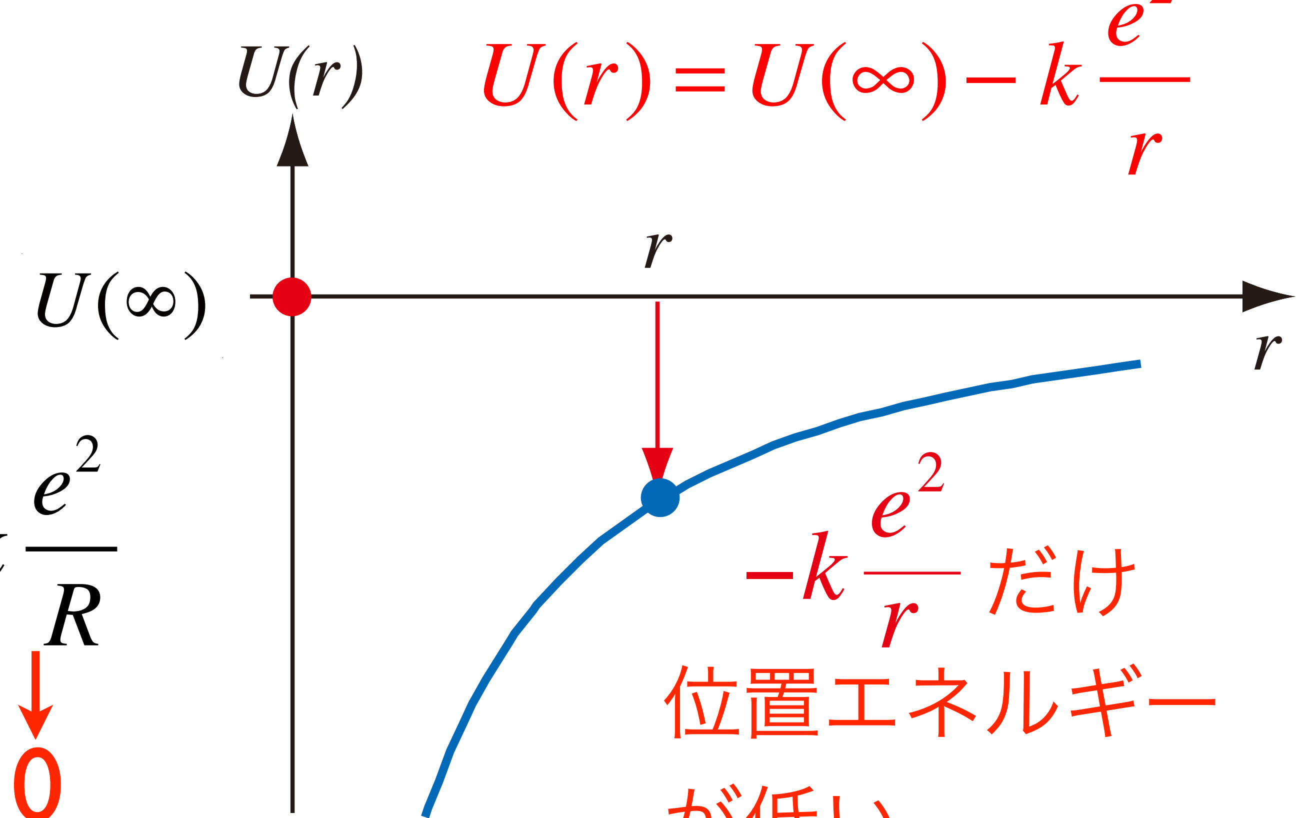
$U(\infty)$

$$= \left[k\frac{e^2}{x}\right]_R^r = k\frac{e^2}{r} - k\frac{e^2}{R}$$

$\downarrow$
0

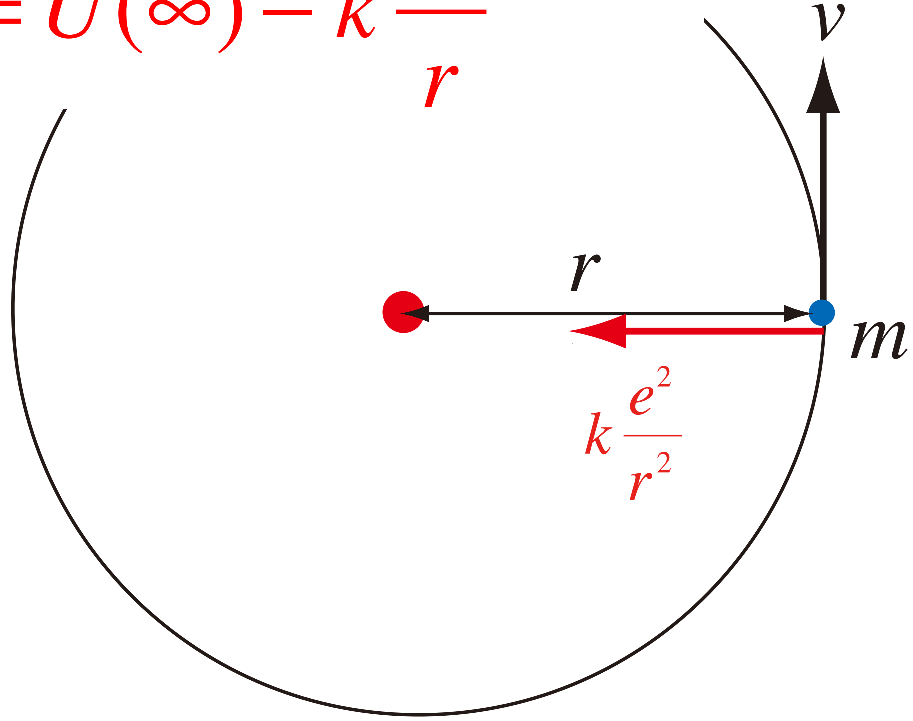
イオン化　$R = \infty$

## 電子の位置エネルギー



# 電子の位置エネルギー

$$U(r) = U(\infty) - k\frac{e^2}{r}$$




# 電子の運動方程式

$$m\frac{v^2}{r} = k\frac{e^2}{r^2} \longrightarrow v^2 = \frac{ke^2}{mr}$$

# 電子の運動エネルギー

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{ke^2}{r}$$

# 電子の全エネルギー

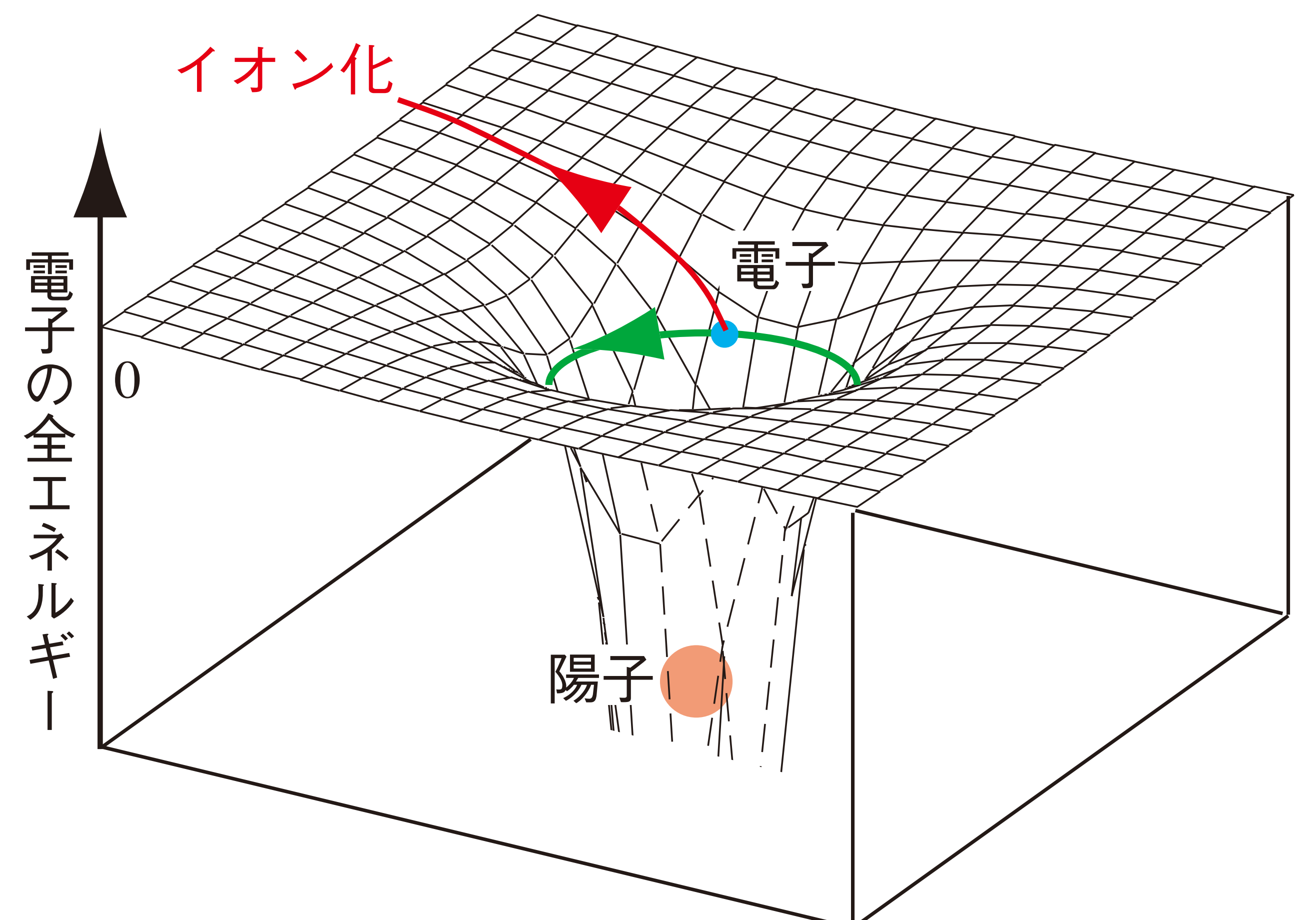
$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{ke^2}{r} + U(\infty) - k\frac{e^2}{r}$$

$$= U(\infty) \boxed{-\frac{1}{2}\frac{ke^2}{r}}$$

**<0**

エネルギーが足りない



$$E = U(\infty) - \frac{1}{2}\frac{ke^2}{r}$$

イオン化エネルギー

水素原子の半径 $= 0.529\,\mathring{A}$

$$\frac{1}{2}\frac{ke^2}{r} = \frac{1}{2}\frac{(9\times10^{9})\times(1.6\times10^{-19})^2}{0.529\times10^{-10}}$$

$$= 2.18\times10^{-18}\,\mathrm{J}$$

化学I の教科書

表7 イオン化エネルギー〔kJ/mol〕

| 原子 | $_1$H | $_2$He | $_3$Li | $_4$Be | $_5$B | $_6$C | $_7$N | $_8$O |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| イオン化エネルギー | 1312 | 2372 | 520 | 899 | 801 | 1086 | 1402 | 1314 |

原子1個あたり

$$\frac{1312\times10^{3}}{6.02\times10^{23}} = 2.18\times10^{-18}\,\mathrm{J}$$

化学エネルギーは電子の力学的エネルギー

P49

# さまざまなエネルギー

化学エネルギー　＝　原子・分子の位置エネルギー

電気エネルギー　＝　電子が持つ位置エネルギー

原子力エネルギー　＝　原子核が持つ位置エネルギー

熱エネルギー　＝　原子・分子の運動エネルギー

# 剛体の運動

## 重心

# 2.剛体の運動

外部から力を加えたとき変形が無視できる物体

ようするに、
とっても堅いもの

弾性体

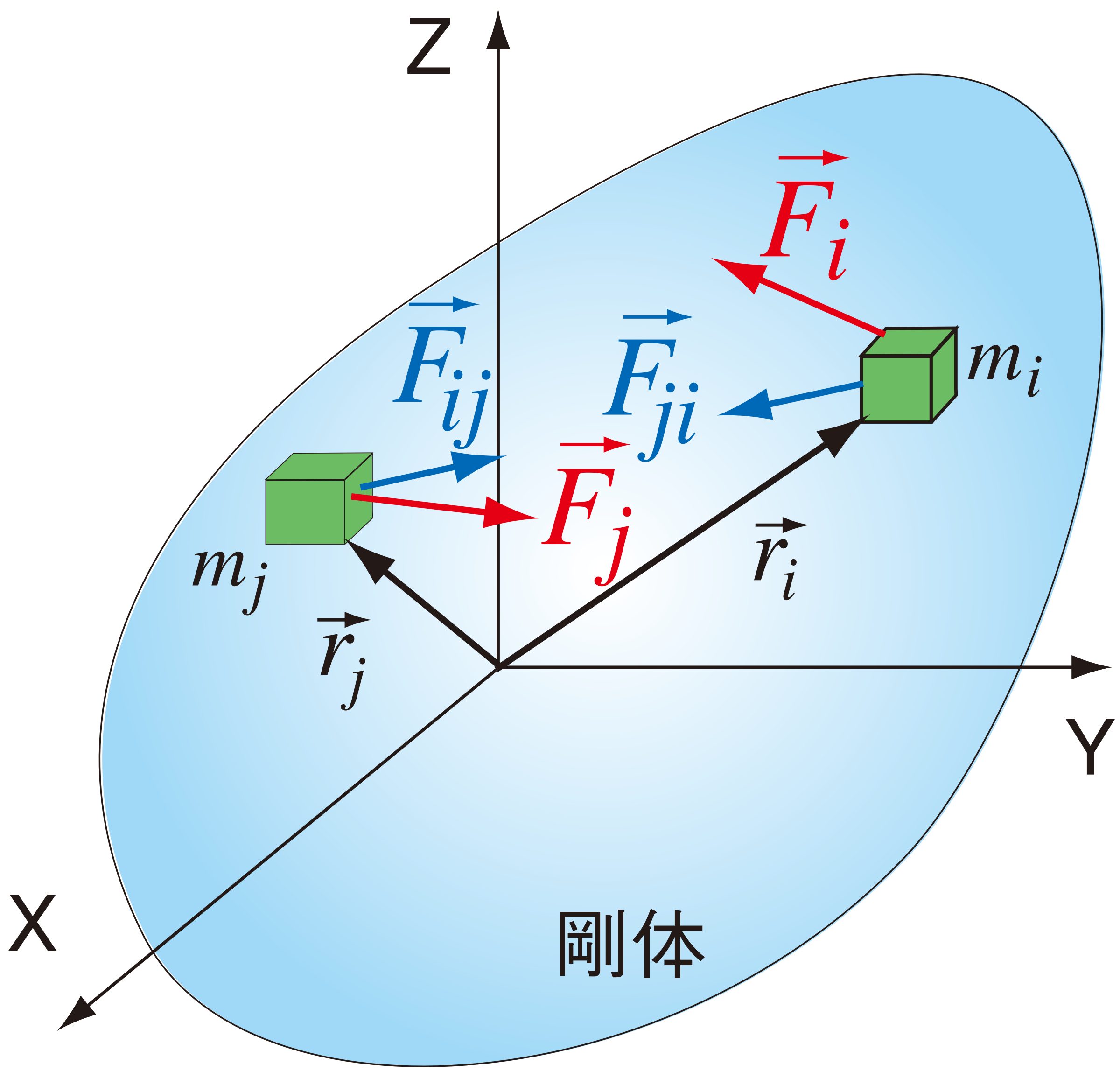
流体

どんな小さな力が働いても自由に変形する物体


アレッチ氷河

# 2.1 重心とその運動






大きさのある物体

$i = 1, 2, \cdots, N$ に分割

$N \to \infty$

**内力**　たとえば分子間力

$\vec{F}_{ji}$　$i$ が $j$ から受ける力

$\vec{F}_{ij}$　$j$ が $i$ から受ける力

**作用・反作用の関係**

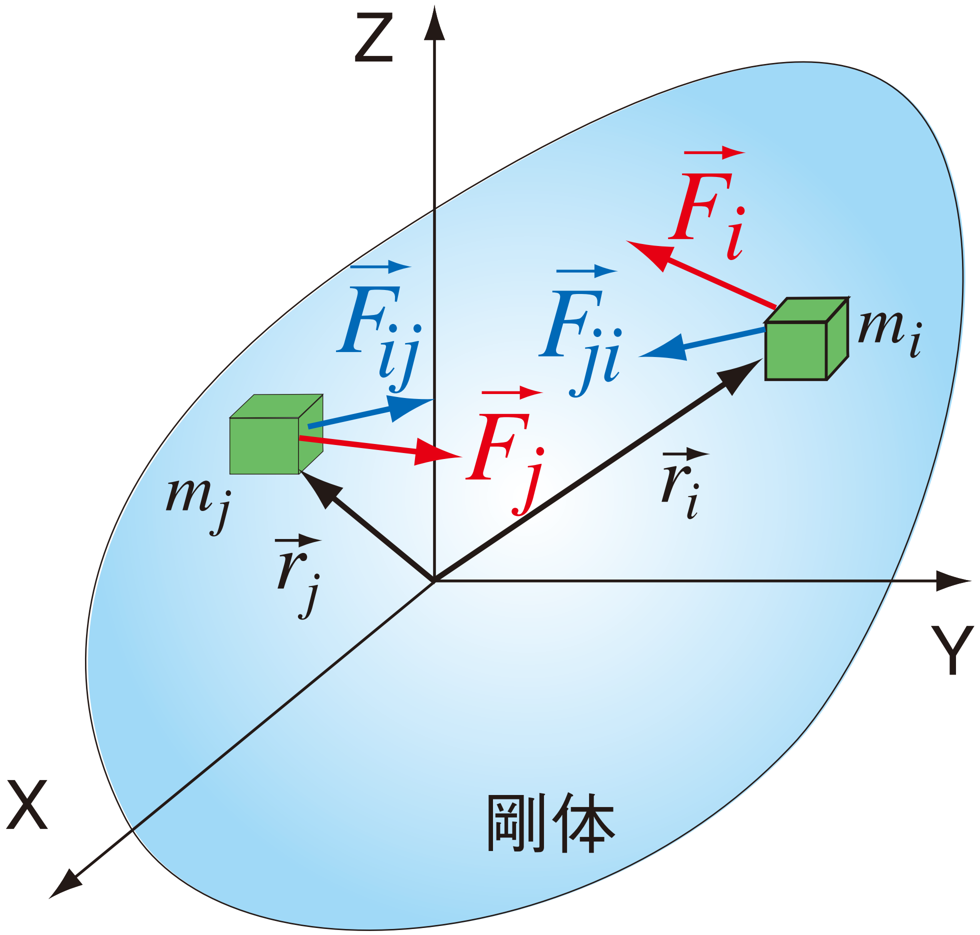
$$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$$

**外力**

$\vec{F}_i$　物体の外から

$\vec{F}_j$　加えられる力

たとえばひもに引っ張る




作用・反作用の関係 $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$

運動方程式

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1(t)}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{21} + \boxed{\vec{F}_{31}} + \cdots$$

$$m_2 \frac{d^2\vec{r}_2(t)}{dt^2} = \vec{F}_2 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \cdots$$

$\vdots \qquad \boxed{\vec{F}_{13}} \qquad \vdots$

+)

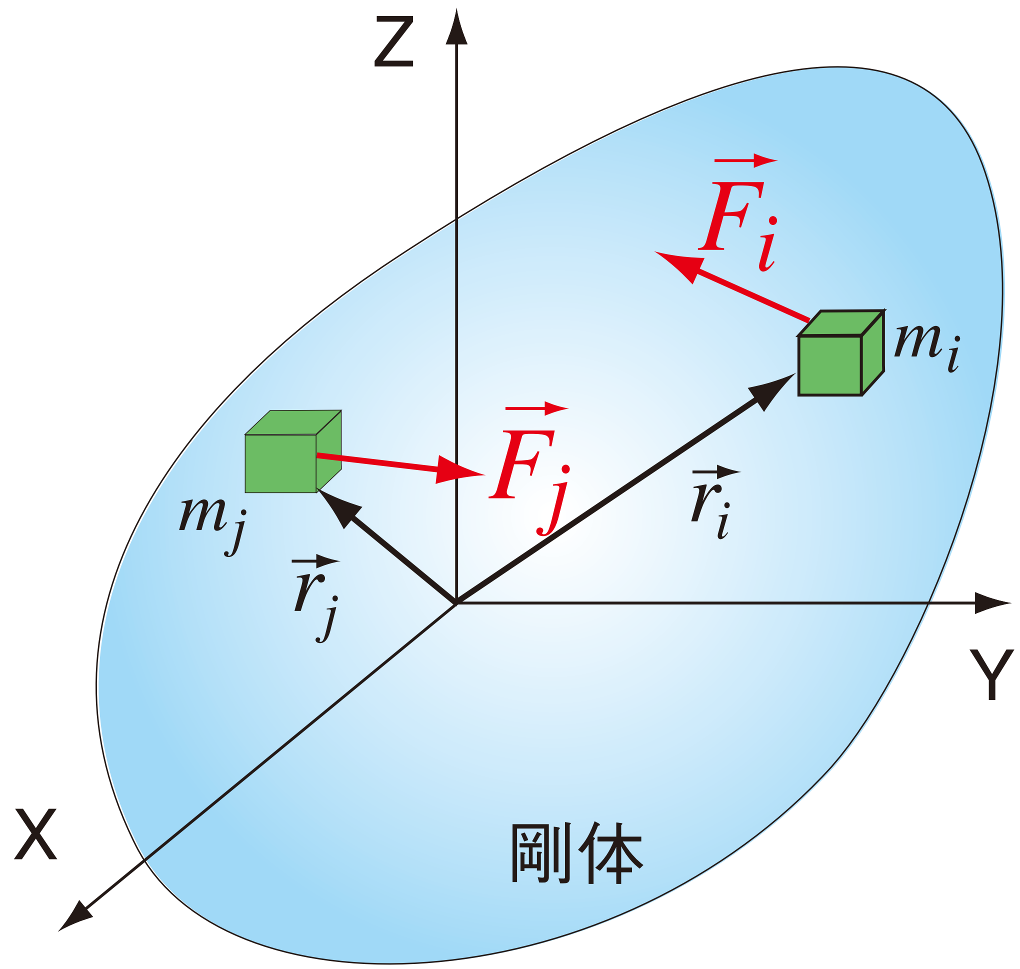
$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1(t)}{dt^2} + m_2 \frac{d^2\vec{r}_2(t)}{dt^2} + \cdots = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots$$

外力のみ

$$+\left(\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}\right) + \left(\vec{F}_{31} + \vec{F}_{13}\right) + \cdots$$

作用・反作用の関係 $\| \; 0 \qquad \| \; 0$

内力ゼロ




運動方程式

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1(t)}{dt^2} + m_2 \frac{d^2\vec{r}_2(t)}{dt^2} + \cdots$$

$$= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots$$ 外力のみ

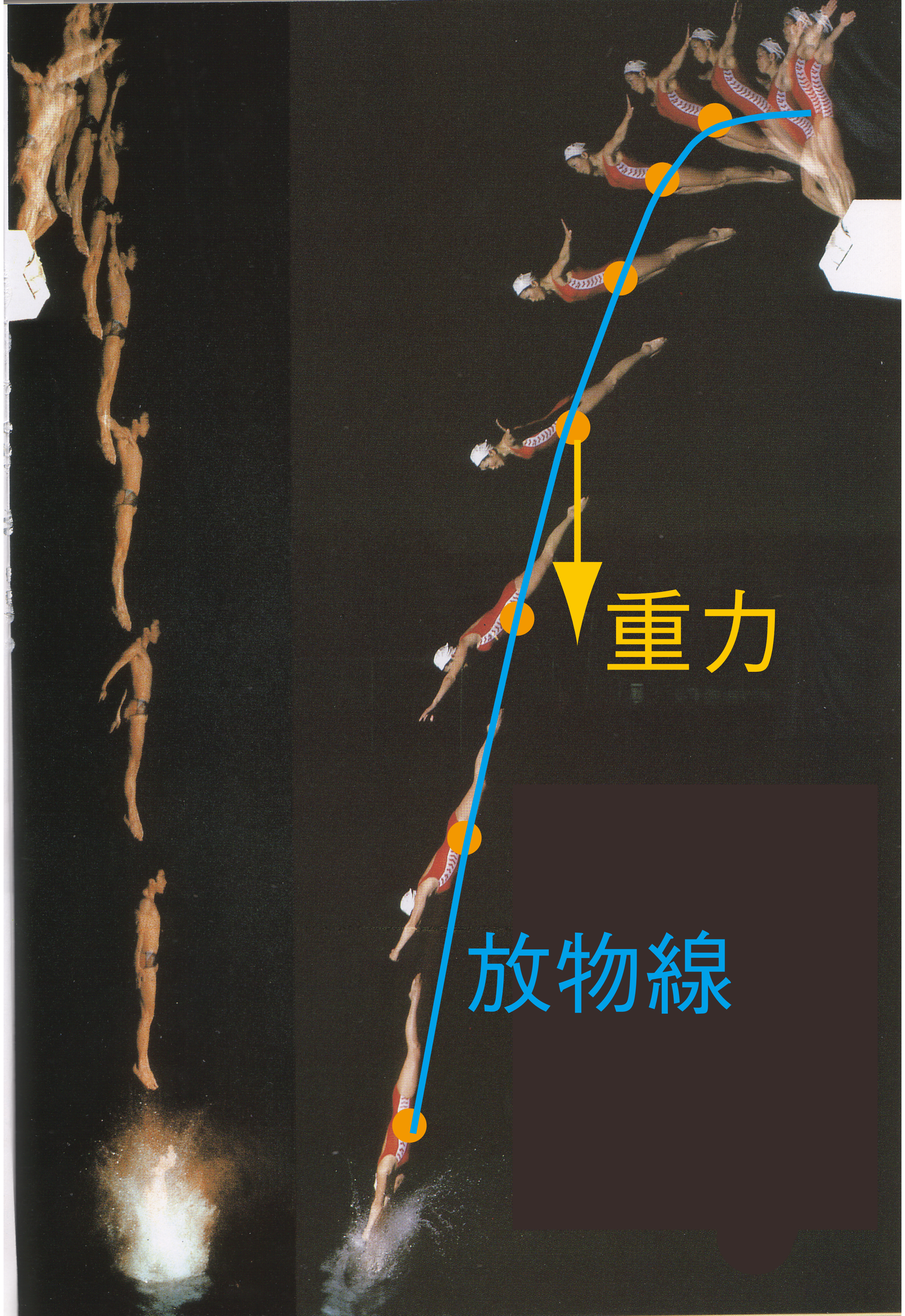
$$\frac{d^2}{dt^2}\left(m_1\vec{r}_1(t) + m_2\vec{r}_2(t) + \cdots\right) =$$

重心 $\vec{R}(t) = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{r}_1(t) + m_2\vec{r}_2(t) + \cdots\right)$

全質量 $M = m_1 + m_2 + \cdots$

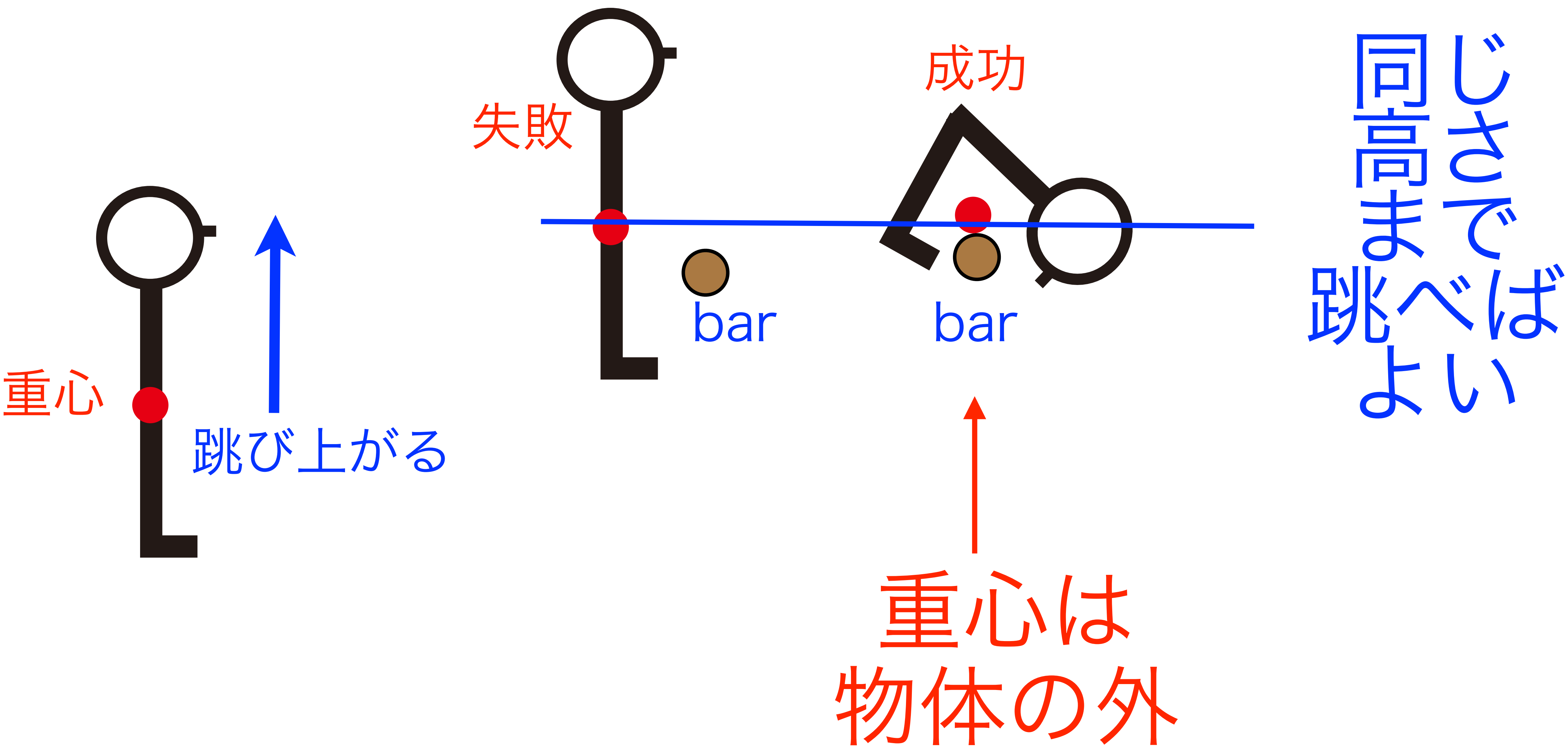
運動方程式 $M\frac{d^2\vec{R}(t)}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots$ ＝外力の和

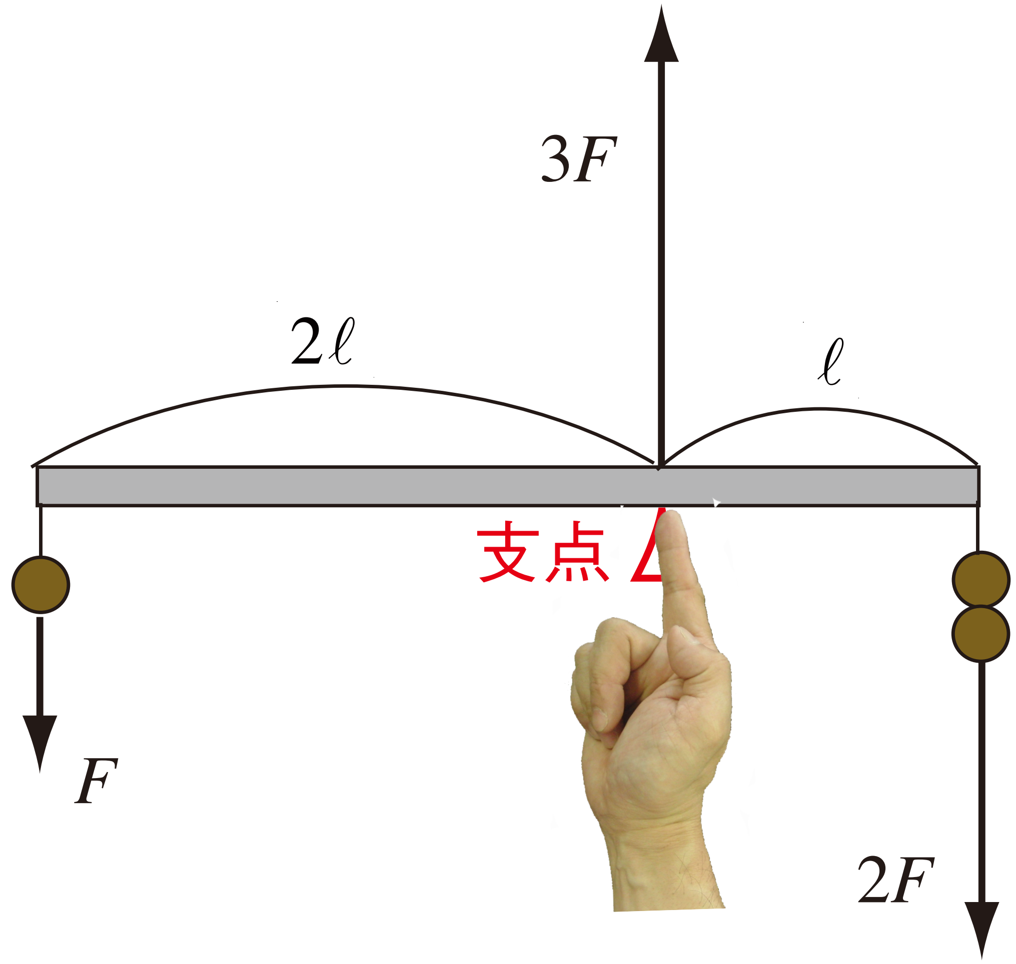
質量、外力 → 重心に集中 → 質点の運動




体の重心は
おへその位置

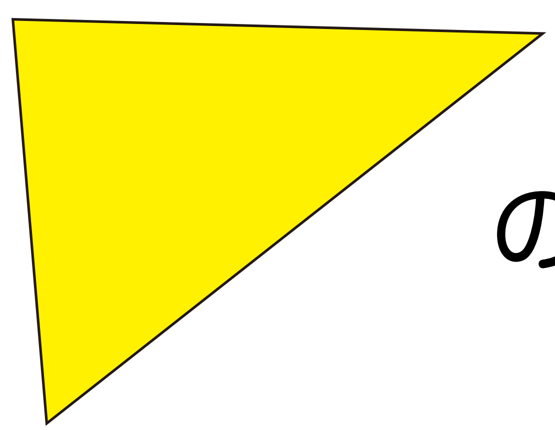
# たとえば走り高跳び

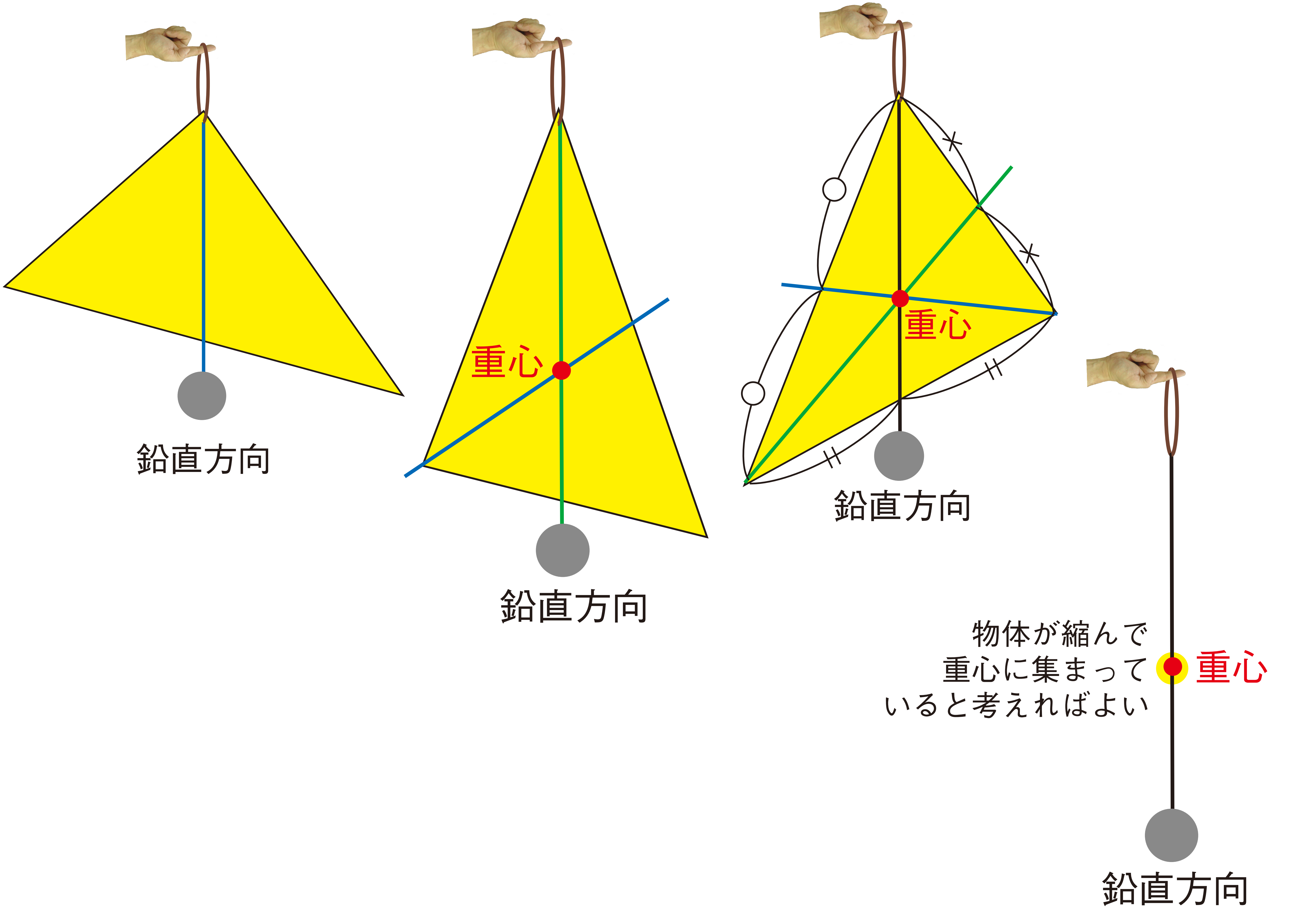





重心：支えたら全体がつり合う場所

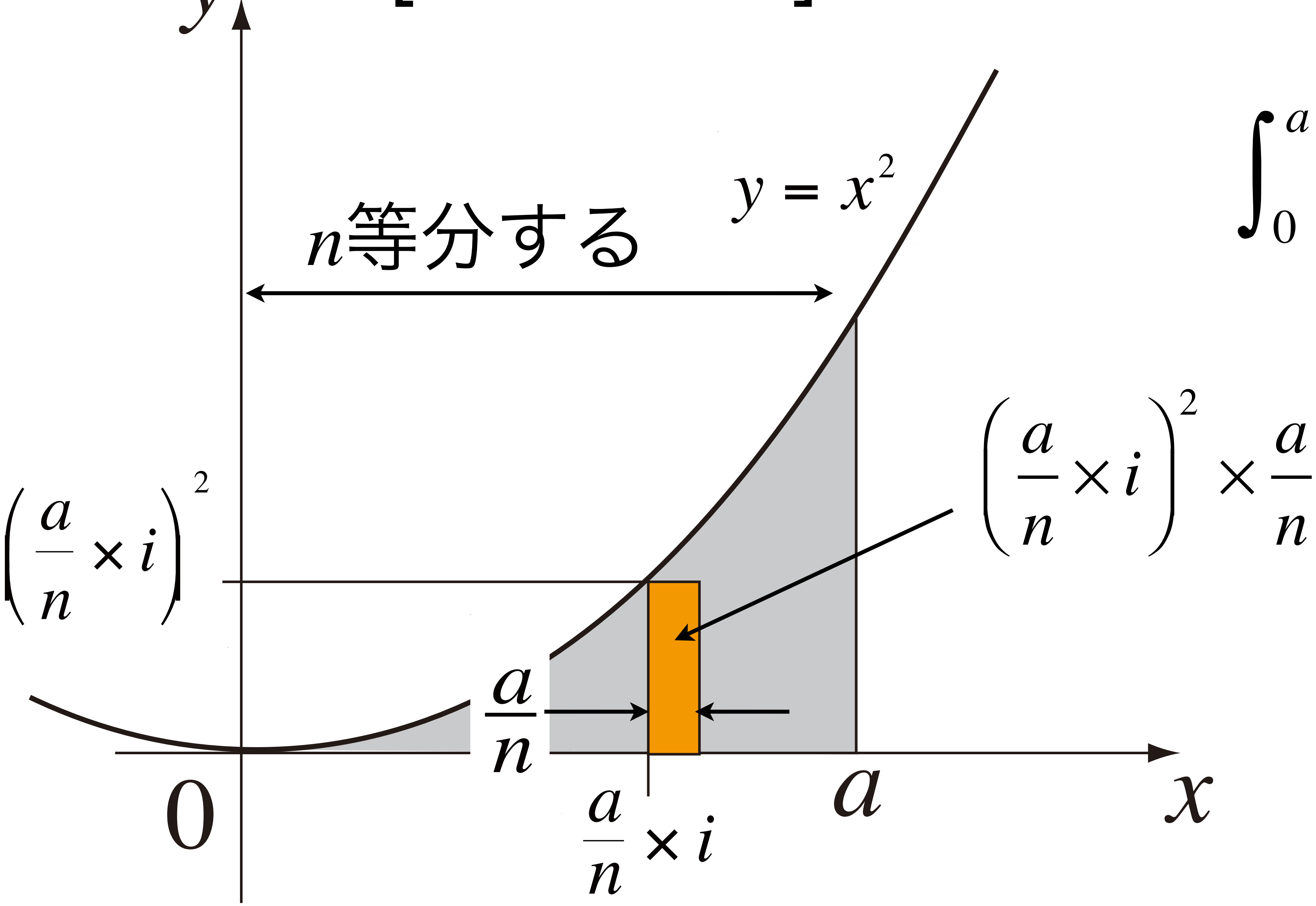
重心をさがす方法

たとえば  の重心はどこ？


鉛直方向
重心
鉛直方向
重心
鉛直方向
物体が縮んで
重心に集まって
いると考えればよい
重心
鉛直方向

# 多重積分について

# [数学の復習] 区分求積法




$$\int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3}a^3$$

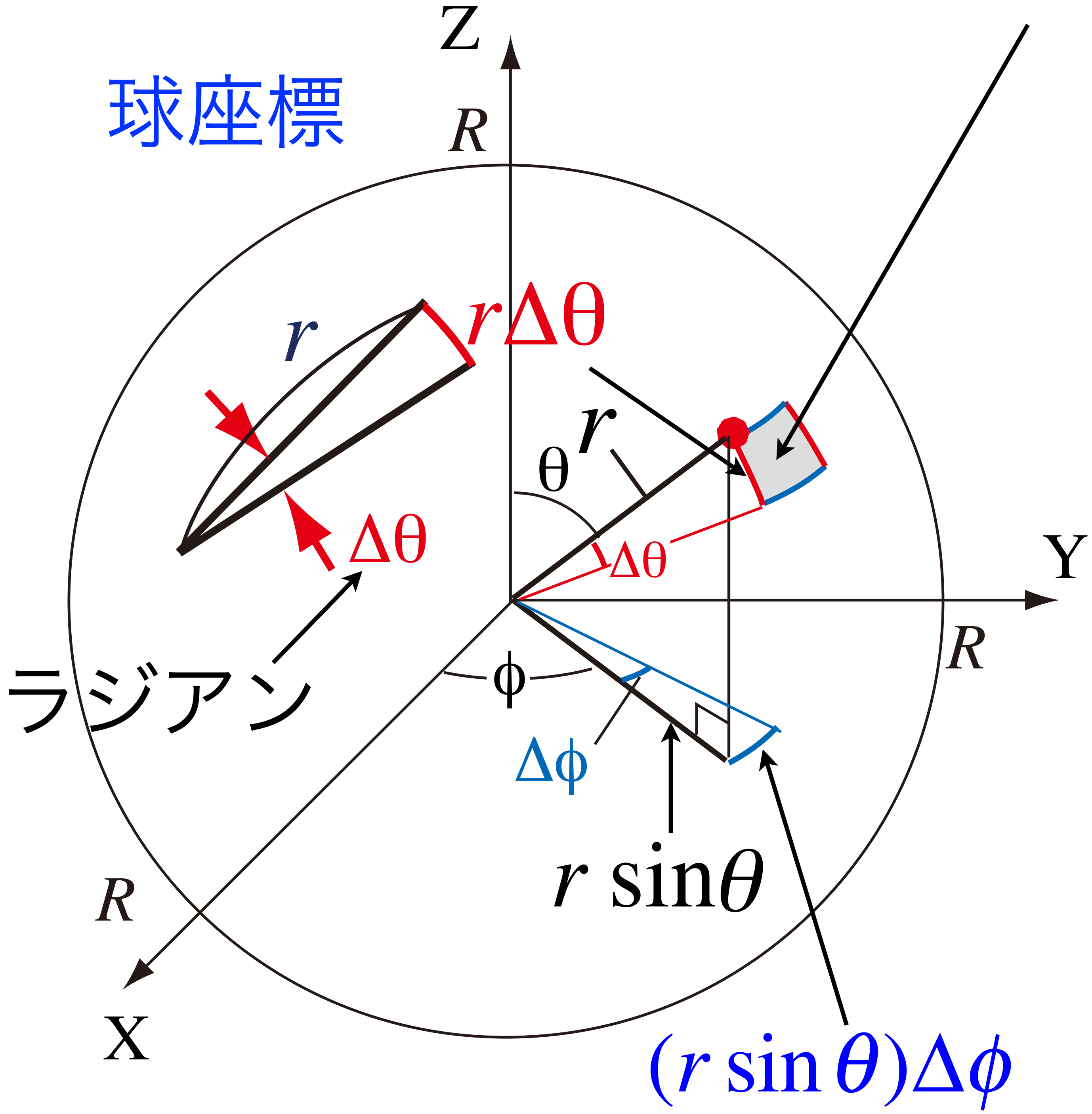
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{a}{n}\right)^3 \times i^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{n}\right)^3 \times \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$$

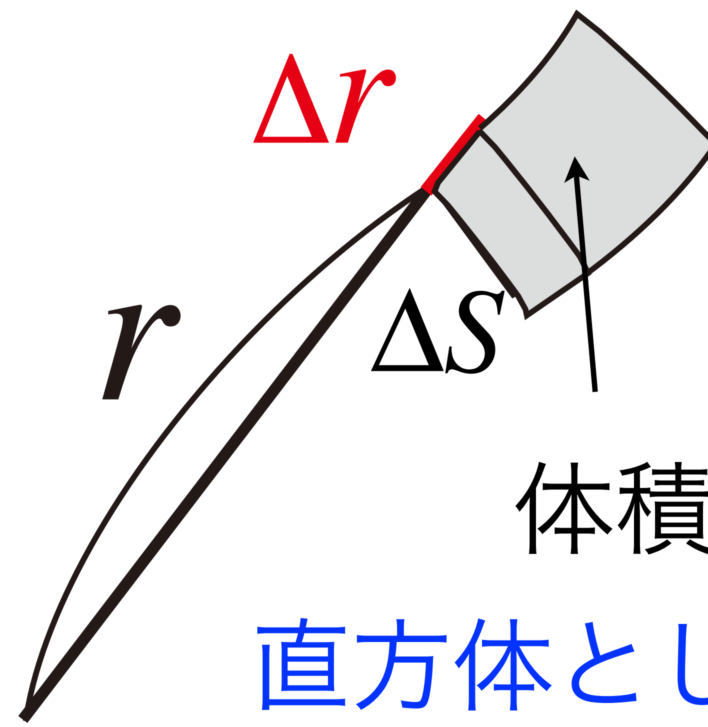
$$= \frac{1}{6}a^3 \times \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\times\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\left(2-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}a^3$$

まず球の体積 $\dfrac{4\pi}{3}R^3$

面積　長方形としてよい

$$\Delta S = (r\Delta\theta)\times(r\sin\theta\Delta\phi)$$



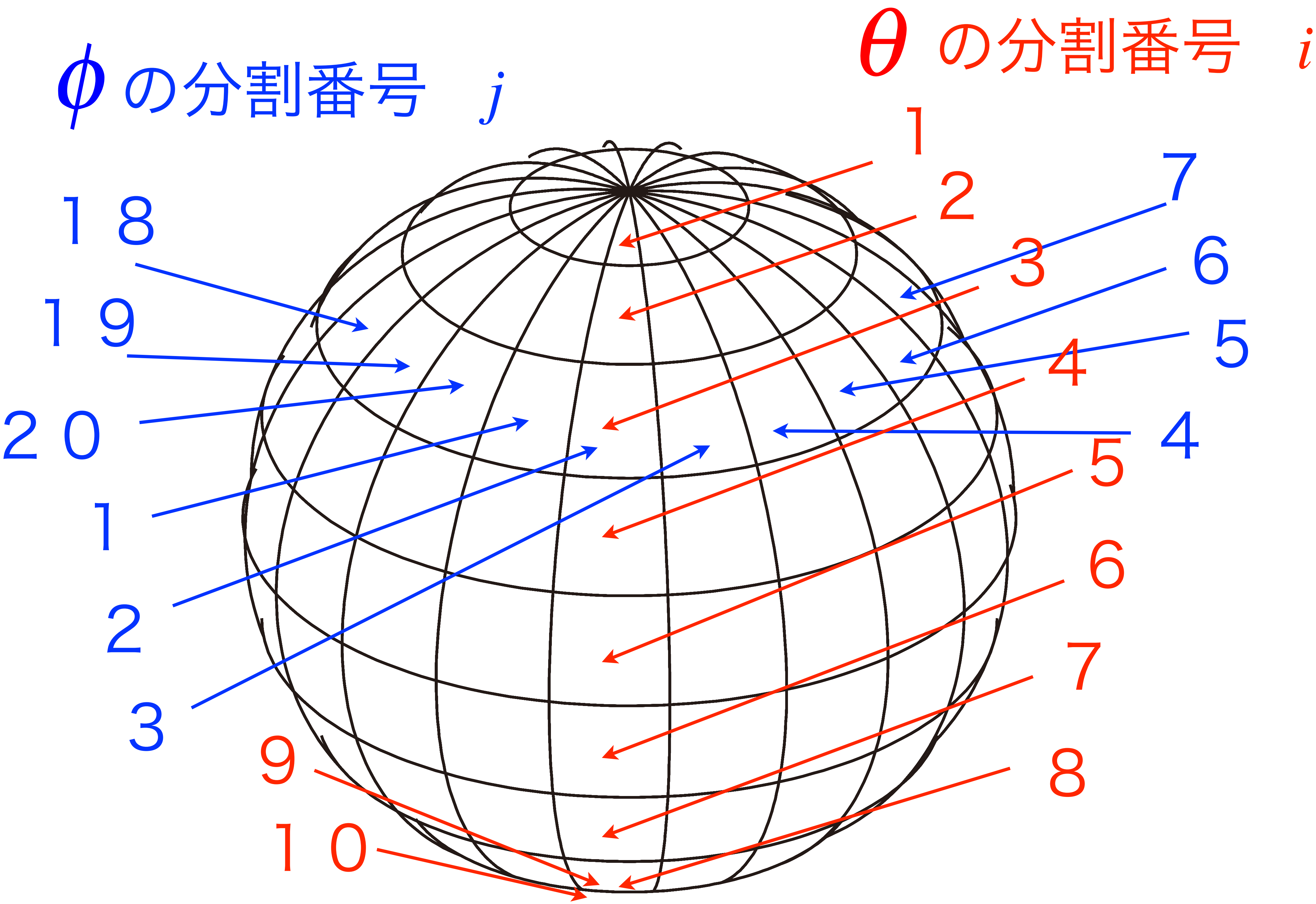

直方体としてよい

$$\Delta V = \Delta S \times \Delta r$$

$$= (r\Delta\theta)\times(r\sin\theta\Delta\phi)\times\Delta r$$

$$= (r^2\Delta r)\times(\sin\theta\Delta\theta)\times(\Delta\phi)$$

$r$ の分割　$\theta$ の分割　$\phi$ の分割



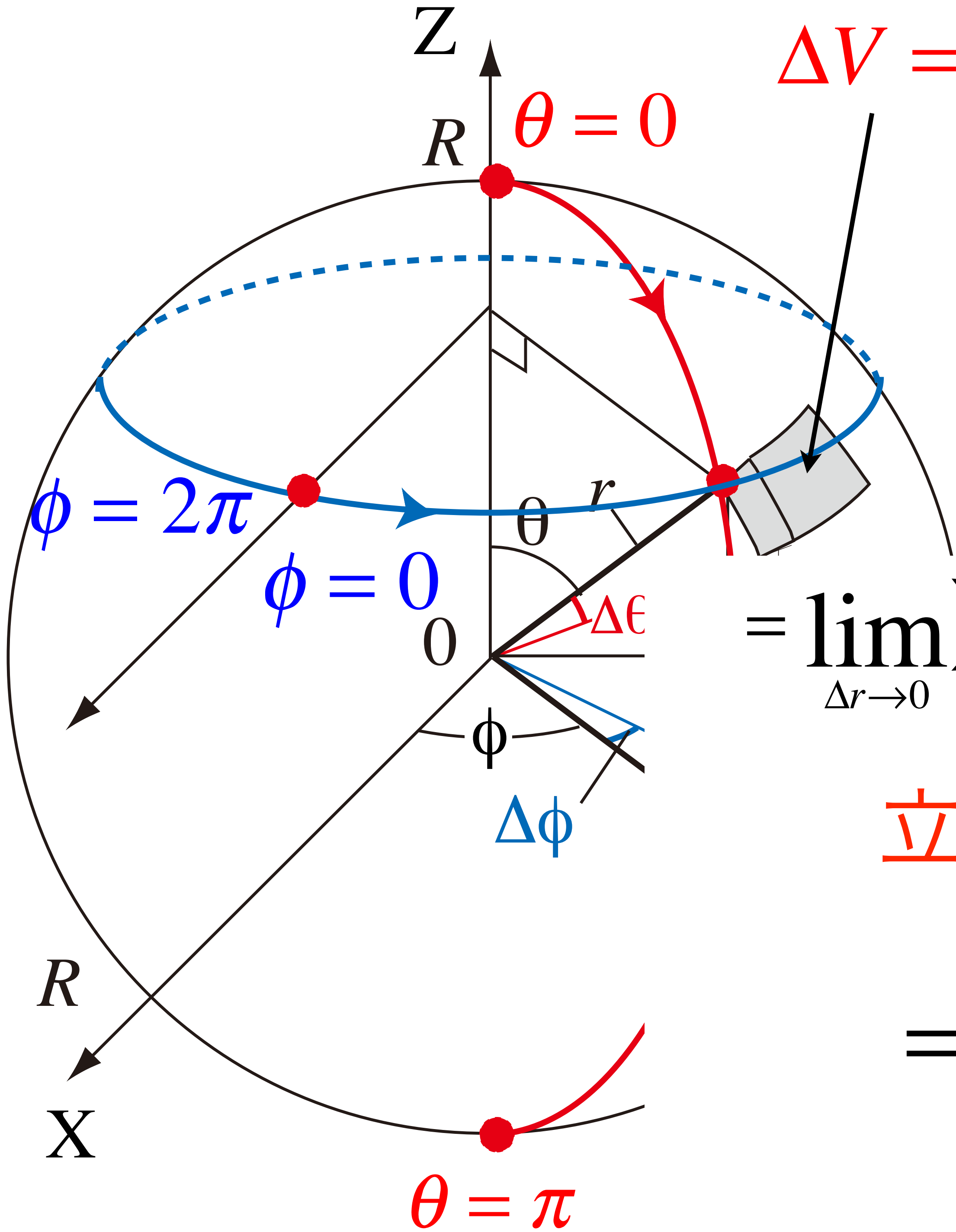

$$\sum_{\theta}\sum_{\phi}$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{20}$$

$$\sum_{r}\sum_{\theta}\sum_{\phi} \longrightarrow$$ 分割の個数を無限大 $$\longrightarrow \begin{matrix}\Delta r \to 0 \\ \Delta\theta \to 0 \\ \Delta\phi \to 0\end{matrix}$$

$$\Delta V = (r^2\Delta r)\times(\sin\theta\Delta\theta)\times(\Delta\phi)$$




球の体積 $= \displaystyle\lim_{\substack{\Delta r\to 0\\ \Delta\theta\to 0\\ \Delta\phi\to 0}} \sum_{\substack{r\text{の分割}\\ \theta\text{の分割}\\ \phi\text{の分割}}} \Delta V$

$$= \lim_{\Delta r\to 0}\sum_{r}(r^2\Delta r)\times\lim_{\Delta\theta\to 0}\sum_{\theta}(\sin\theta\Delta\theta)\times\lim_{\Delta\phi\to 0}\sum_{\phi}(\Delta\phi)$$

立体的な区分求積法

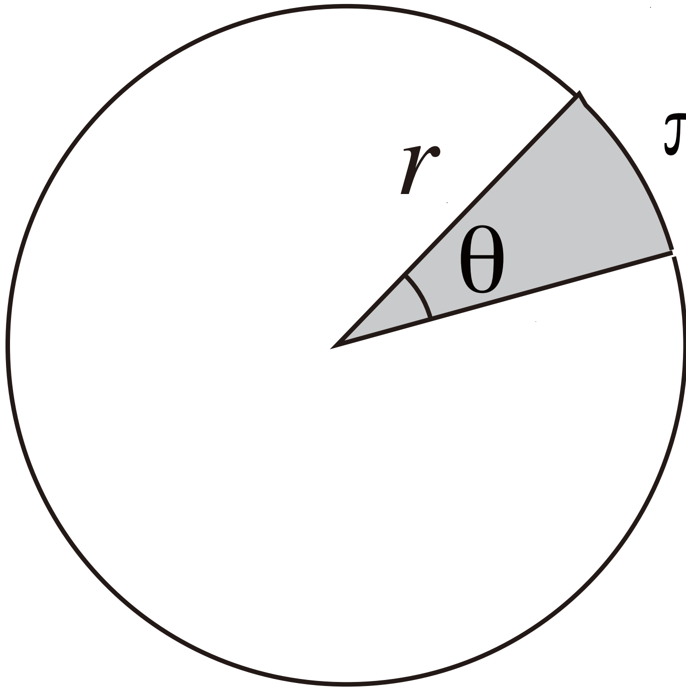
数学ノート
A-5,6

$$= \int_0^R r^2 dr \times \int_0^\pi \sin\theta d\theta \times \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= \left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^R \times \left[-\cos\theta\right]_0^\pi \times \left[\ \phi\ \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{3}R^3 \times (-(-1)+1)\times 2\pi \quad = \frac{4\pi}{3}R^3$$

# 長方形や直方体と近似してよいの？

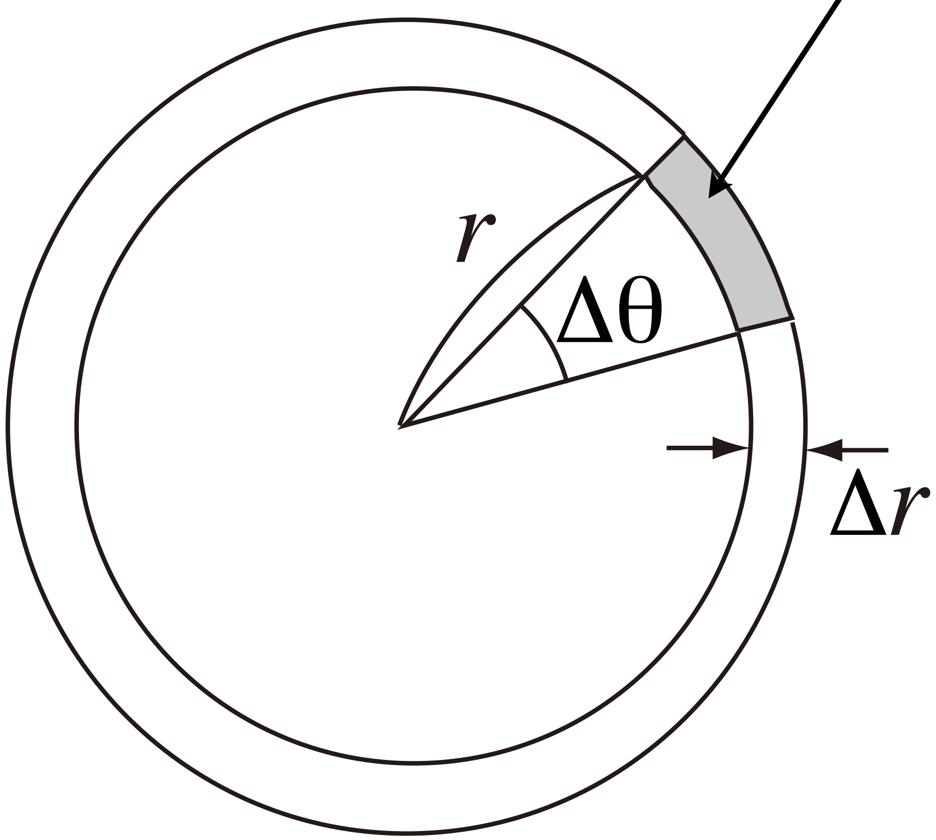


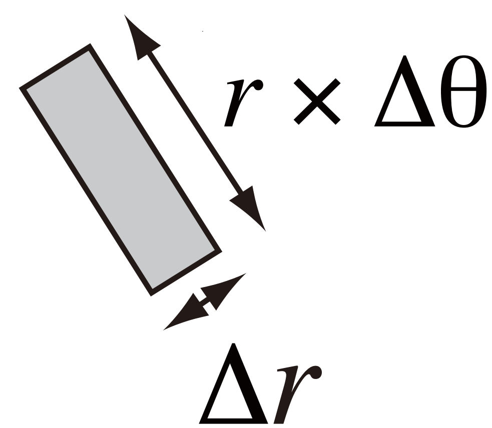

$$\pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

$$\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2 \Delta\theta - \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[ r^2 + 2r\Delta r + (\Delta r)^2 - r^2 \right] \Delta\theta$$

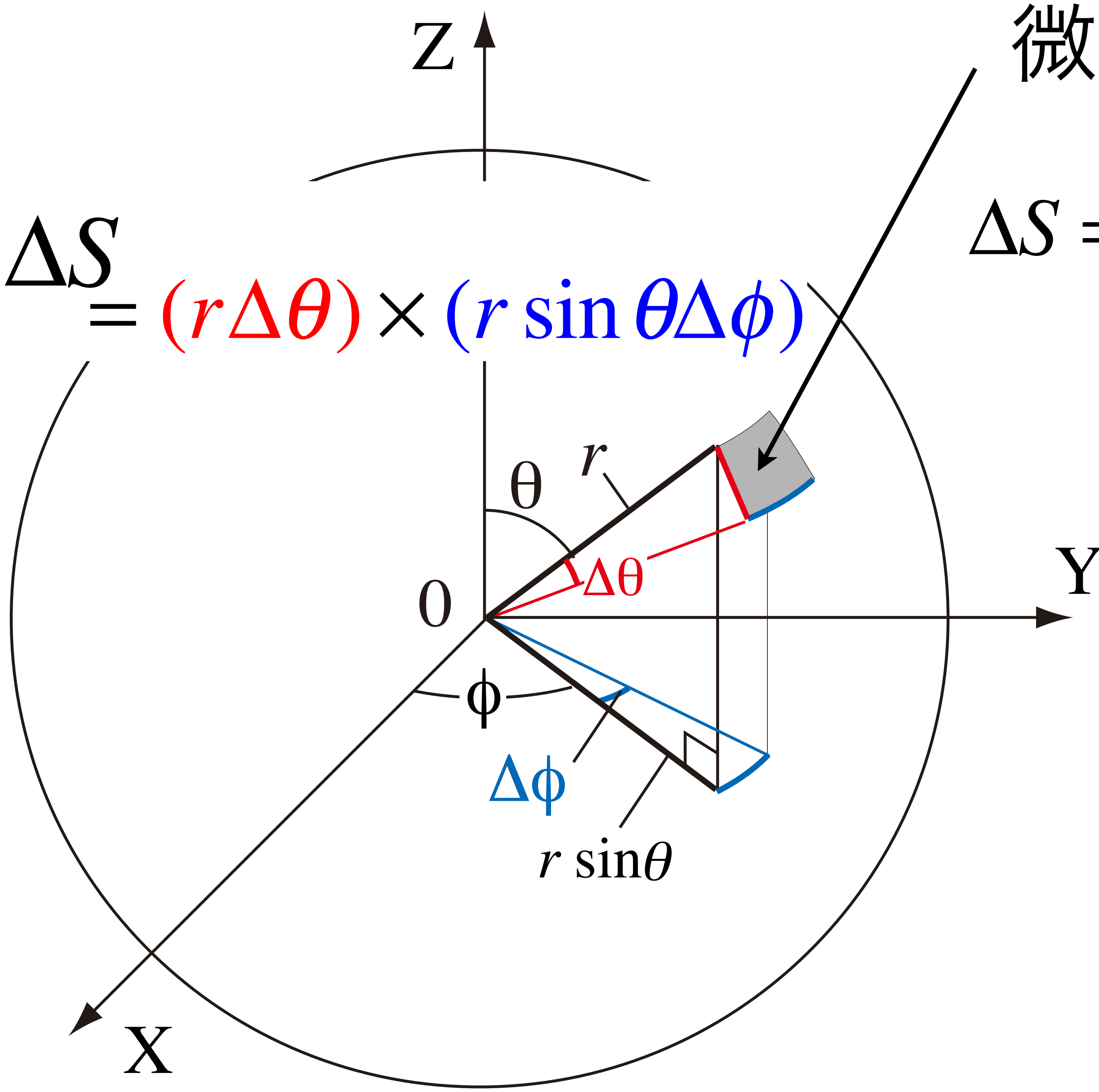
$$= r \times \Delta r \times \Delta\theta \quad + \frac{1}{2}(\Delta r)^2 \times \Delta\theta$$




Δ が１つ多い

lim の計算で
ゼロになる




$$\Delta S = (r\Delta\theta)\times(r\sin\theta\Delta\phi)$$

正確には

$$\Delta S = r^2 \times \Delta\phi \times \left[\cos\theta - \cos\left(\theta + \Delta\theta\right)\right]$$

$$\cos\theta\cos\left(\Delta\theta\right) - \sin\theta\sin\left(\Delta\theta\right)$$

$\Delta\theta \to 0$ のとき

$$\cos\left(\Delta\theta\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\Delta\theta\right)^2 + \cdots$$

$$\sin\left(\Delta\theta\right) = \Delta\theta - \frac{1}{6}\left(\Delta\theta\right)^3 + \cdots$$

$$\Delta S = r^2 \times \Delta\phi \times \left[\sin\theta \times \Delta\theta + \underbrace{\frac{1}{2}\cos\theta \times \left(\Delta\theta\right)^2 - \frac{1}{6}\sin\theta \times \left(\Delta\theta\right)^3 + \cdots}_{\text{ゼロに収束する}}\right]$$

# 球座標で $\theta = 0 \sim \pi$　$\phi = 0 \sim 2\pi$　なのはなぜ？

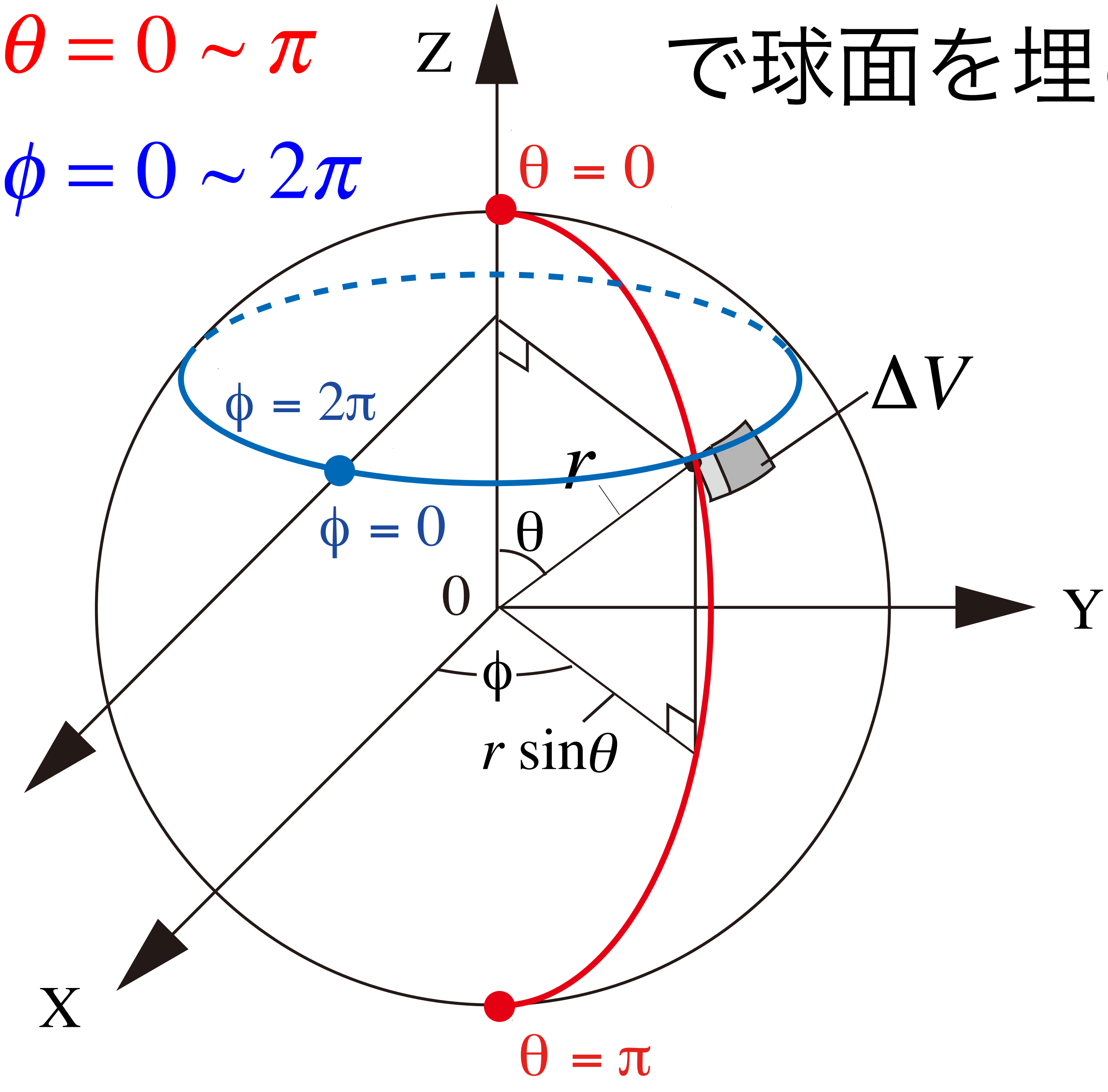
$\theta = 0 \sim \pi$

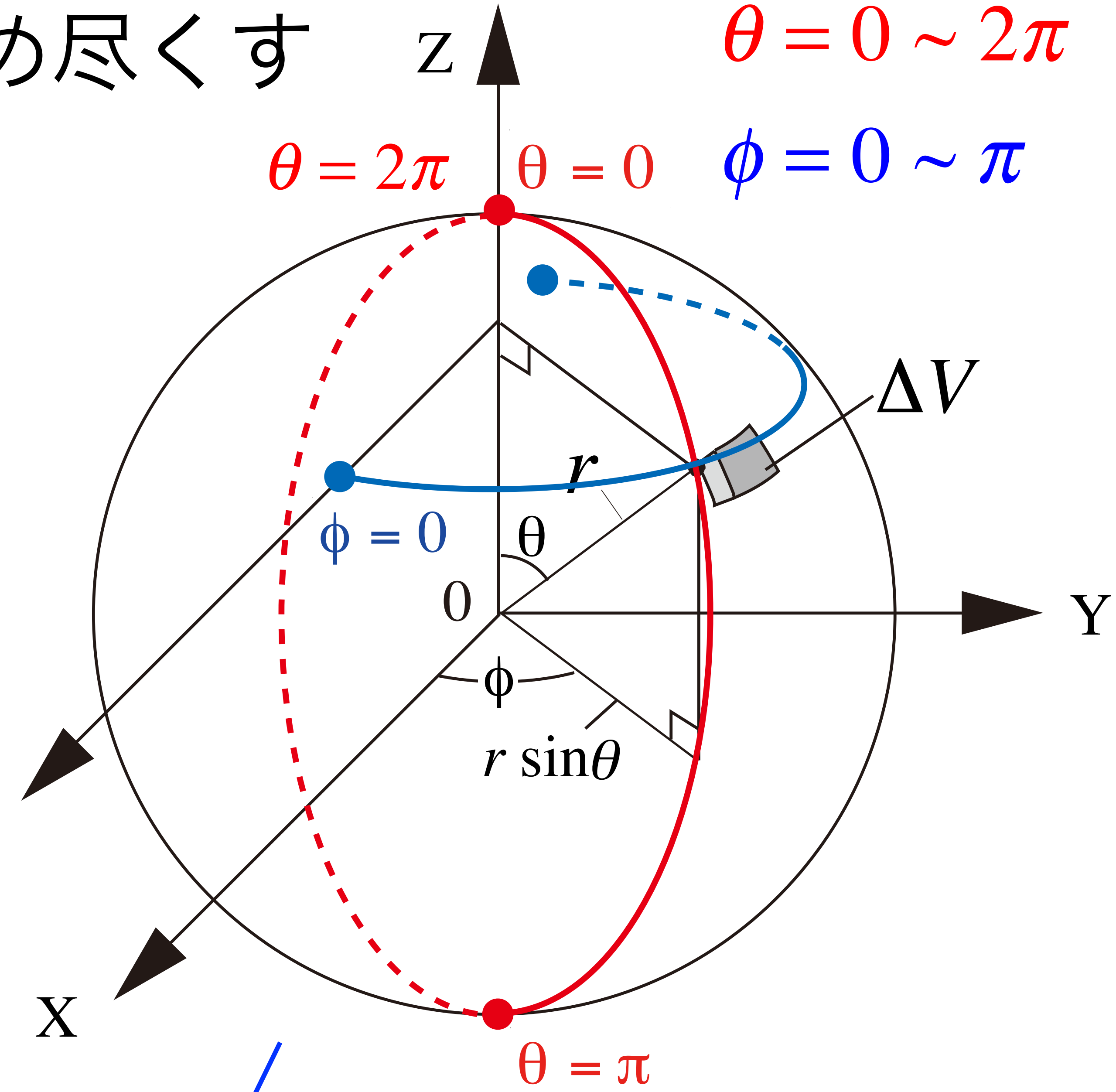
$\phi = 0 \sim 2\pi$

で球面を埋め尽くす

$\theta = 0 \sim 2\pi$

$\phi = 0 \sim \pi$




どっちでも良いが　$|\sin\theta|$　とする必要がある

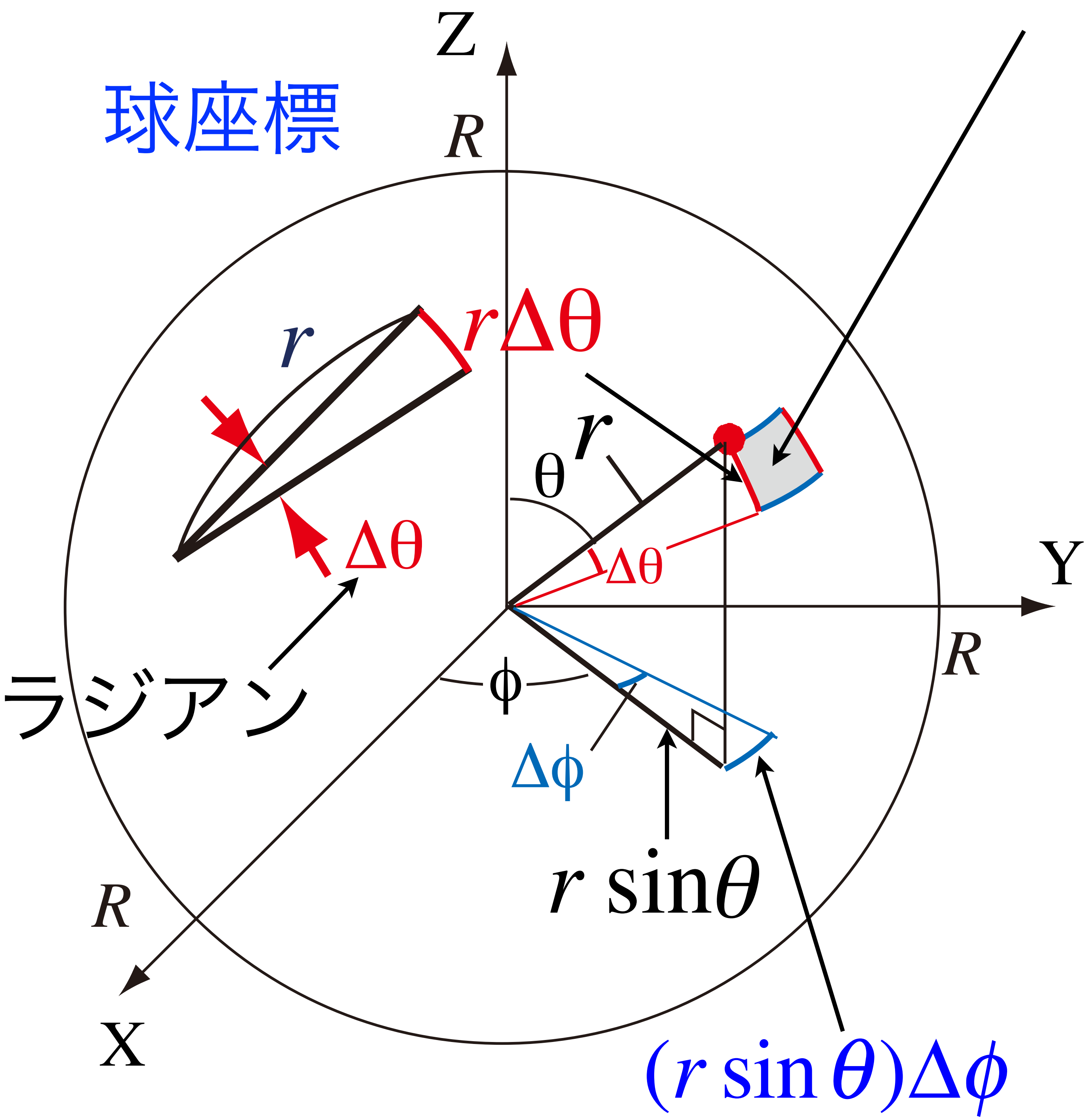
微小体積　$\Delta V = r^2 \sin\theta \times \Delta r \times \Delta\theta \times \Delta\phi$

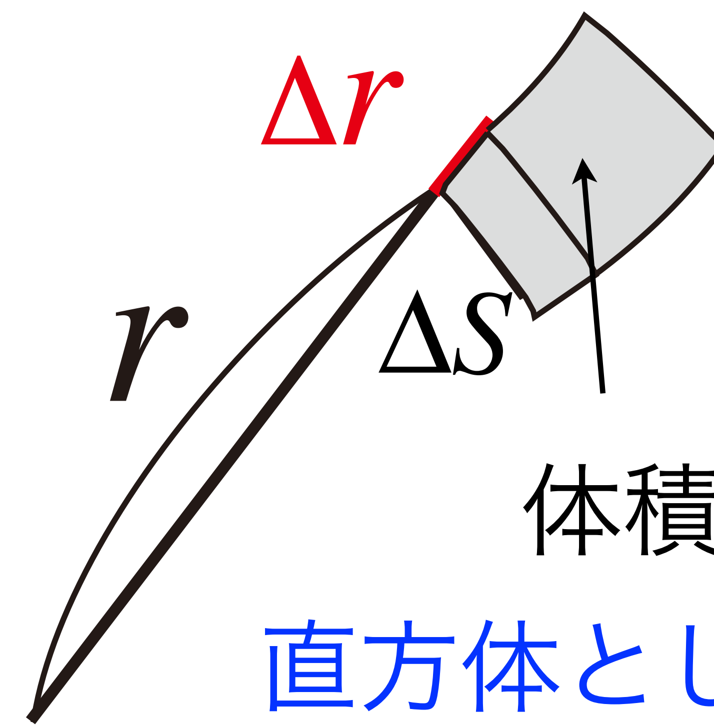
まず球の体積 $\dfrac{4\pi}{3}R^3$

面積　長方形としてよい

$$\Delta S=(r\Delta\theta)\times(r\sin\theta\Delta\phi)$$

球座標




直方体としてよい

$$\Delta V=\Delta S\times\Delta r$$

$$=(r\Delta\theta)\times(r\sin\theta\Delta\phi)\times\Delta r$$

$$=(r^2\Delta r)\times(\sin\theta\Delta\theta)\times(\Delta\phi)$$

球の体積 $= \int_0^R r^2 dr \times \int_0^\pi \sin\theta d\theta \times \int_0^{2\pi} d\phi$

まとめて

微小体積 $dV$

$$= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \boxed{r^2 \sin\theta \; dr \; d\theta \; d\phi}$$

３重積分

と書く

もっと簡単に

$$= \iiint dV$$

$$\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$ という順番に書くのか

$$= \int_0^R r^2 dr \times \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \times \int_0^{2\pi} d\phi$$

と計算できない場合もある

$$\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \, d\phi \, d\theta \, dr$$ と書いた方が分かりやすい

これは $$\int_0^R \left( \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \, d\phi \right) d\theta \right) dr$$ という意味

積分範囲が他の変数と無関係ならば

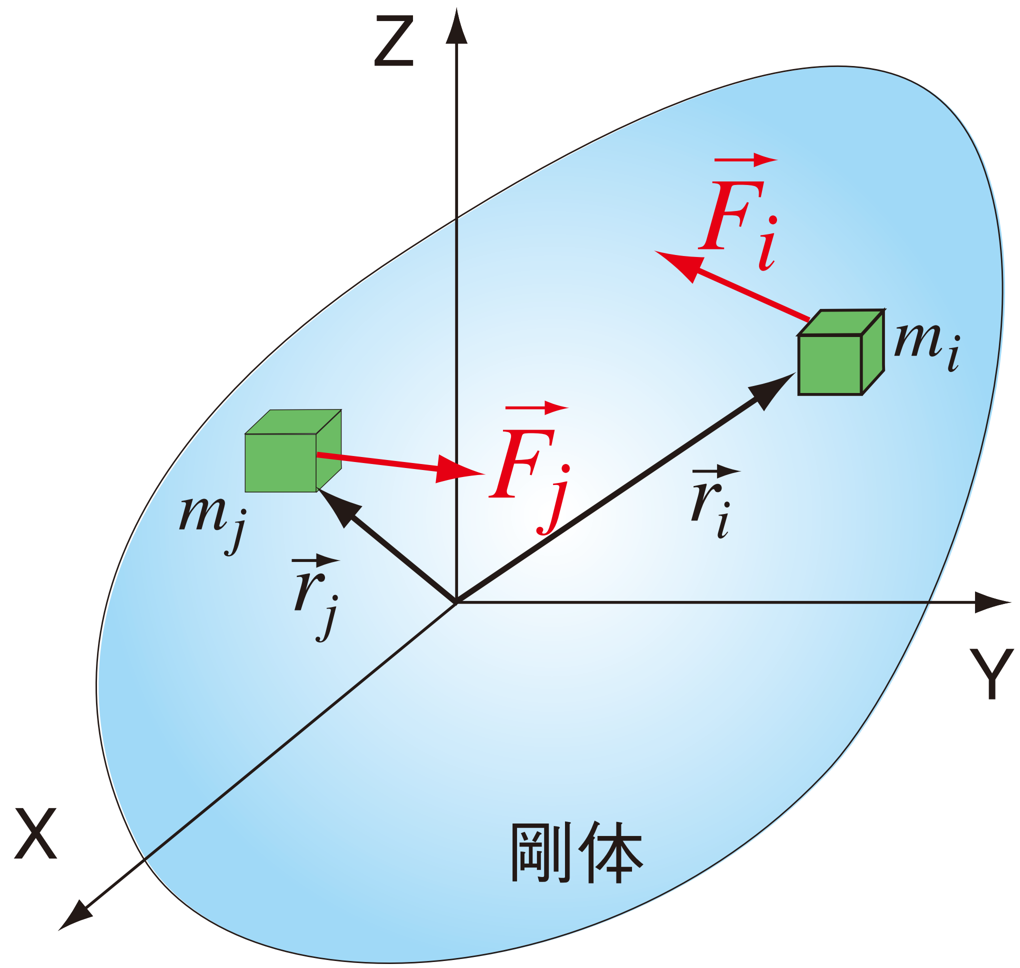
順序を変えて $$\int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \left( \int_0^R r^2 \sin\theta \, dr \right) d\theta \right) d\phi$$

とやっても答えは同じ！

# 重心の求め方

# 2.1 重心とその運動






運動方程式

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1(t)}{dt^2} + m_2 \frac{d^2\vec{r}_2(t)}{dt^2} + \cdots$$

$$= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots$$

外力のみ

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(m_1\vec{r}_1(t) + m_2\vec{r}_2(t) + \cdots\right)$$

重心　$\vec{R}(t) = \dfrac{1}{M}\left(m_1\vec{r}_1(t) + m_2\vec{r}_2(t) + \cdots\right)$

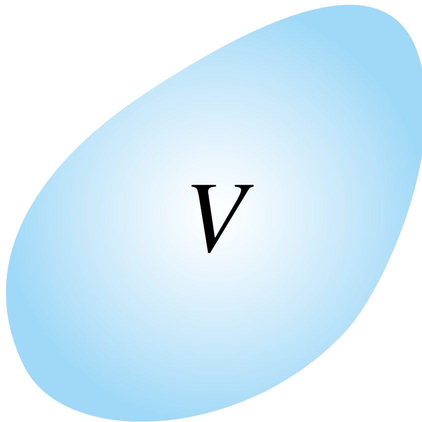
全質量　$M = m_1 + m_2 + \cdots$

運動方程式　$M\dfrac{d^2\vec{R}(t)}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots$　＝外力の和

質量、外力 → 重心に集中 → 質点の運動

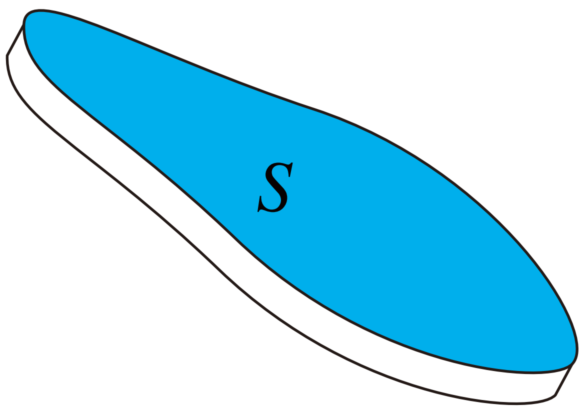
密度について

□体積密度



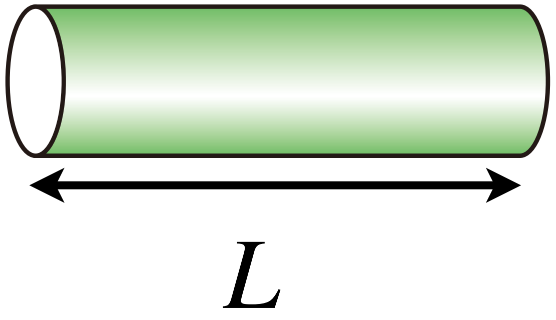

$$\rho = \frac{M}{V} \quad \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]$$

□面積密度　　厚さが一様な物体



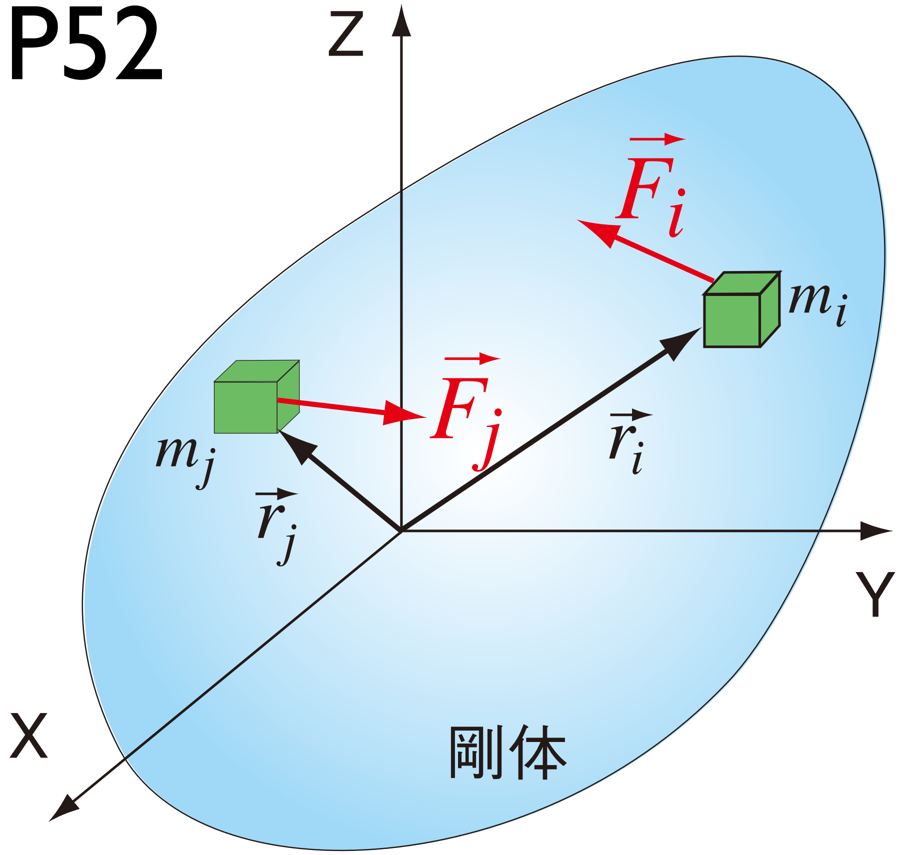

$$\sigma = \frac{M}{S} \quad \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2}\right]$$

□線密度　　太さが一様な物体




$$\lambda = \frac{M}{L} \quad \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}\right]$$

P52



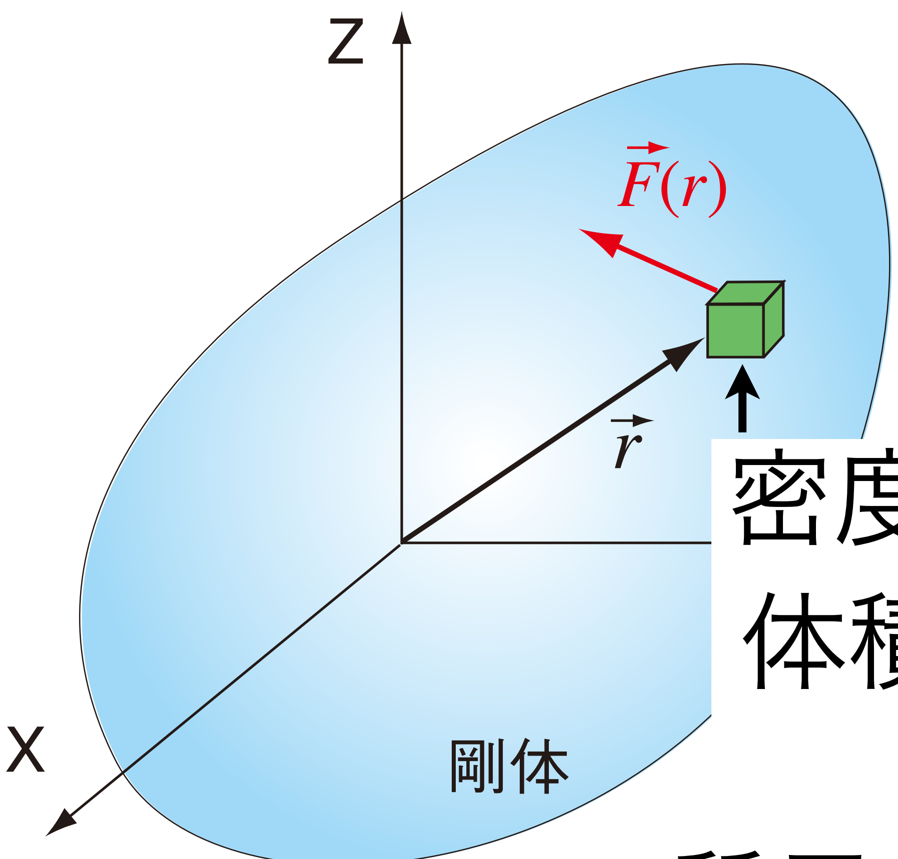

重心 $\vec{R}(t) = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{r}_1(t) + m_2\vec{r}_2(t) + \cdots\right)$

全質量 $M = m_1 + m_2 + \cdots$

分割を細かくする $N \to \infty$

$$M = m_1 + m_2 + \cdots \longrightarrow \iiint \rho(\vec{r})dV$$

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots \longrightarrow \iiint \rho(\vec{r})\times\vec{r}\ dV$$



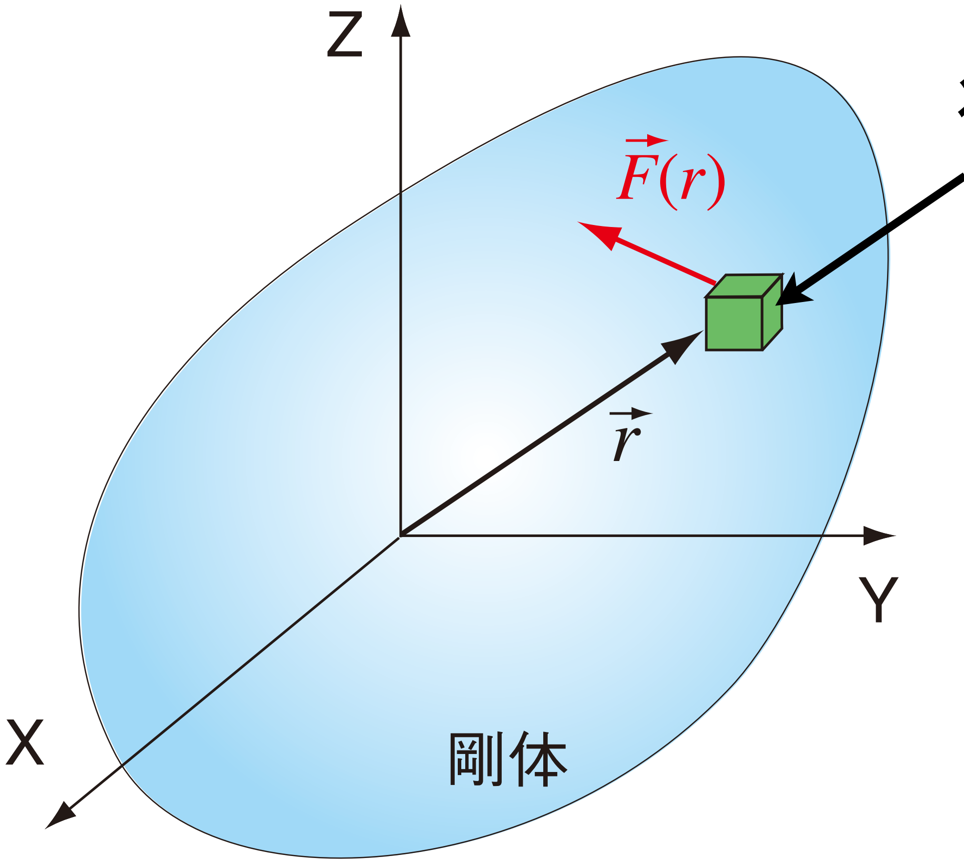

密度 $\rho(\vec{r})$ したがって

体積 $dV$

$dxdydz$

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\iiint \rho(\vec{r})\times\vec{r}\ dV$$

質量 $\rho(\vec{r})\times dV$




微小体積 $dV$

密度 $\rho(\vec{r})$ 場所によって密度が変わるかもしれない

$$\rho(x,y,z)$$

重心を表す位置ベクトル $\vec{R} = \dfrac{1}{M}\iiint \rho(\vec{r}) \times \vec{r}\ dV$

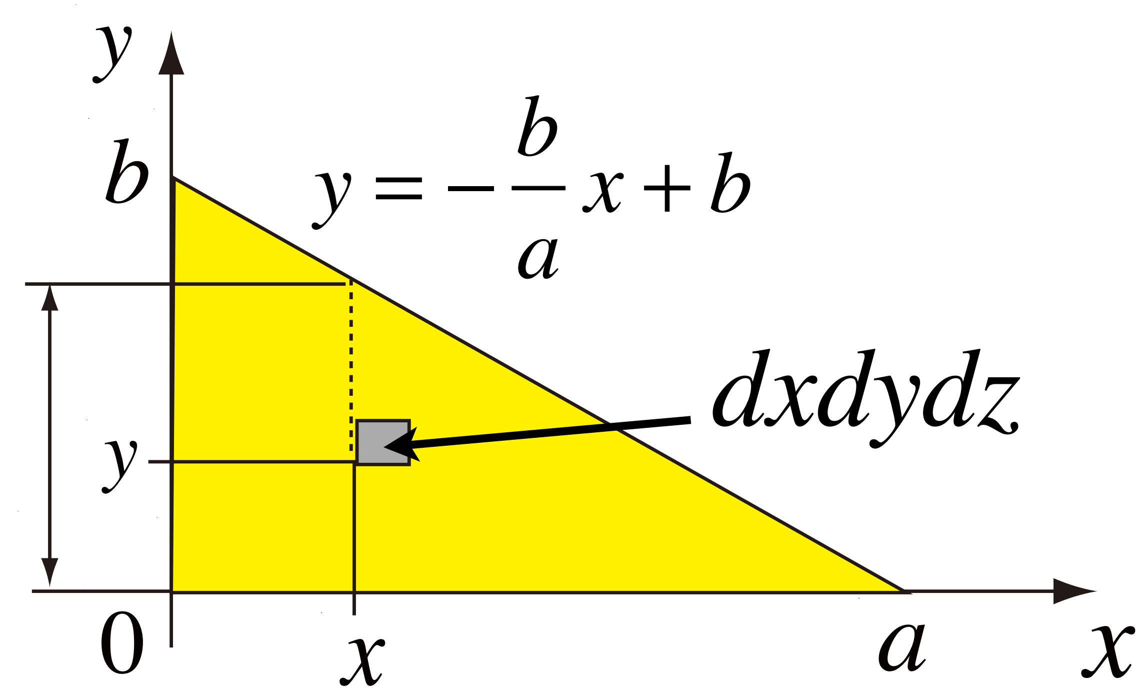
重心の $x$ 座標 $R_x = \dfrac{1}{M}\iiint \rho(x,y,z)\ x\ dV$

重心の $y$ 座標 $R_y = \dfrac{1}{M}\iiint \rho(x,y,z)\ y\ dV$

重心の $z$ 座標 $R_z = \dfrac{1}{M}\iiint \rho(x,y,z)\ z\ dV$

# 三角形の重心

厚さ $d$




$0 \sim -\frac{b}{a}x + b$

$$\vec{R} = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3}\right)$$

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\iiint \rho(\vec{r}) \times \vec{r}\ dV$$

厚さ

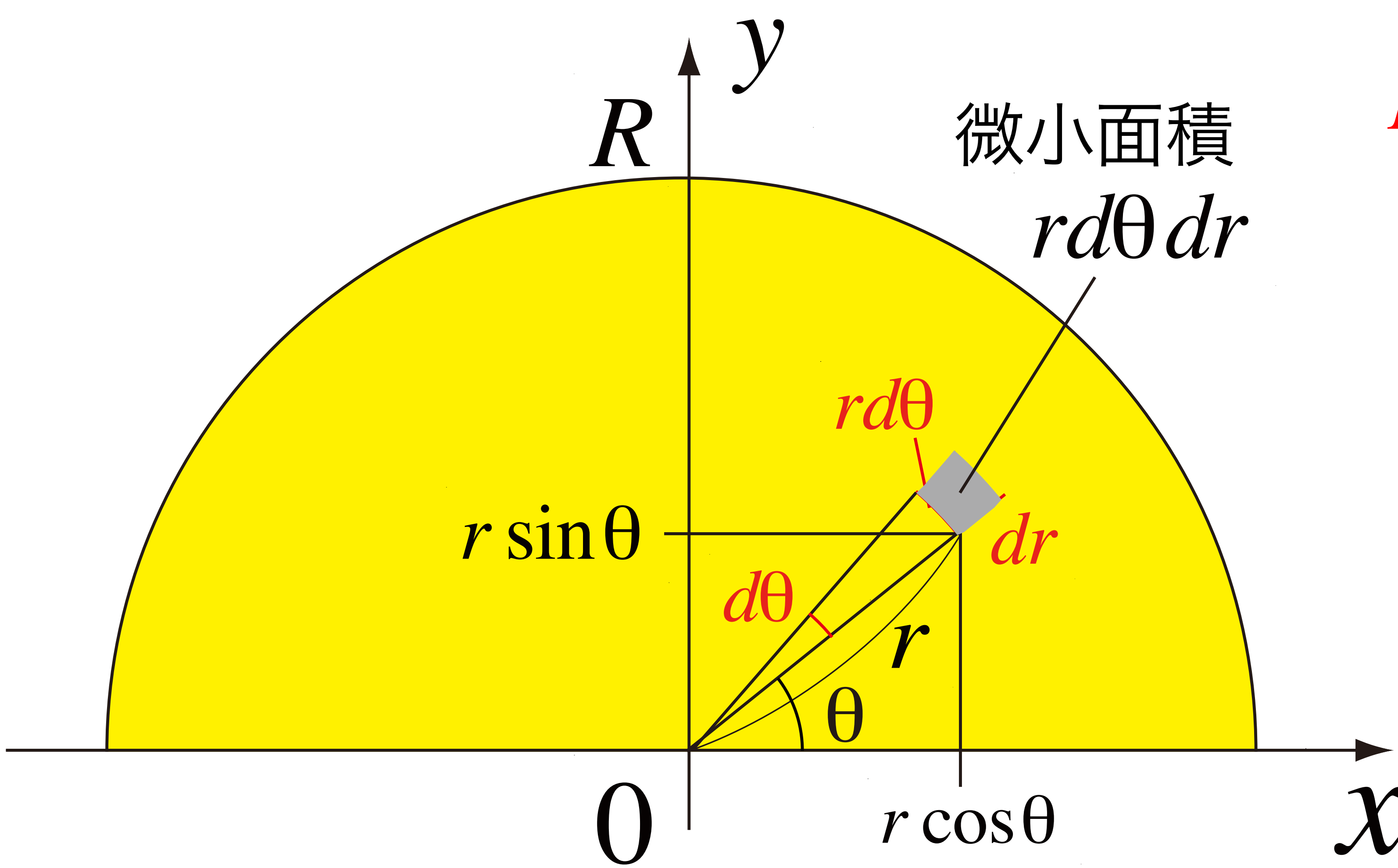
$\frac{M}{S\cancel{d}}$

面積密度でOK

$$R_x = \frac{1}{M}\int_0^a \int_0^{-\frac{b}{a}x+b} \int_0^d \rho \times x\ dzdydx = \frac{\rho}{M}\int_0^a \int_0^{-\frac{b}{a}x+b} x \times \cancel{[z]_0^d}\ dydx$$

$$= \frac{1}{S}\int_0^a x \times [y]_0^{-\frac{b}{a}x+b}\ dx = \frac{1}{S}\int_0^a \left(-\frac{b}{a}x^2 + bx\right)dx$$

$$= \frac{1}{S}\left[-\frac{1}{3}\frac{b}{a}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^a = \frac{1}{S}\left(-\frac{1}{3}ba^2 + \frac{1}{2}ba^2\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}ab}\frac{1}{6}ba^2 = \frac{1}{3}a$$




$$\vec{R} = \frac{1}{M}\iiint \rho(\vec{r}) \times \vec{r}\ dV$$

$R_x = 0$ 確かめてみよ

密度

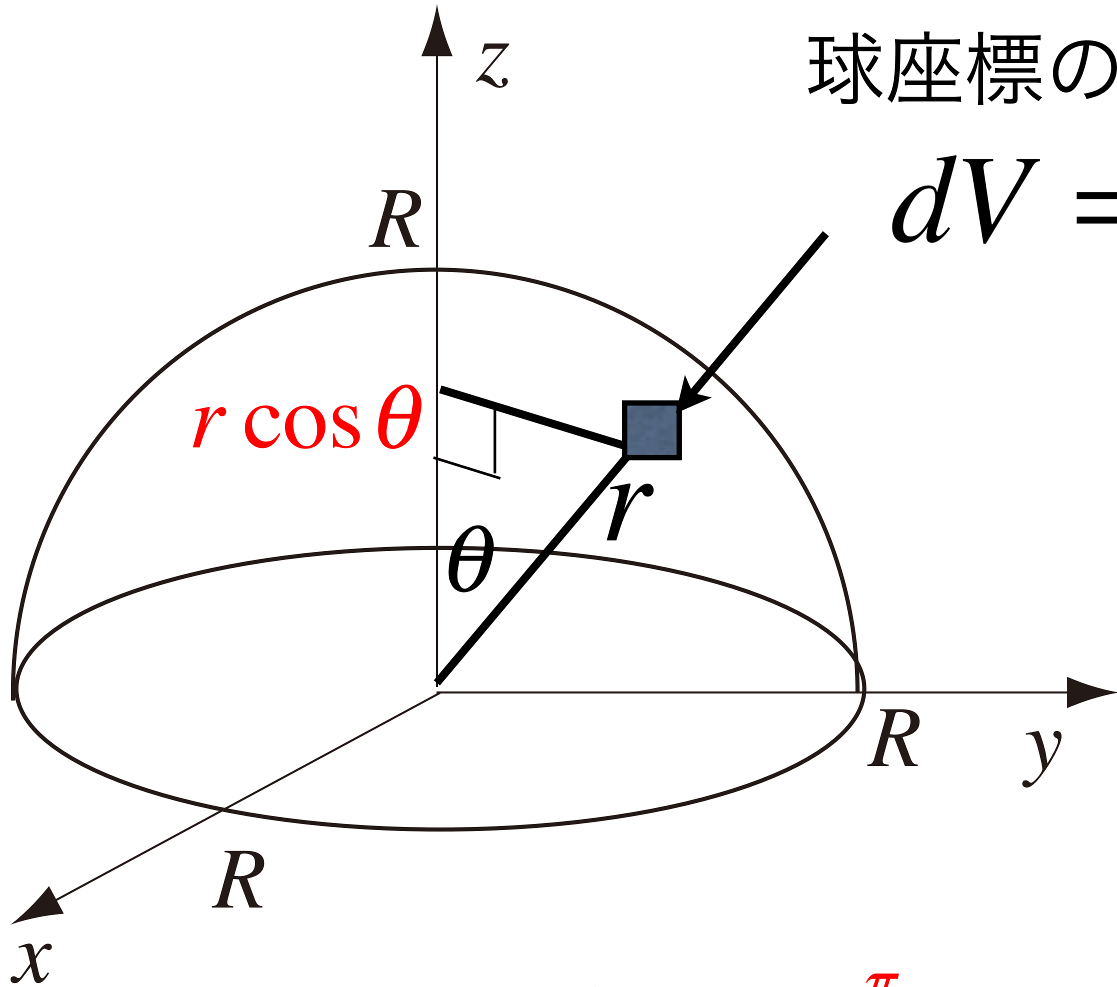
$$\rho_{体} = \frac{M}{\frac{1}{2}\pi R^2 \times d_{厚さ}}$$

$$\rho_{面} = \frac{M}{\frac{1}{2}\pi R^2}$$

$$R_y = \frac{1}{M}\int_0^R \int_0^\pi \rho_{面} \times r \overbrace{\sin\theta}^{y} \times r d\theta dr$$

$$= \frac{1}{M} \times \frac{M}{\frac{1}{2}\pi R^2} \times \left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^R \times \left[-\cos\theta\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi R^2} \times \frac{1}{3}R^3 \times 2$$

$$= \frac{4}{3\pi}R = 0.42\,R$$




球座標の微小体積

$$dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$$

$$M = \rho \times \frac{2}{3}\pi R^3$$

$$R_x = R_y = 0$$

球座標の微小質量

$$R_z = \frac{1}{M}\int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \underset{r\cos\theta}{z} \boxed{\rho r^2 \sin\theta \; dr \; d\theta \; d\phi}$$

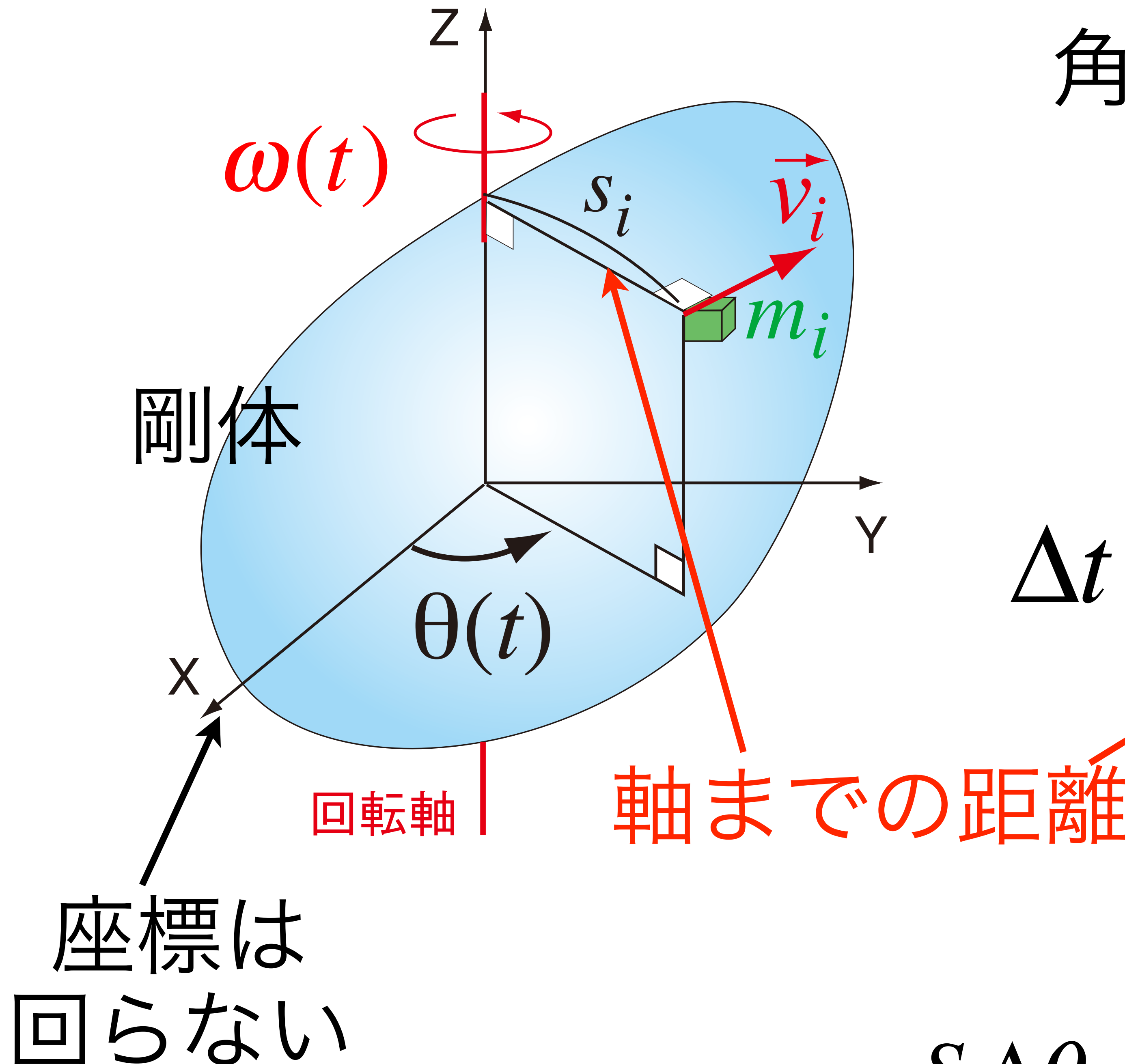
$$= \frac{\rho}{M} \times \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^R \times \left[-\frac{1}{4}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \times [\phi]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3} \times \frac{1}{4}R^4 \times \frac{1}{2} \times 2\pi = \frac{3}{8}R$$

剛体の回転運動

回転の運動エネルギー

# 2.2 回転の運動エネルギーと慣性モーメント




角度の変化率

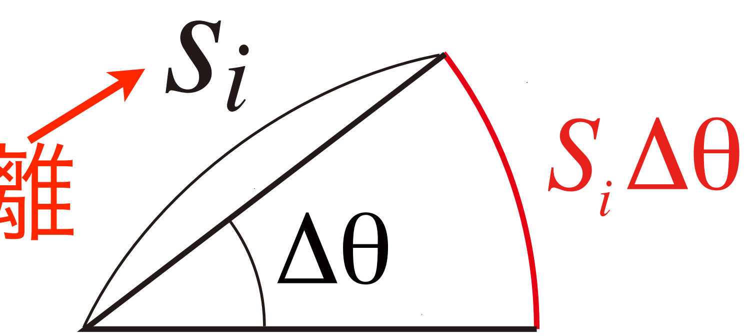
$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega(t) \quad \text{[rad/s]}$$

角速度

位置　速度

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$$

$\Delta t$ で $\Delta\theta$（ラジアン）まわる




移動距離

速さ $v_i = \dfrac{S_i\Delta\theta}{\Delta t} \longrightarrow S_i\dfrac{d\theta(t)}{dt} = S_i\omega(t)$

# 回転の運動エネルギー



$$K = \frac{1}{2}m_1 v_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2{}^2 + \cdots \longrightarrow K = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$v_i = S_i\omega(t)$$

$$= \frac{1}{2}m_1(S_1\omega)^2 + \frac{1}{2}m_2(S_2\omega)^2 + \cdots$$

$$= \frac{1}{2}\underline{\left(\sum_i m_i S_i{}^2\right)}\omega^2$$

物体の形で決まる

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

と似ている

慣性モーメント $I = \sum_i m_i S_i{}^2$

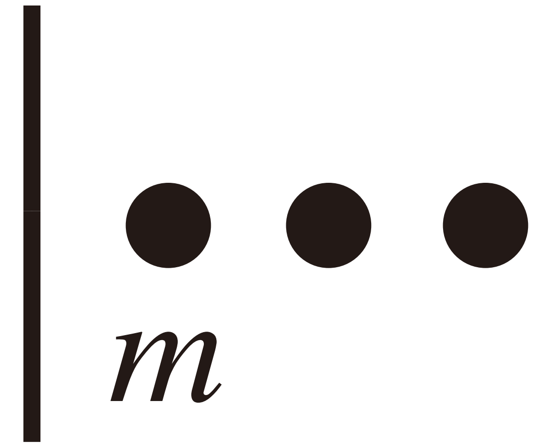
$m_i$ から軸までで長さ

# 慣性モーメント

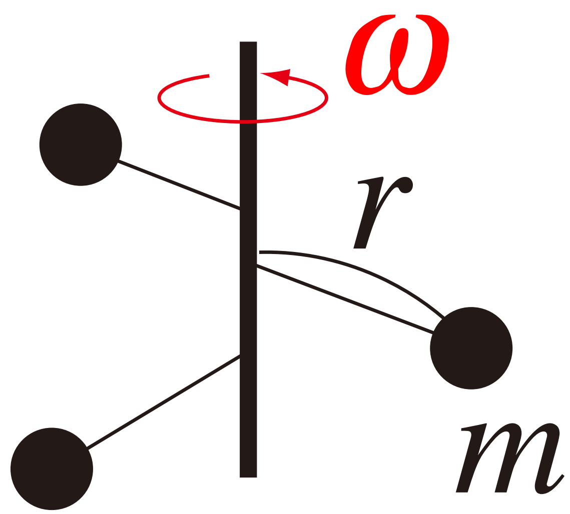
能率

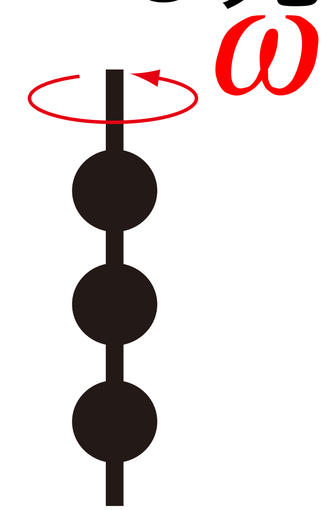
$$I=\sum_i m_i S_i^2$$

パーツ




だんご３兄弟




$$I=3mr^2$$

$$I\simeq 0$$

回転の
エネルギー

$$K=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{3}{2}mr^2\omega^2$$

$$K\simeq 0$$

回すのが大変
止めるのが大変

回すのが簡単
止めるのが簡単



回転のエネルギー　　慣性モーメント

$\omega_1$

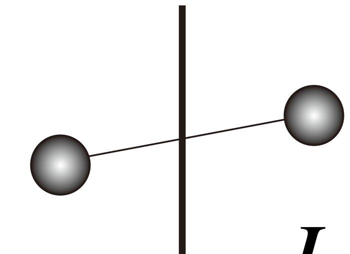
$\wedge$

$\omega_2$

$$\frac{1}{2} I_1 \omega_1^{\;2}$$

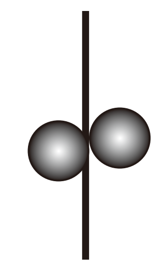
$\parallel$ エネルギー保存則

$$\frac{1}{2} I_2 \omega_2^{\;2}$$



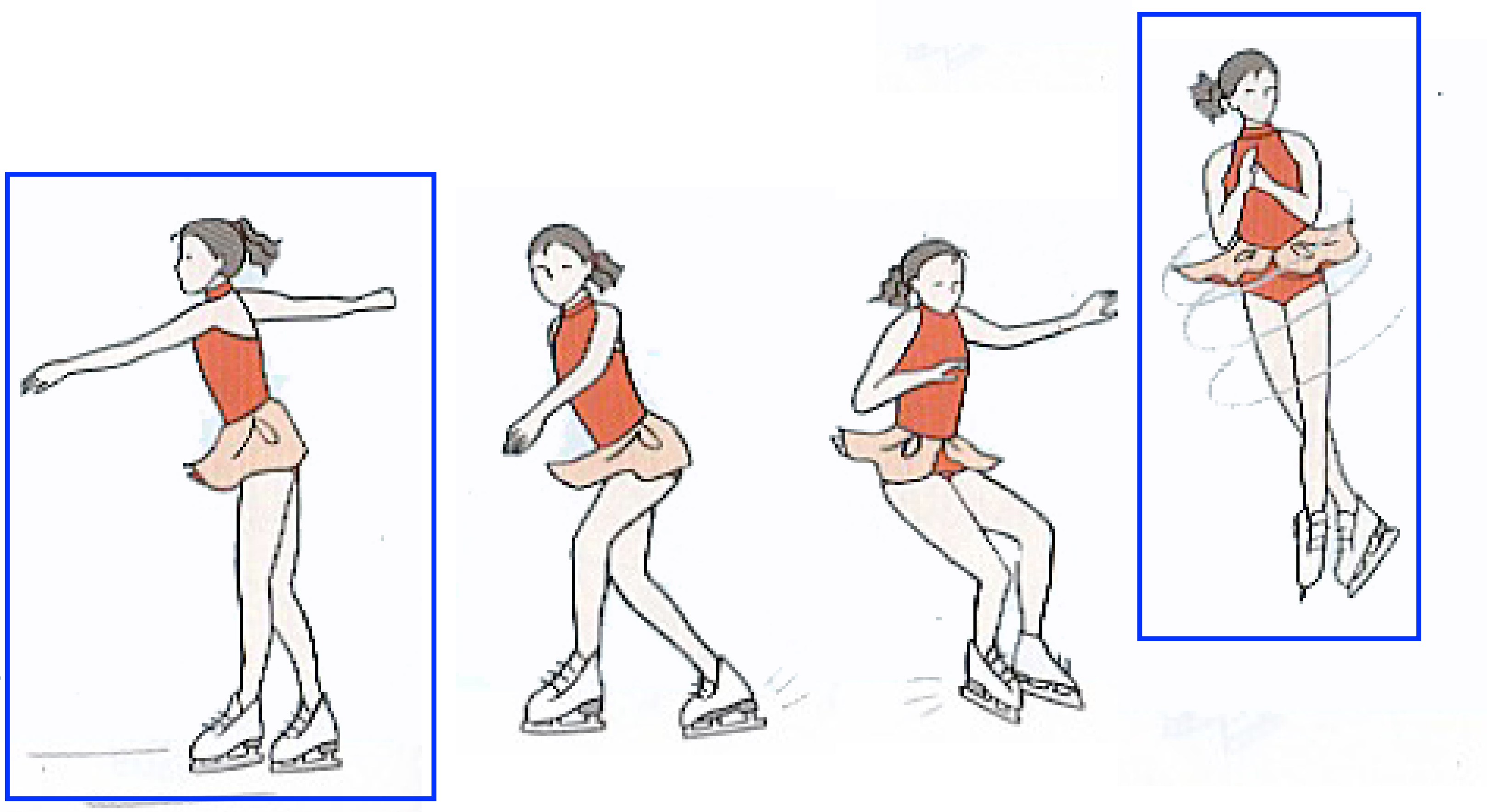
$I_1$

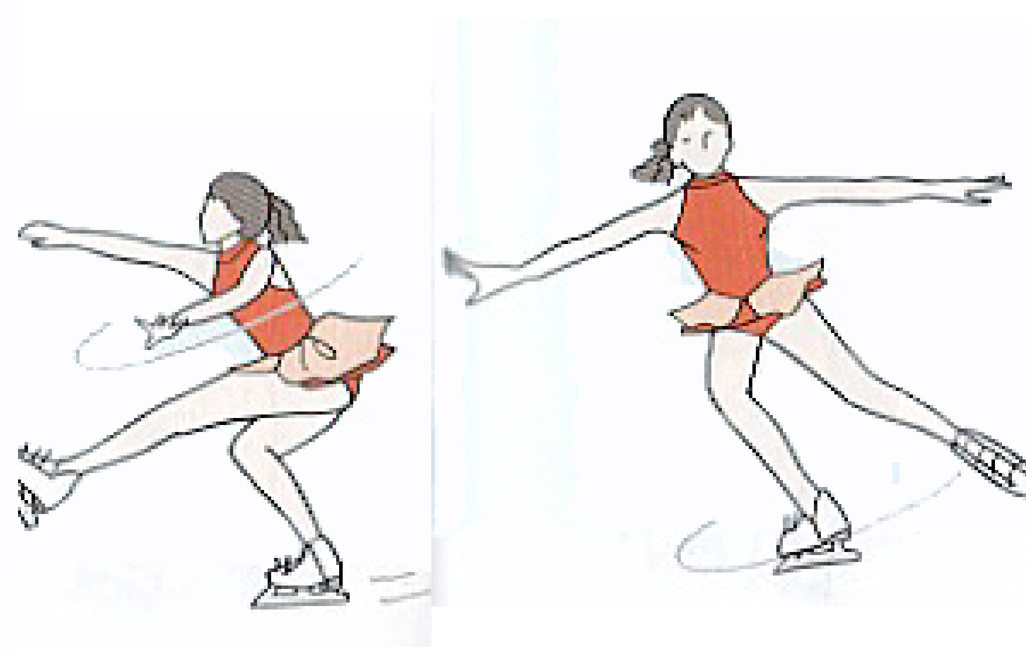
$\vee$



$I_2$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} < 1$$

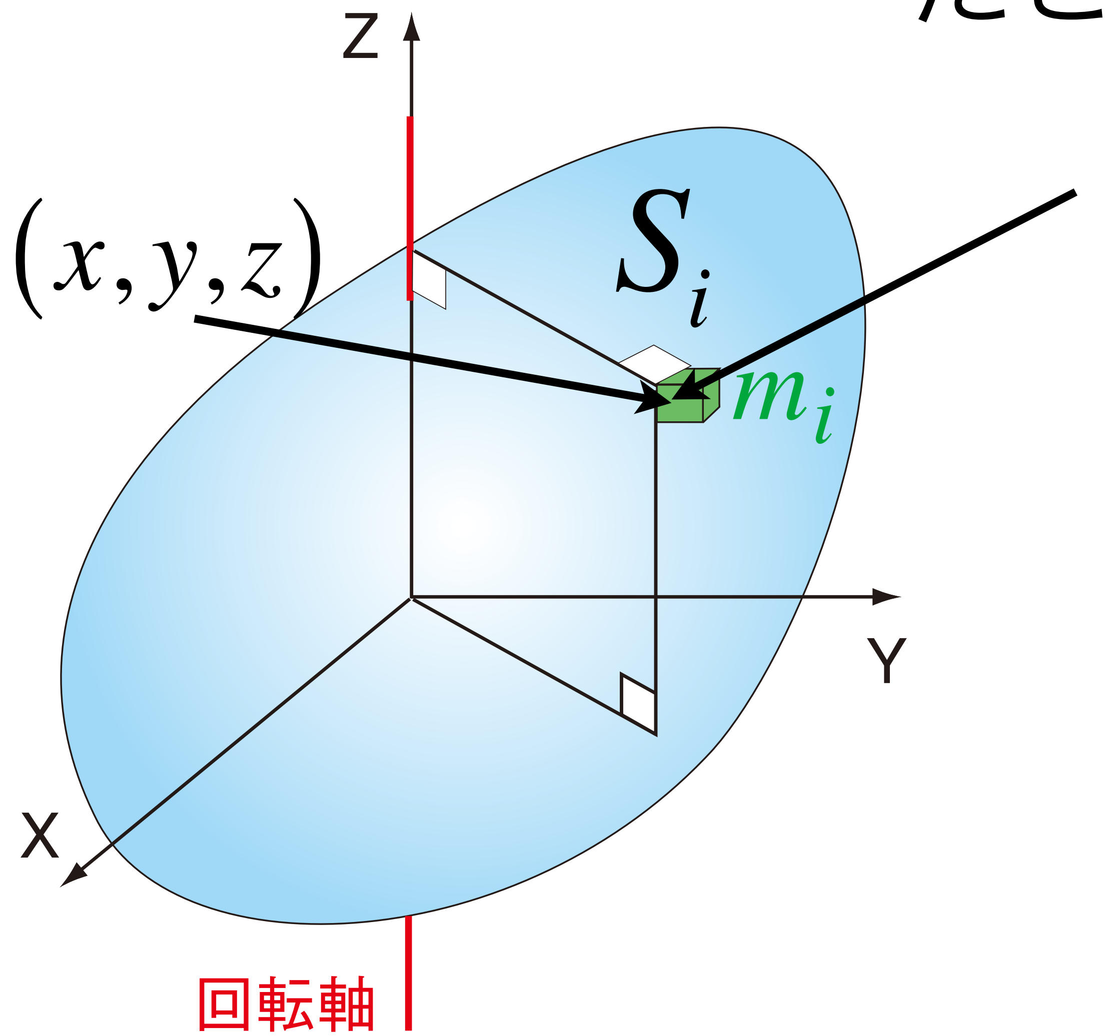




# 慣性モーメントの求め方

$$I=\sum_i m_i S_i^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} I=\iiint \rho(\vec{r})S^2 dV$$

たとえば xyz座標で計算するときは




体積　$dV = dx\times dy\times dz$

質量　$\rho\times \underline{dx\times dy\times dz}$

$\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right] \times\left[\mathrm{m}^3\right]$

軸までの距離　$S=\sqrt{x^2+y^2}$

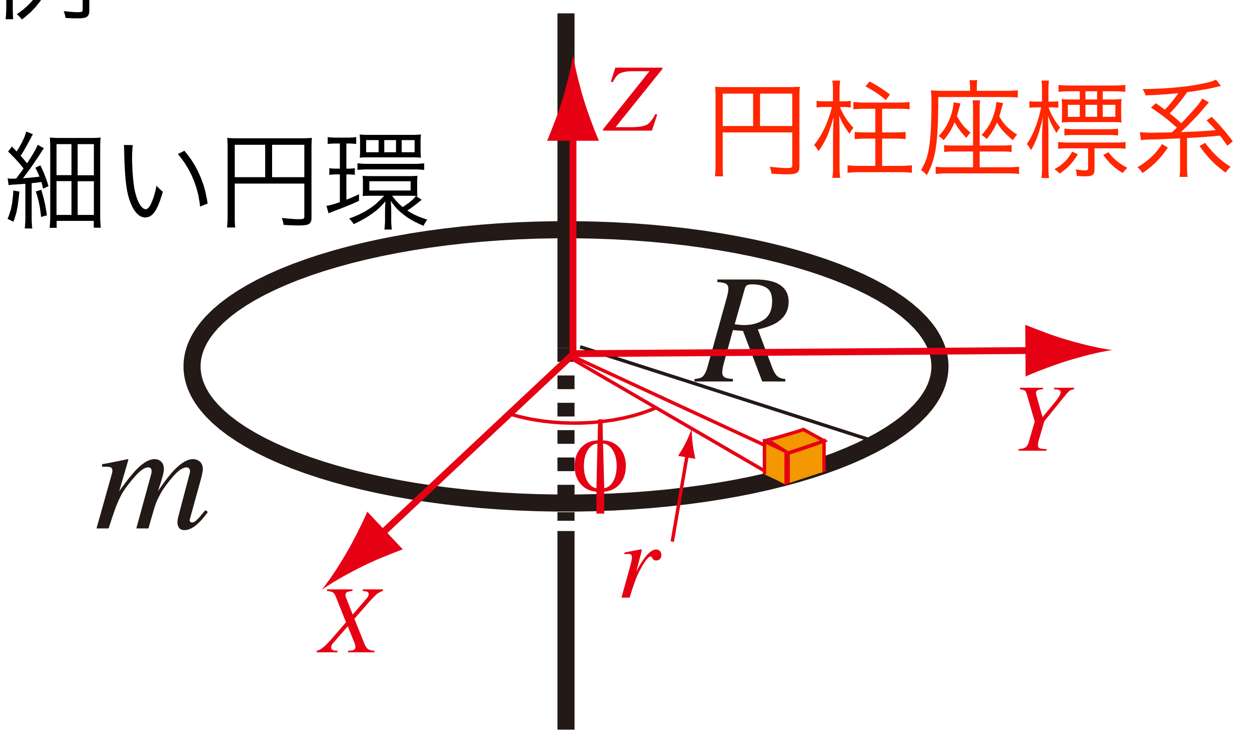
連続した物体を計算するには

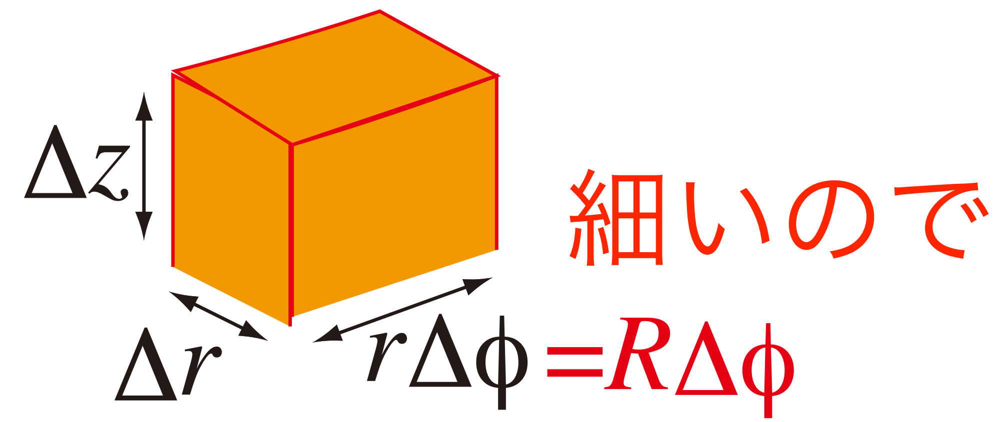
$m_i \to \rho\times dV$

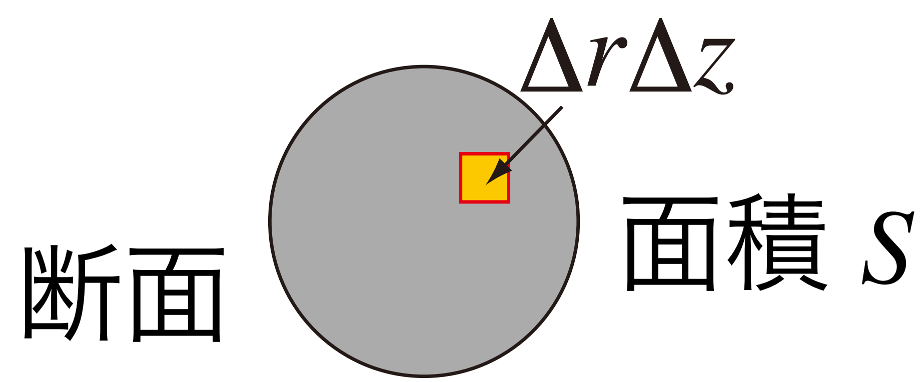
$S_i \to S$

$\sum_i \to \iiint$

例



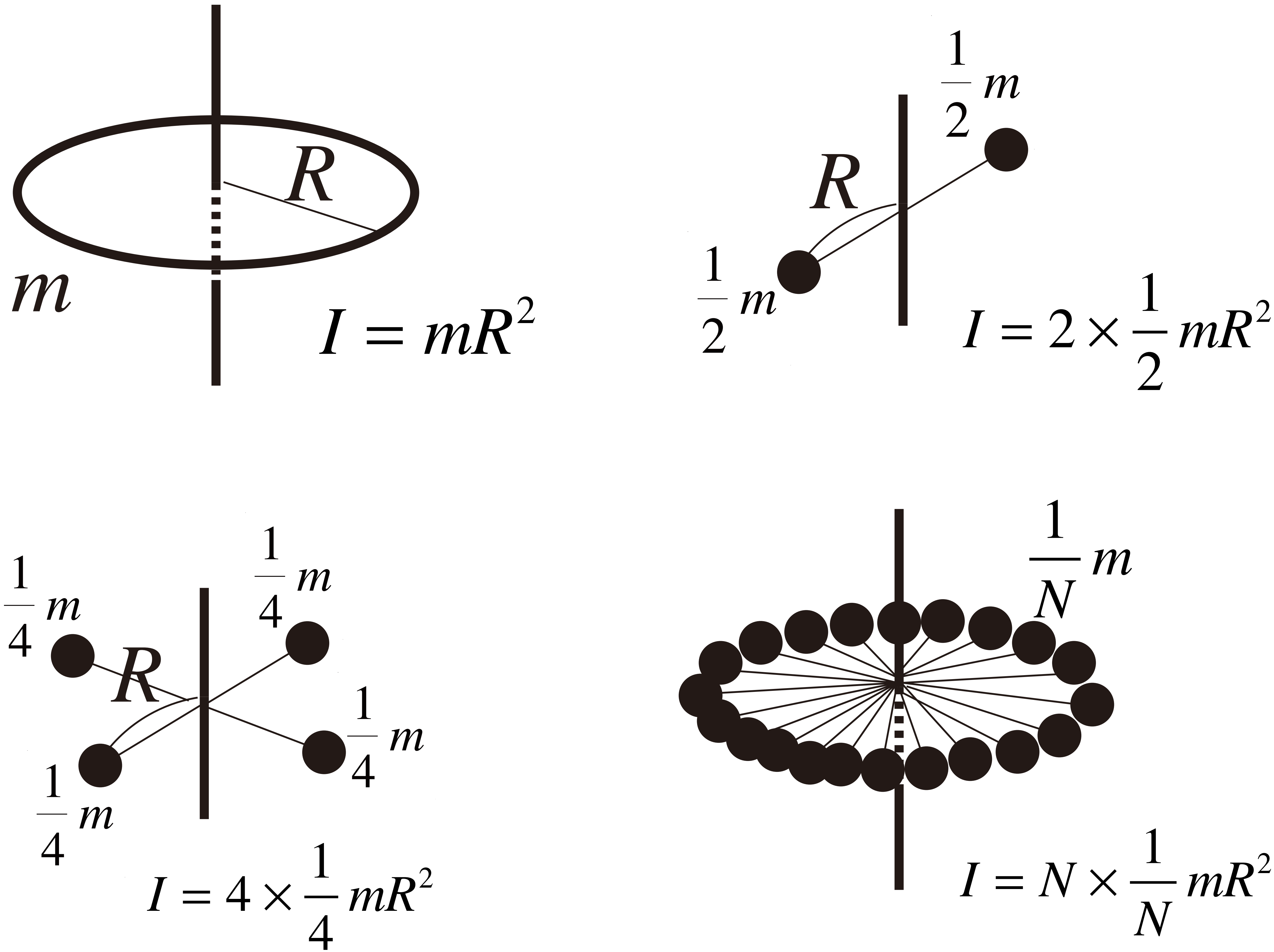




$$I = \iiint \rho R^2 \ \underbrace{\boxed{R d\phi\ dr dz}}_{dV} = \rho R^3 \frac{\int_0^{2\pi} d\phi}{\cancel{2\pi}} \times \frac{\iint dr dz}{\cancel{S}}$$

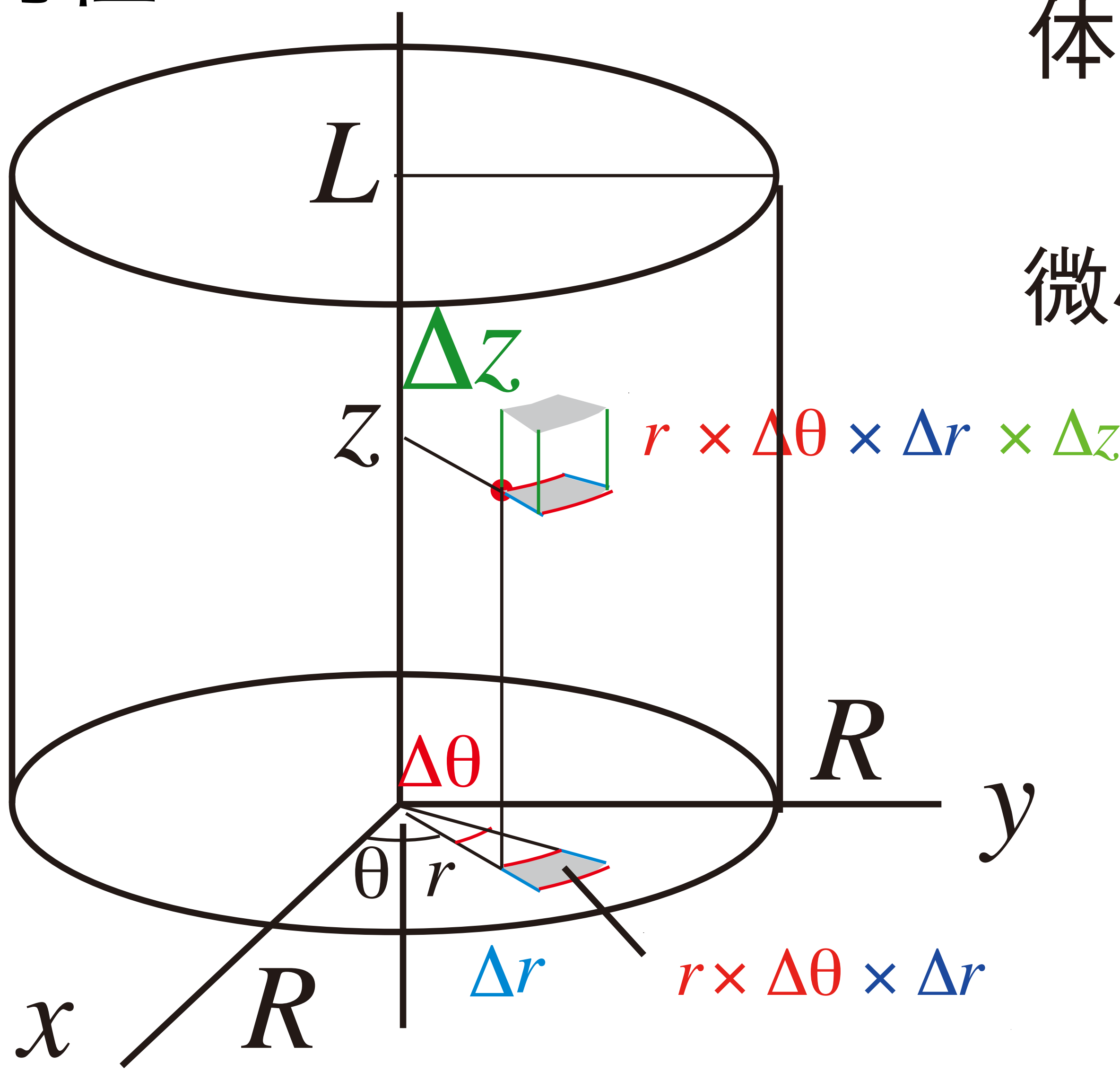
密度 $\dfrac{m}{\cancel{2\pi} R \times \cancel{S}}$

$$= mR^2$$



$m$
$R$
$I = mR^2$
$\frac{1}{2}m$
$R$
$\frac{1}{2}m$
$I = 2 \times \frac{1}{2} mR^2$
$\frac{1}{4}m$
$\frac{1}{4}m$
$R$
$\frac{1}{4}m$
$\frac{1}{4}m$
$I = 4 \times \frac{1}{4} mR^2$
$\frac{1}{N}m$
$I = N \times \frac{1}{N} mR^2$

# 円柱




体積密度 $\rho = \dfrac{M}{\pi R^2 L}$

微小部分の質量 $\rho \times r \times d\theta \times dr \times dz$

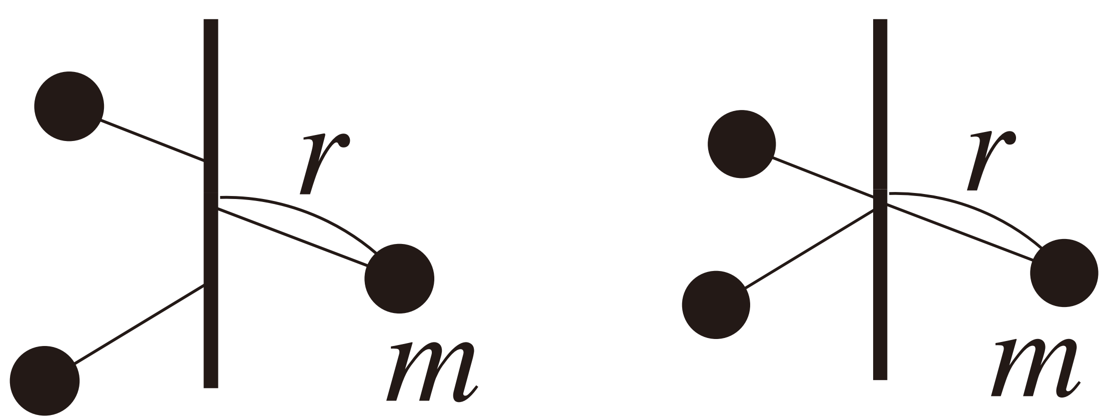
(軸までの距離)$^2$

$$I = \underset{z}{\int_0^L} \underset{r}{\int_0^R} \underset{\theta}{\int_0^{2\pi}} r^2 \times \rho \times r \; d\theta \; dr \; dz$$

$$= \rho \int_0^L dz \times \int_0^R r^3 dr \times \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \rho L \times \frac{1}{4} R^4 \times 2\pi = \frac{1}{2} MR^2$$

*L*は無関係



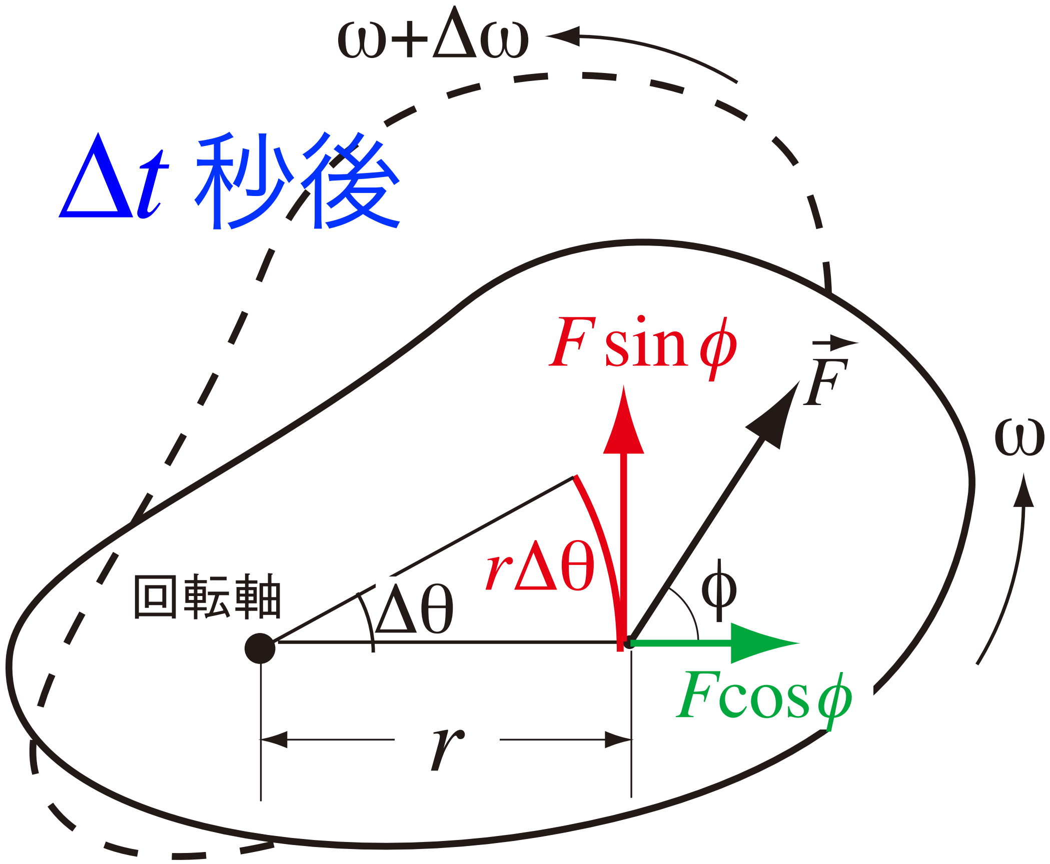

の慣性モーメントは同じ

回転の運動方程式

力のモーメント

# 2.3 力のモーメント（回転の運動方程式）

$\Delta t$ 秒後




慣性モーメント $I$

$\xrightarrow{\hspace{2em}}$ 回転に関係なし
$F\cos\phi$

力のする仕事 $(F\sin\phi)\times(r\,\Delta\theta)$

‖ エネルギー保存

回転の運動エネルギーの変化

$$\frac{1}{2}I\underbrace{(\omega+\Delta\omega)^2}_{\cancel{\omega^2}+2\omega\,\Delta\omega+\Delta\omega^2}-\frac{1}{2}\cancel{I\omega^2}$$

$\Delta t$ で $\Delta\theta$ 回ったとすると（両辺を $\Delta t$ で割って）

$$\longrightarrow\ I\omega\frac{\Delta\omega}{\Delta t}+\frac{1}{2}I\frac{\Delta\omega^2}{\Delta t}=(F\sin\phi)\times\left(r\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)$$

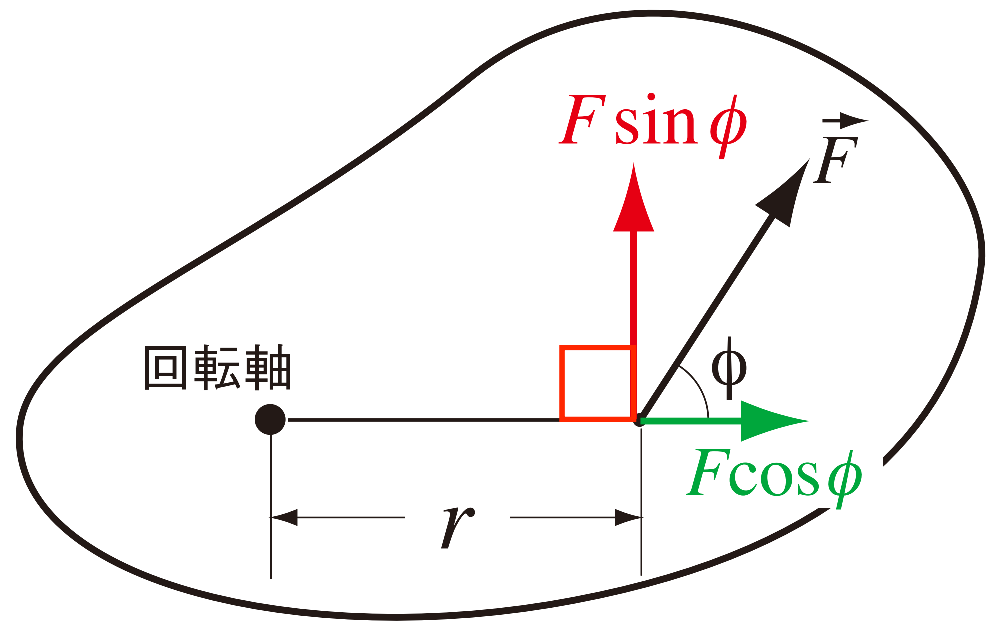
$\Delta t$ で $\Delta\theta$ 回ったとすると

$$\longrightarrow\ I\omega\frac{\Delta\omega}{\Delta t}+\frac{1}{2}I\frac{\Delta\omega^2}{\Delta t}=(F\sin\phi)\times\left(r\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)$$

$\Delta t\to 0$ とすると

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\to\frac{d\omega}{dt}\qquad\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\to\frac{d\theta}{dt}=\omega\qquad\frac{\Delta\omega^2}{\Delta t}=\overset{\frac{d\omega}{dt}}{\overset{\uparrow}{\frac{\Delta\omega}{\Delta t}}}\times\overset{0}{\overset{\uparrow}{\Delta\omega}}\to 0$$

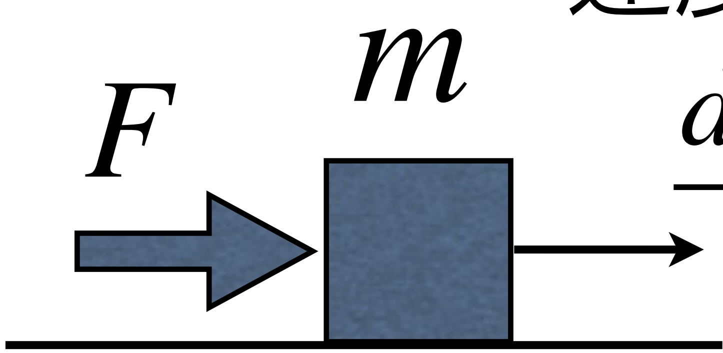
$$\longrightarrow\ I\cancel{\omega}\frac{d\omega}{dt}=(F\sin\phi)\times(r\cancel{\omega})$$




回転の運動方程式

$$\text{慣性モーメント}\longrightarrow I\underbrace{\frac{d\omega(t)}{dt}}_{\text{角加速度}}=\underbrace{Fr\sin\phi}_{\text{力のモーメント}\ N}$$

# 運動方程式



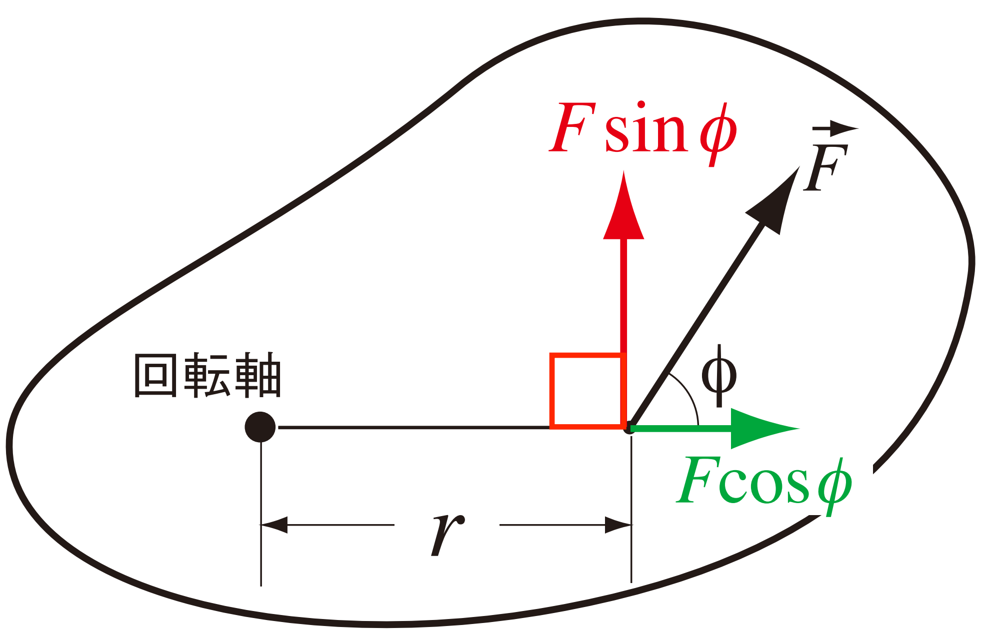

速度の時間変化

$$\frac{dv(t)}{dt}$$

加速度

$$F = m\frac{dv(t)}{dt}$$

# 回転の運動方程式




慣性モーメント $I$

力のモーメント

角加速度

$$Fr\sin\phi = I\frac{d\omega(t)}{dt}$$

慣性モーメント

外部から力が働かなければ

$$M\frac{d^2\vec{R}(t)}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i = 0 \longrightarrow \frac{d^2\vec{R}(t)}{dt^2} = 0$$

$$\longrightarrow \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2\vec{R}(t)}{dt^2} = 0 \longrightarrow \left.\frac{d\vec{R}(t)}{dt}\right|_{t=t_2} - \left.\frac{d\vec{R}(t)}{dt}\right|_{t=t_1} = 0$$

重心は等速直線運動

$$I\frac{d\omega(t)}{dt} = \sum_i (\pm) F_i \ell_i = 0 \longrightarrow I\frac{d\omega(t)}{dt} = 0$$

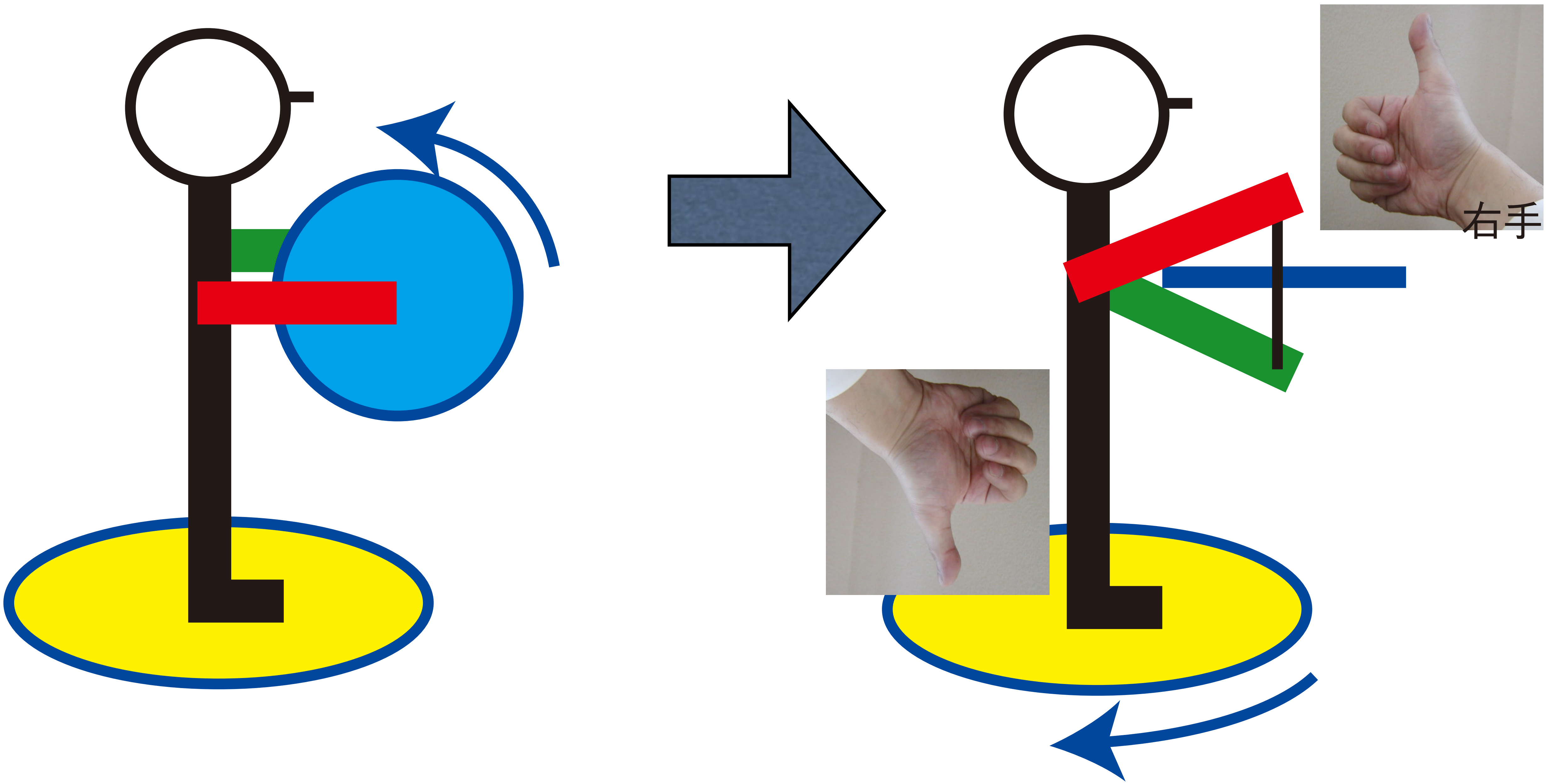
$$\longrightarrow \int_{t_1}^{t_2} I\frac{d\omega(t)}{dt} = 0 \longrightarrow I\omega(t_2) - I\omega(t_1) = 0$$

角運動量 $I\omega(t)$ は保存する

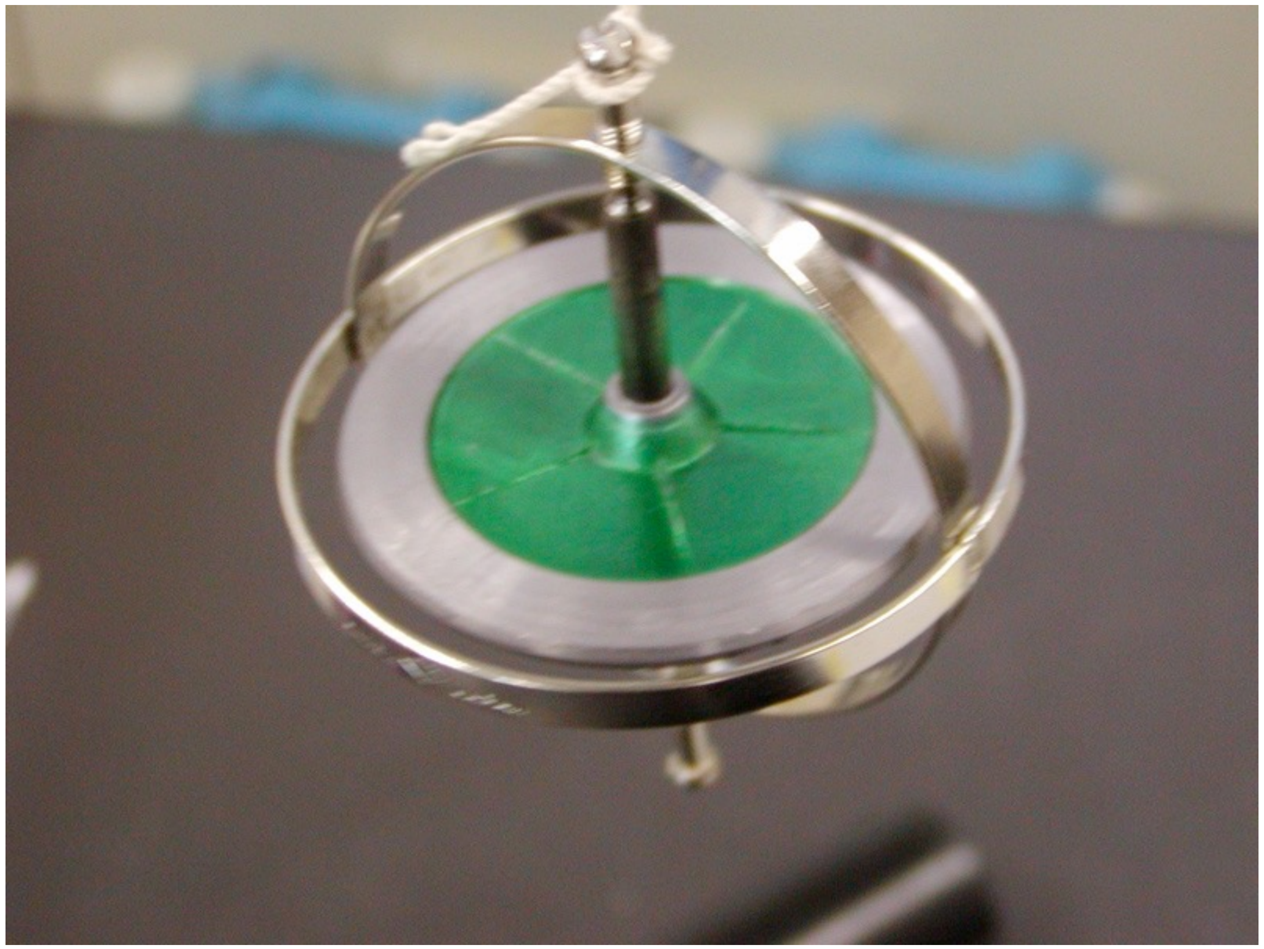
余談

# 角運動量保存則

まわるはげしさ



# 地球ごま

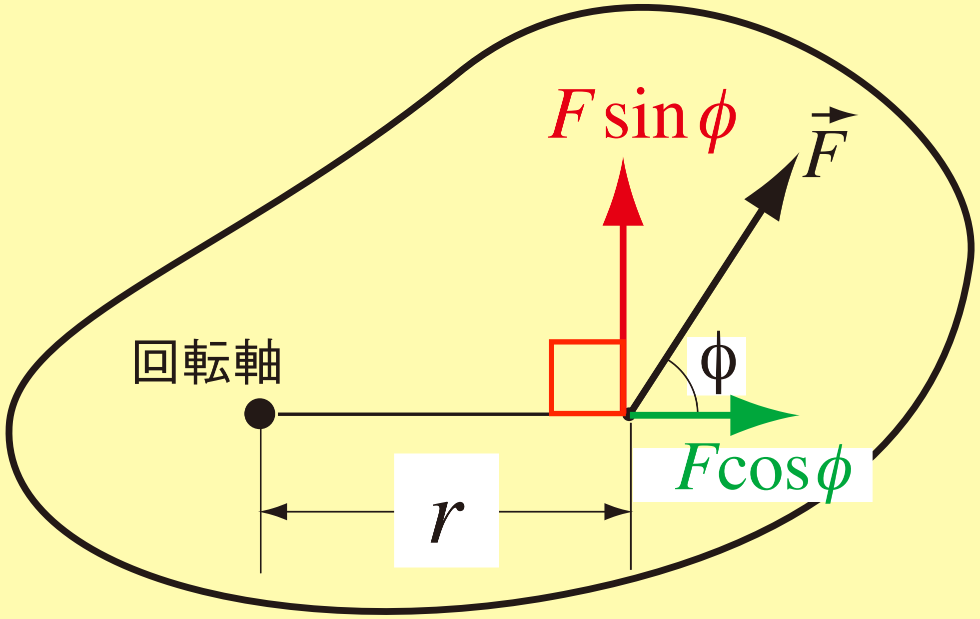


歳差運動

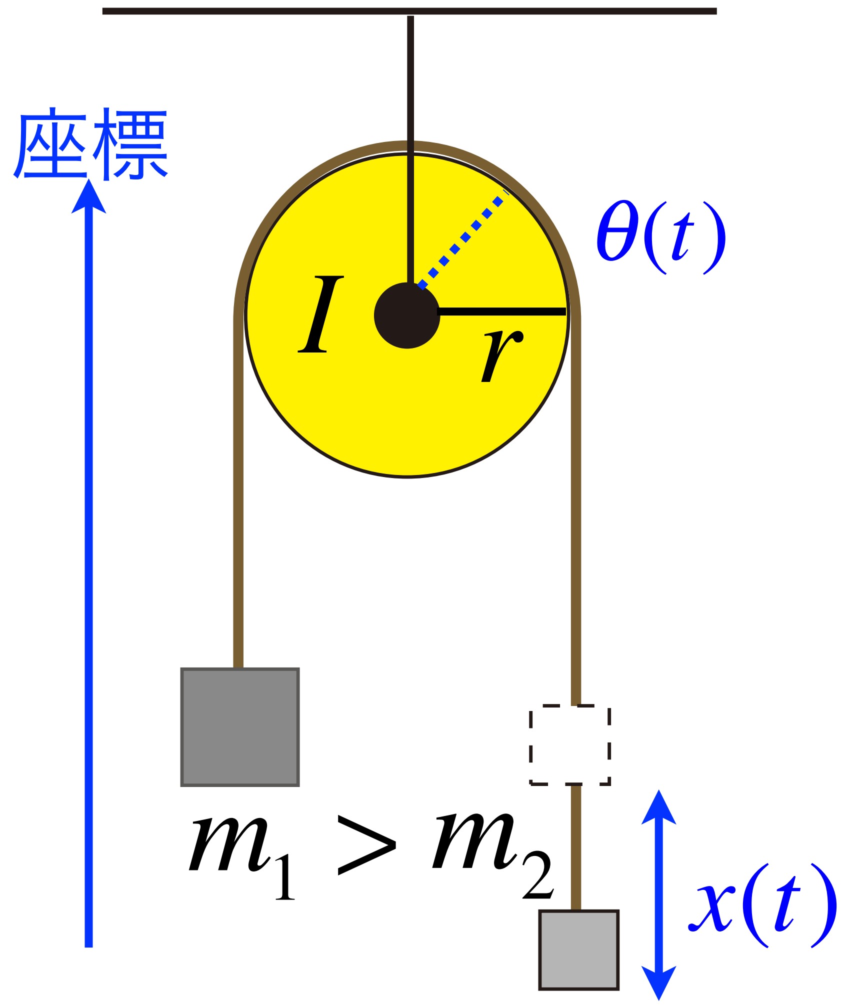
# 回転の運動方程式の使い方

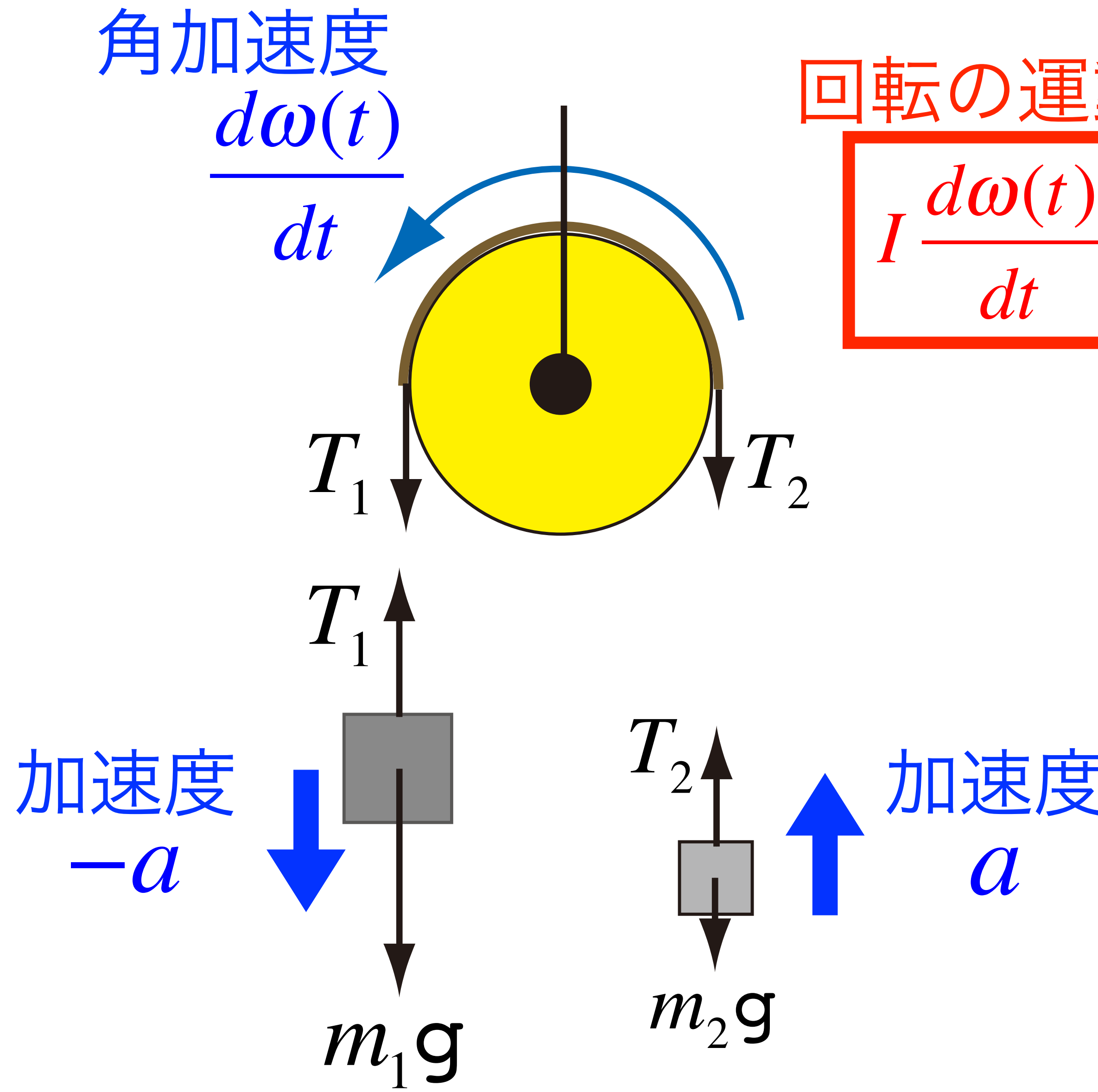
## 回転の運動方程式

$$I\frac{d\omega(t)}{dt} = Fr\sin\phi$$



# 回転の運動方程式の使い方（P28 2. および P55 4.）




回転の運動方程式

$$\boxed{I\frac{d\omega(t)}{dt} = \underbrace{T_1 \times r - T_2 \times r}_{\text{力のモーメント}}}$$

$$x(t) = r \times \theta(t)$$

$$v(t) = r \times \omega(t)$$

$$\boxed{a(t) = r \times \frac{d\omega(t)}{dt}}$$

運動方程式

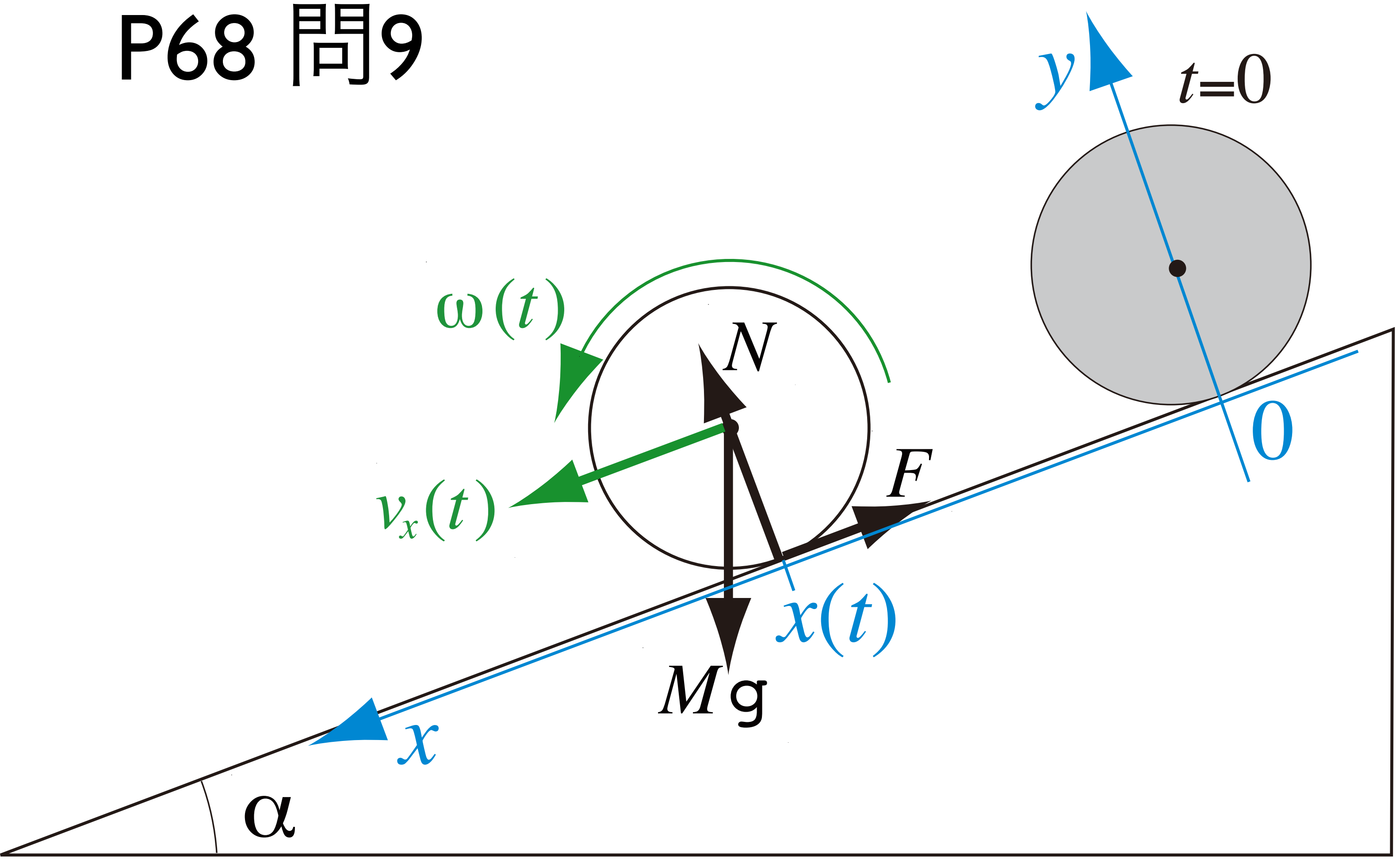
$$\boxed{m_1(-a) = T_1 - m_1\mathrm{g}}$$

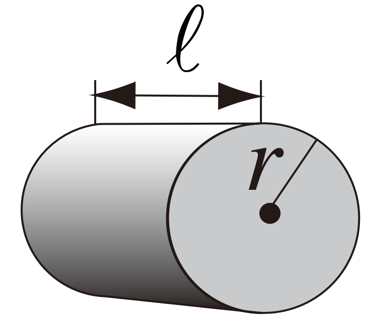
運動方程式

$$\boxed{m_2 a = T_2 - m_2\mathrm{g}}$$

未知数 $a$, $\dfrac{d\omega(t)}{dt}$, $T_1$, $T_2$ ⇨ 解ける

# P68 問9




質量 $M$

慣性モーメント $I$

## 運動方程式

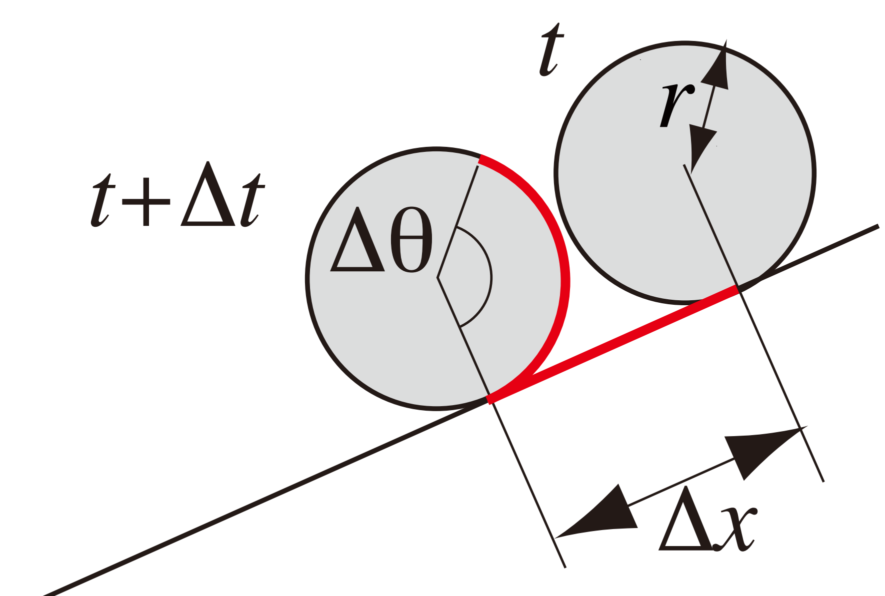
$$M\frac{dv_x(t)}{dt} = Mg\sin\alpha - F$$

$$M\frac{dv_y(t)}{dt} = N - Mg\cos\alpha = 0$$

y方向には動かないので

## 回転の運動方程式

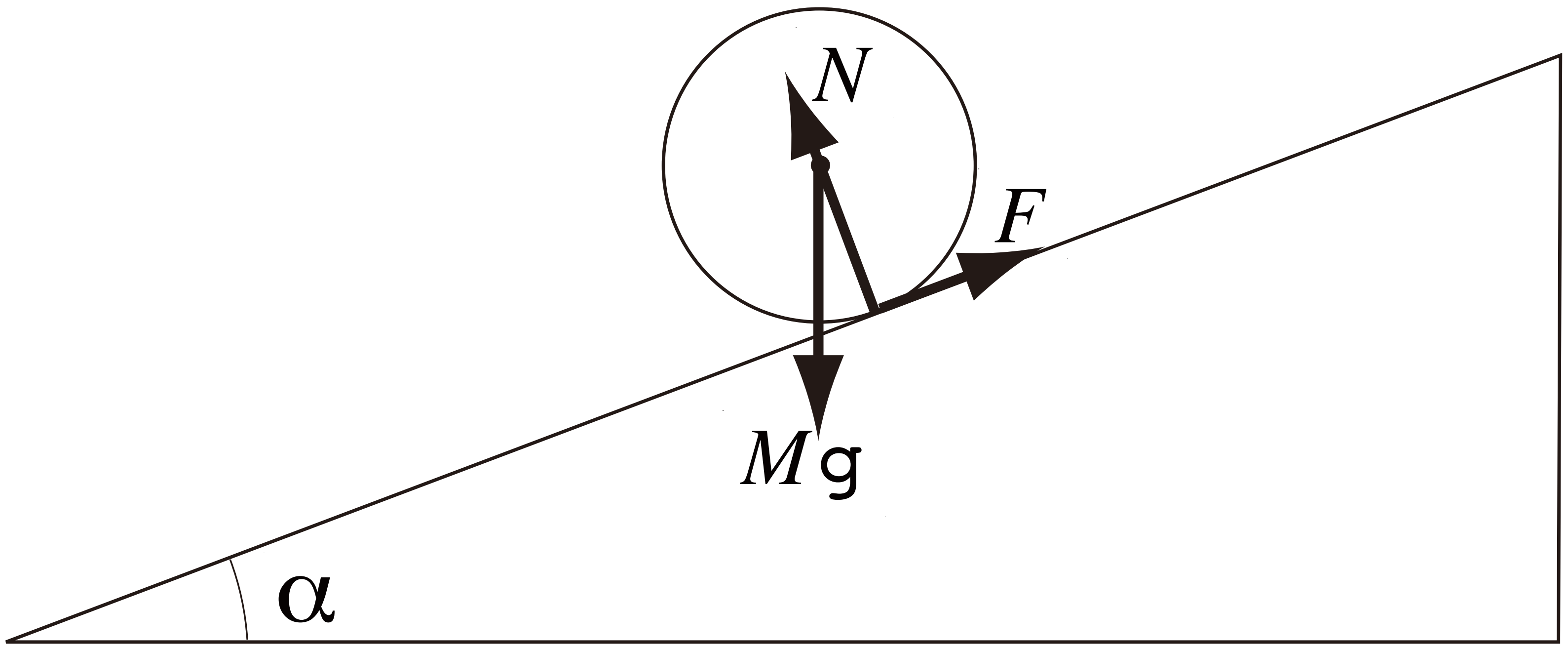
$$I\frac{d\omega(t)}{dt} = F \times r$$




$$\Delta x = r \times \Delta\theta$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = r \times \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$v_x(t) = r \times \omega(t)$$




運動方程式 $M\dfrac{dv_x(t)}{dt} = Mg\sin\alpha - F$

未知数

回転の運動方程式 $I\dfrac{d\omega(t)}{dt} = F \times r$

$v_x(t) \quad \omega(t) \quad F$

速度と角速度の関係（滑らなければ） $v_x(t) = r \times \omega(t)$

$$\Rightarrow \quad v_x(t) = \frac{Mr^2 g\sin\alpha}{I + Mr^2} \times t$$

もし $I = 0$ なら

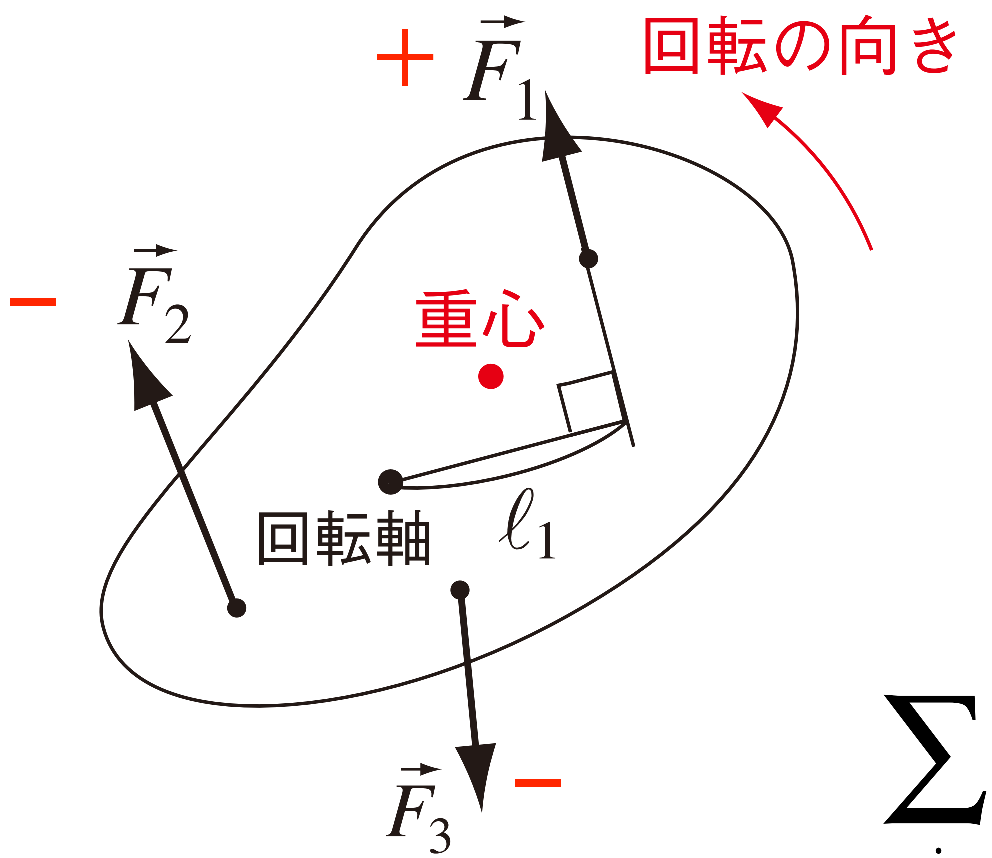
$$v_x(t) = g\sin\alpha \times t$$

剛体のつり合い

大腿骨頭部に働く力

# 2.4 力のつり合い






## 1） 重心が静止

重心の座標

$$M\boxed{\frac{d^2\vec{R}(t)}{dt^2}}=\sum_i \vec{F}_i$$

$=0$

$$\sum_i F_{ix}=0 \quad \sum_i F_{iy}=0 \quad \sum_i F_{iz}=0$$

力のつり合い

## 2） 回転しない

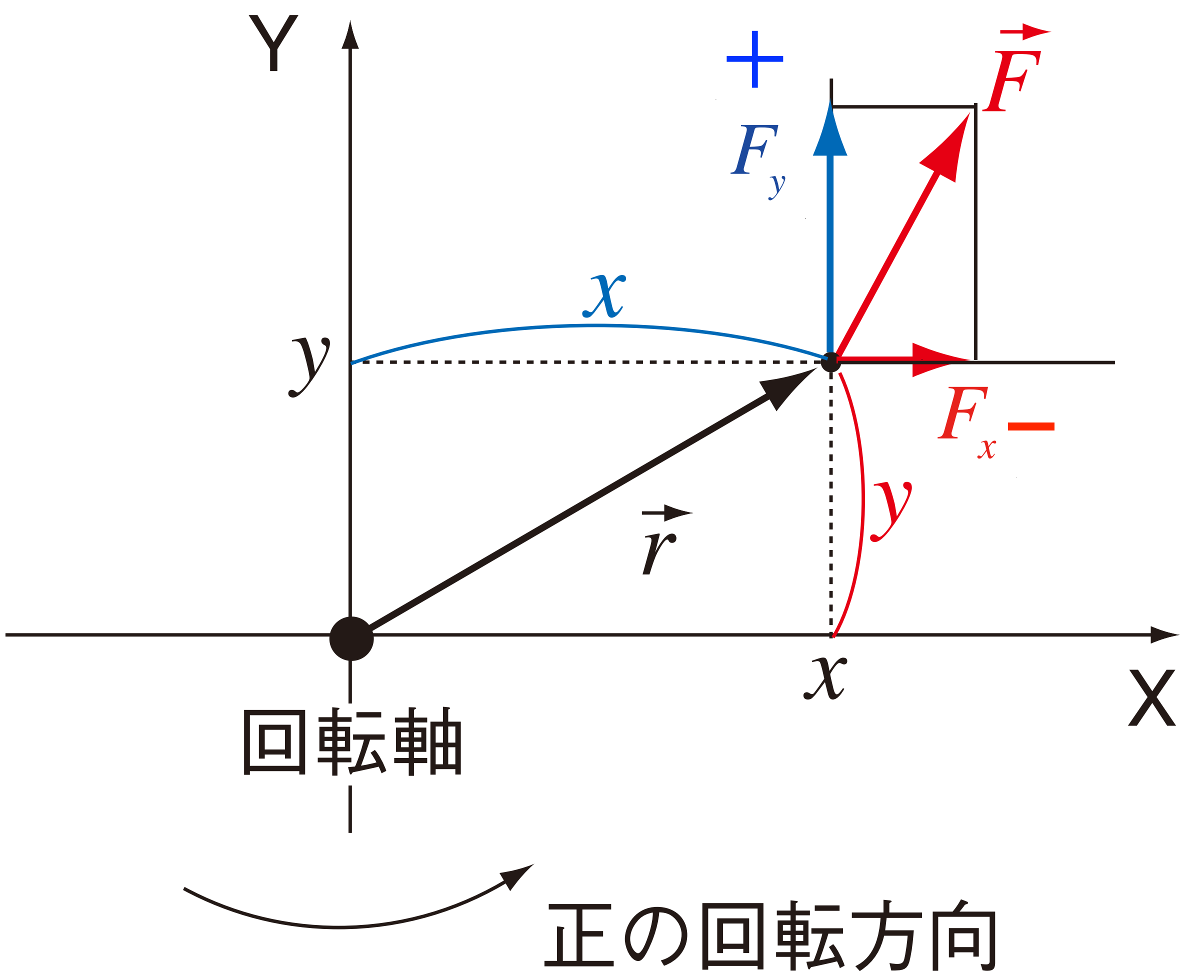
$$I\boxed{\frac{d\omega(t)}{dt}}=\sum_i(\pm)F_i\ell_i=0$$

$=0$

力のモーメントのつり合い

# 成分表示での力のモーメント






成分による力のモーメント

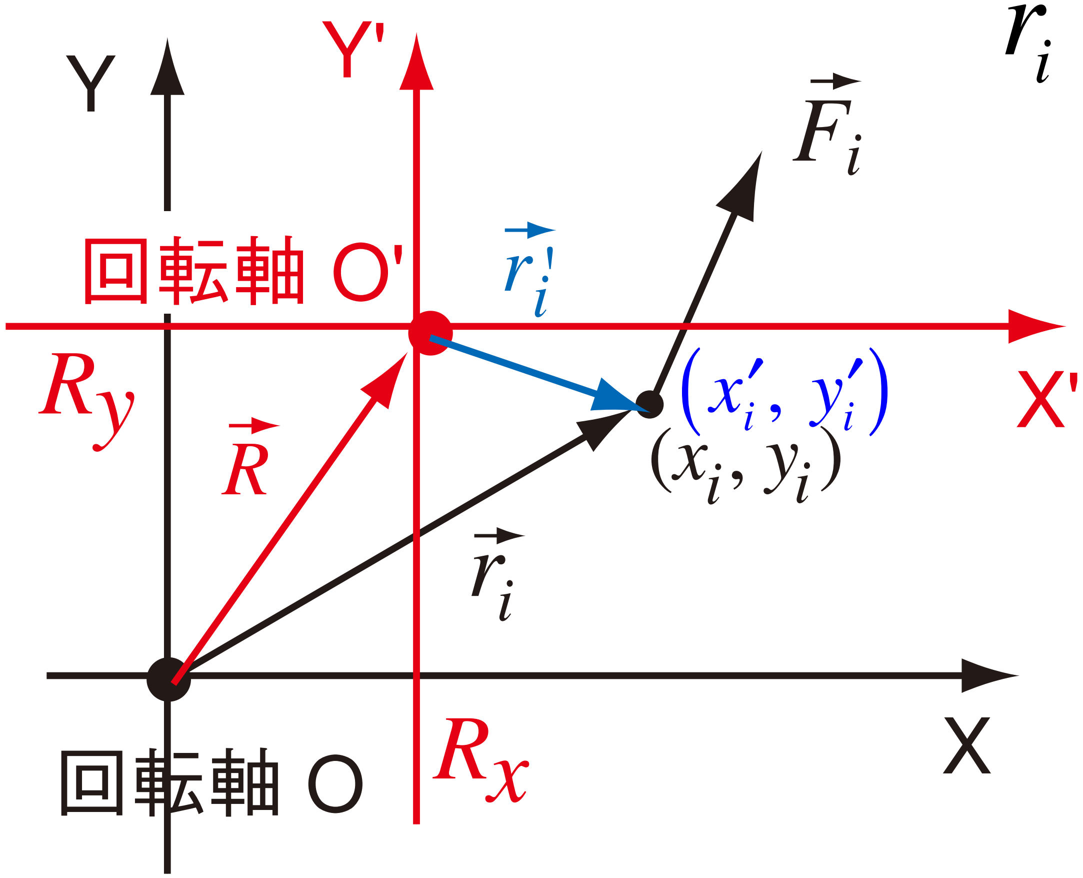
$$N = +F_y \times x - F_x \times y$$

$$= \vec{r} \times \vec{F}$$

↑

外積、ベクトル積

# 回転軸の設定




$\vec{r}_i = \vec{r}_i{}' + \vec{R}$ なので $\begin{cases} x_i = x_i' + R_x \\ y_i = y_i' + R_y \end{cases}$

回転軸 O での力のモーメント

$$0 = \sum_i \left(F_{iy}\, x_i - F_{ix}\, y_i\right)$$

$$= \sum_i \left[\left(x_i' + R_x\right)F_{iy} - \left(y_i' + R_y\right)F_{ix}\right]$$

$$0 = \boxed{\sum_i \left(x_i'\, F_{iy} - y_i'\, F_{ix}\right)} + R_x \underbrace{\boxed{\sum_i F_{iy}}}_{=0} - R_y \underbrace{\boxed{\sum_i F_{ix}}}_{=0}$$

回転軸 O' での力のモーメント

力のつり合い

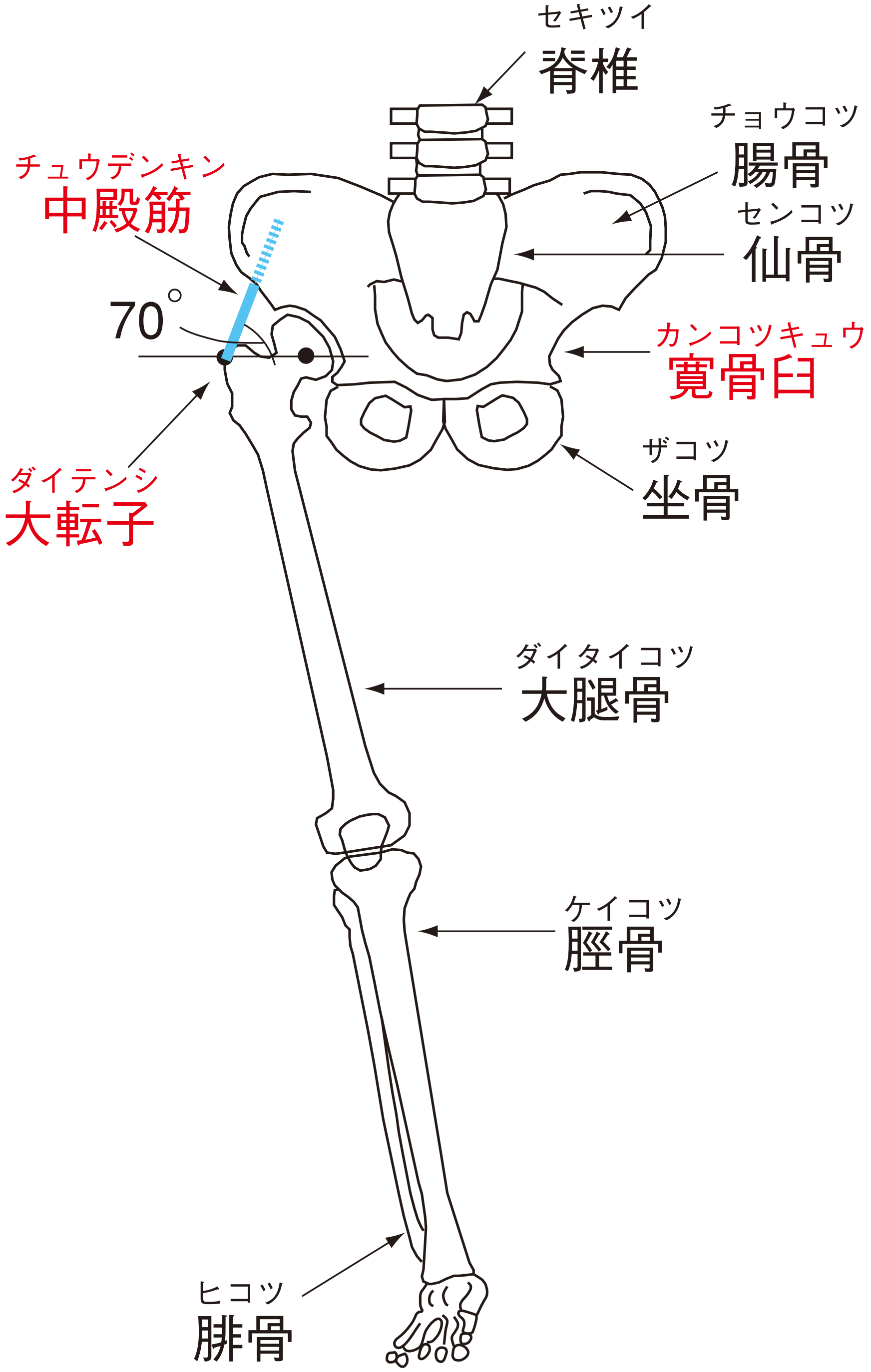
力のモーメントのつり合い

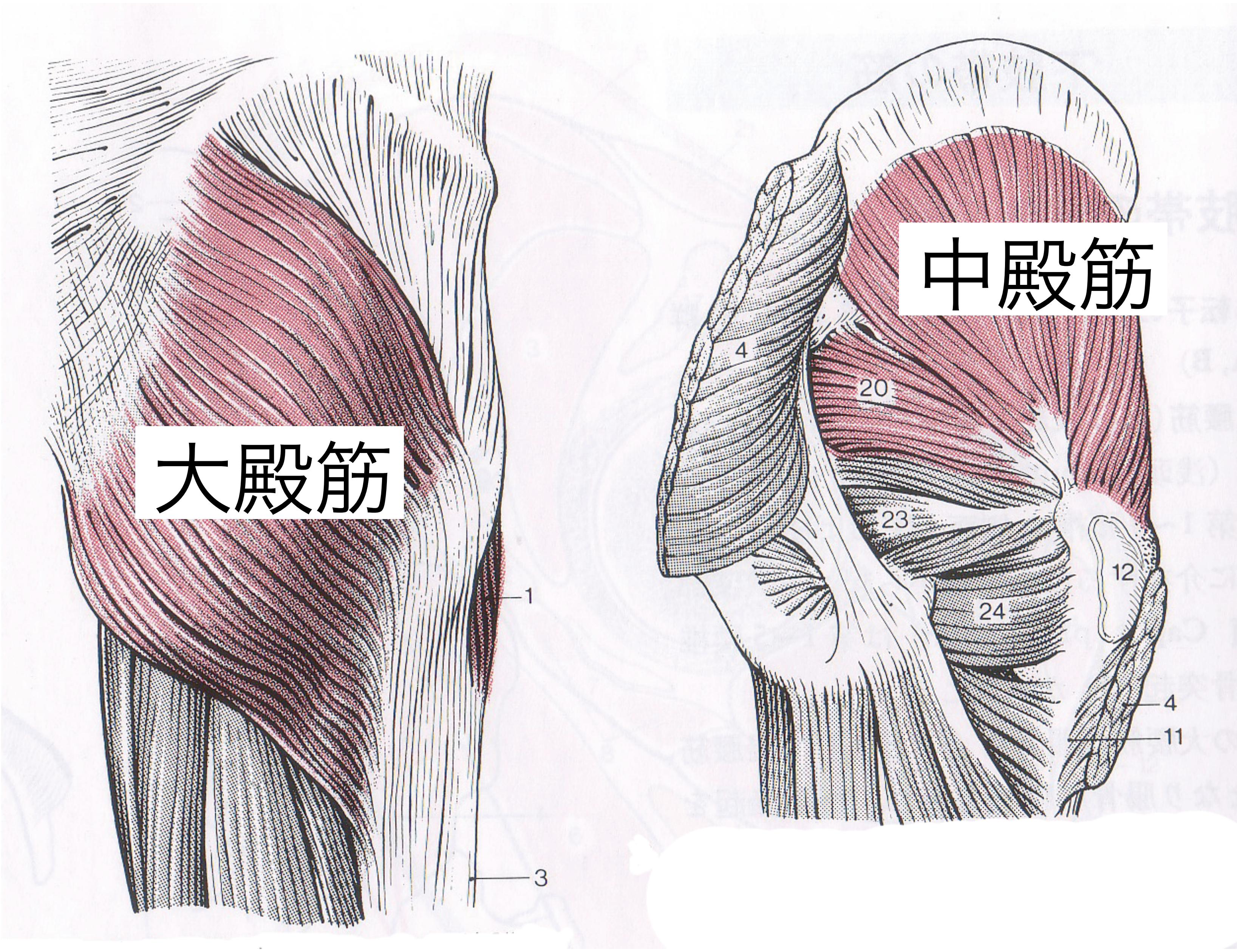
回転軸は任意の場所に設定できる

# 例：大腿骨頭部に働く力、杖の効果



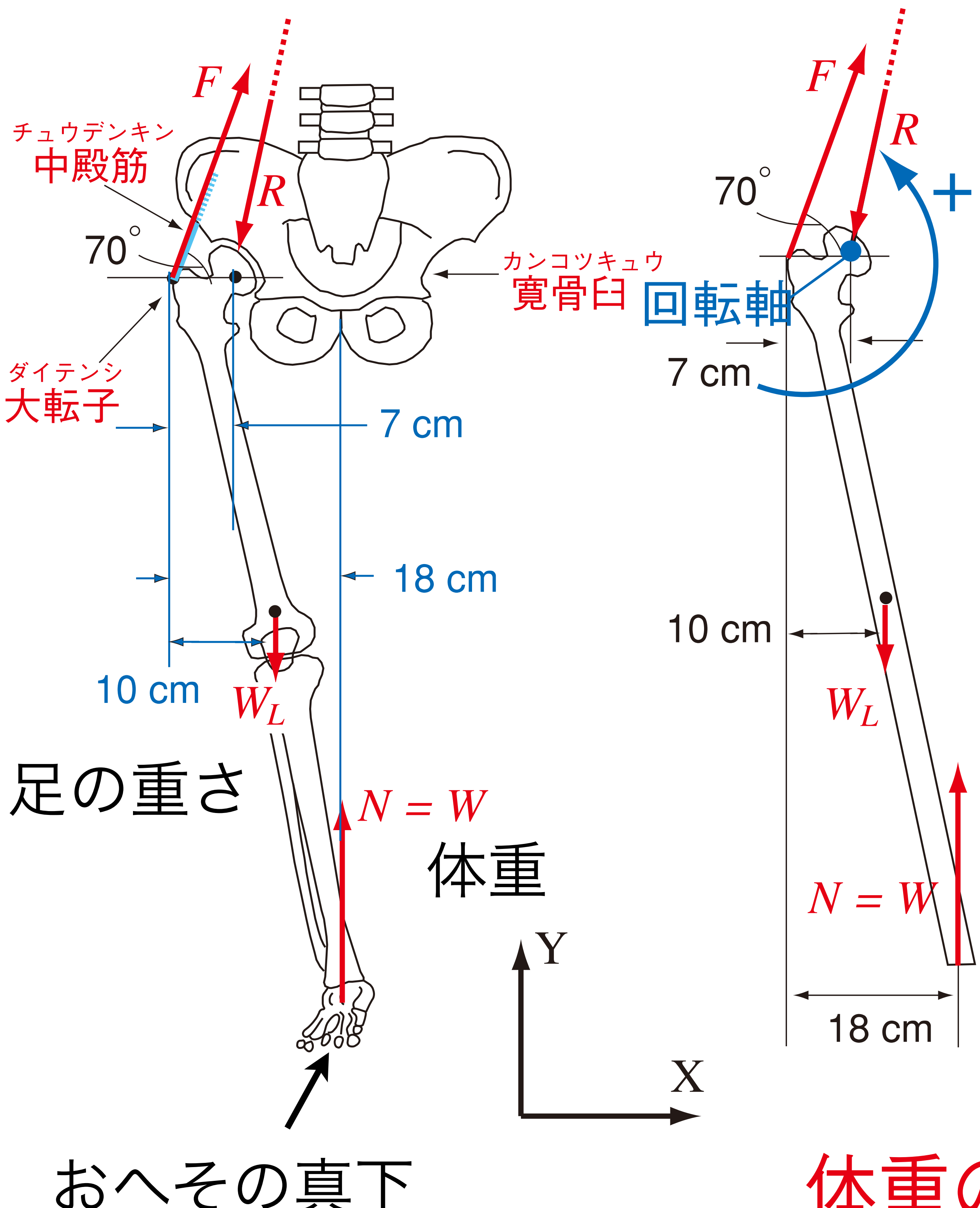
## ●片足で立っている場合



# 例：大腿骨頭部に働く力、杖の効果

## ●片足で立っている場合




力のつり合い

$\vec{R} = \left(-R_x, -R_y\right)$

X方向　$F\cos 70° - \boxed{R_x} = 0$

Y方向　$F\sin 70° - \boxed{R_y} - W_L + W = 0$

力のモーメントのつり合い

$$W\cdot(18-7) - \boxed{F}\cdot 7\cdot \sin 70° - W_L\cdot(10-7) = 0$$

$W_L = \dfrac{1}{7}W$ とすると

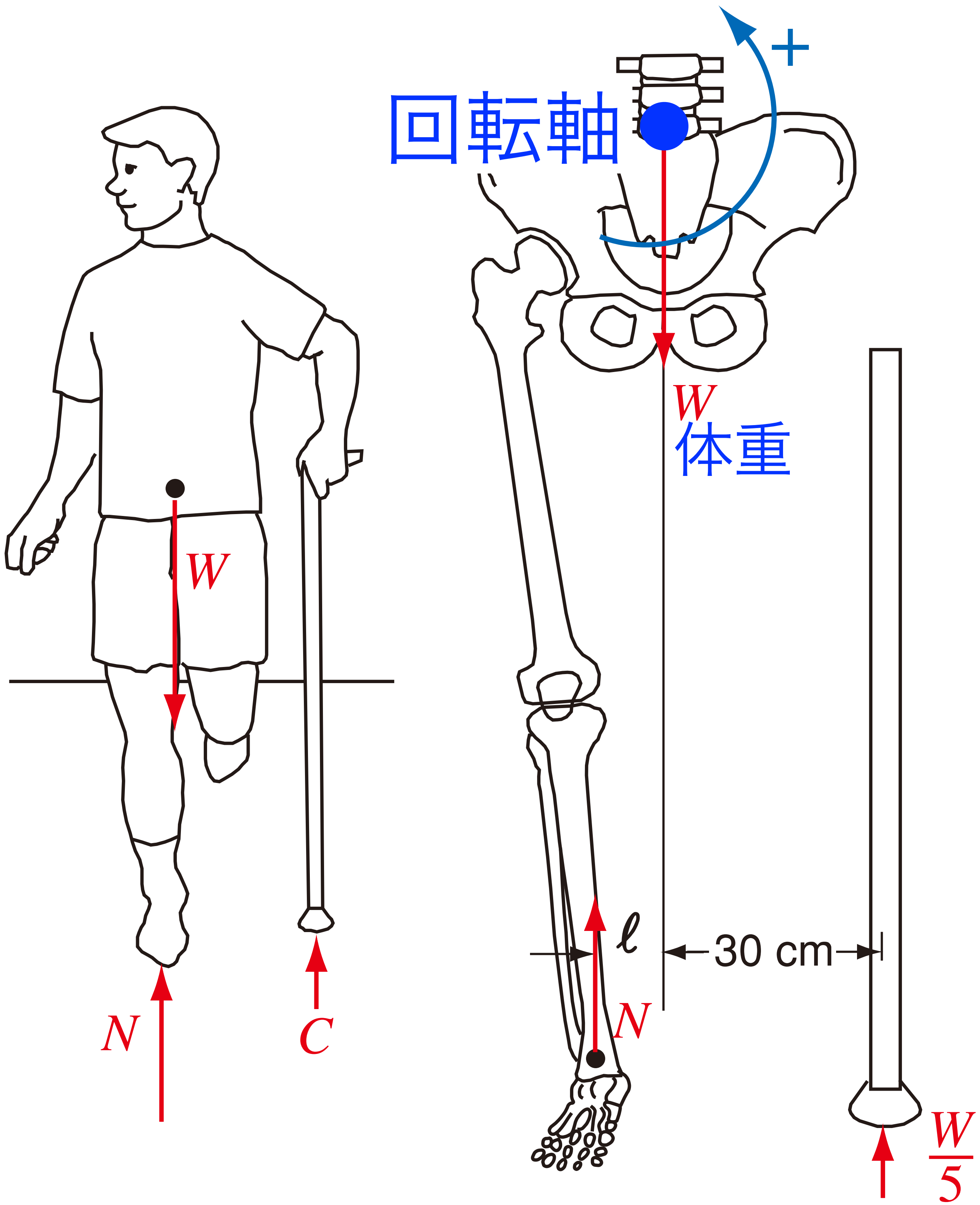
$$F = 1.6W$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 2.5W$$

体重の 2.5 倍の力が大腿骨頭部に働く

体の真ん中から３０cm　離れた場所に杖をつく 

体重の 1/5 を杖にあずける




力のつり合い

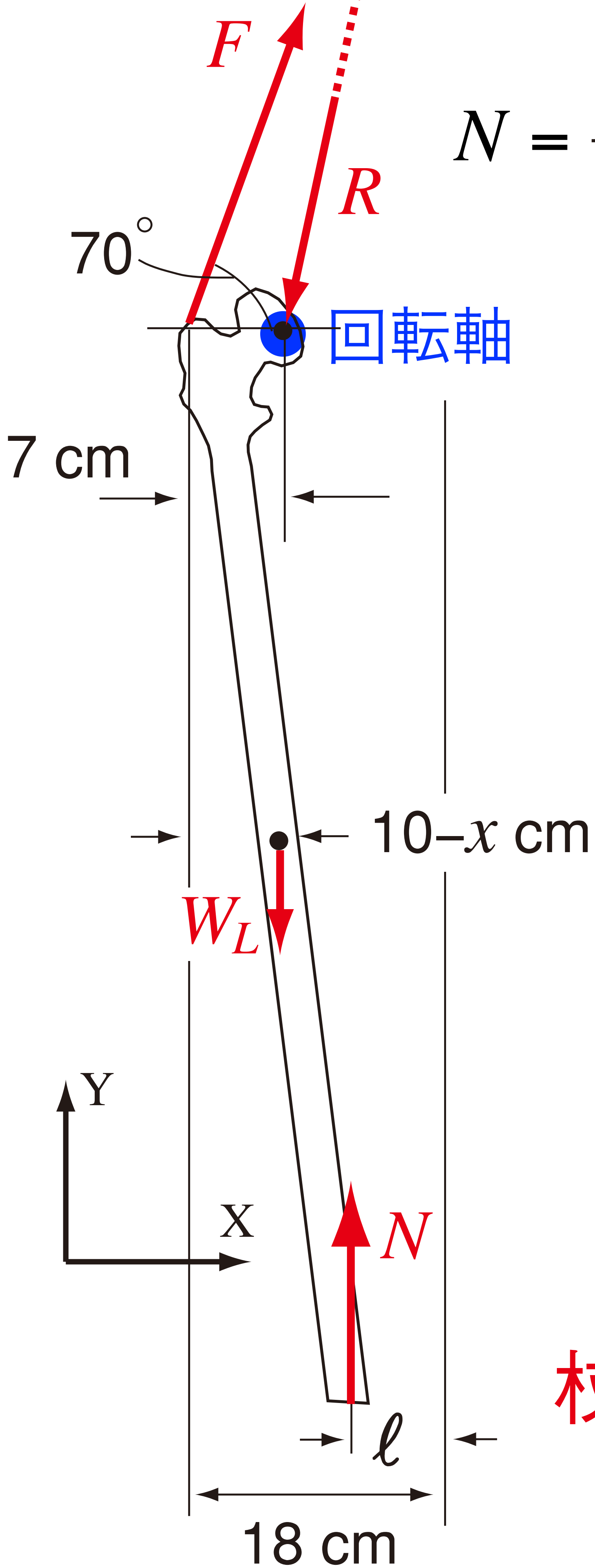
$$N + \frac{W}{5} - W = 0$$

力のモーメントのつり合い

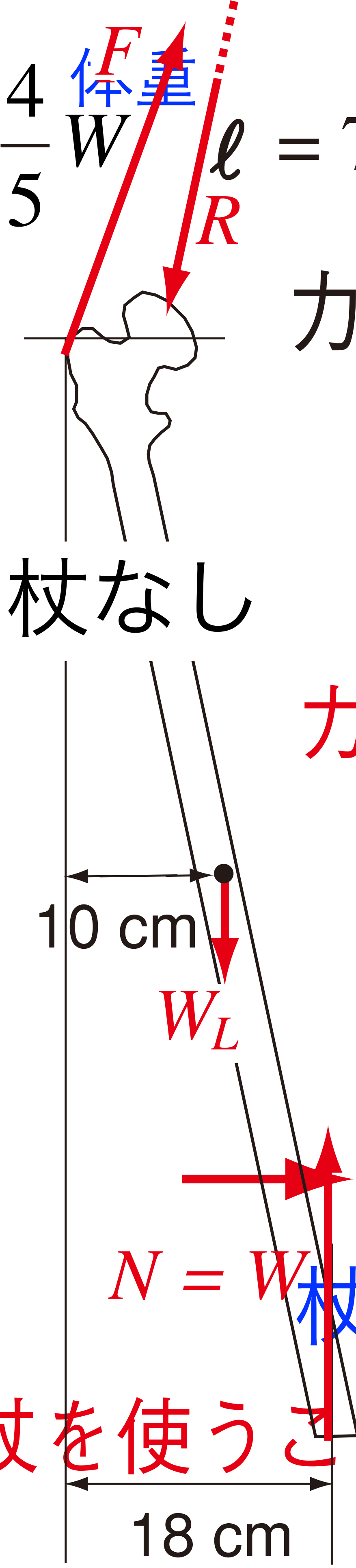
$$\frac{W}{5} \cdot 30 - N\ell = 0$$

$N$ と $\ell$ が分かっていない

$\longrightarrow$ $N = \frac{4}{5}W$ 体重　$\ell = 7.5\ \mathrm{cm}$




杖なし




体重

$$N = \frac{4}{5}W \qquad \ell = 7.5\ \text{cm}$$

$$x = \frac{10}{18}\ell = 4.16\ \text{cm}$$

たしかめよ

## 力のつり合い

X方向 $F\cos 70^\circ - R_x = 0$

Y方向 $F\sin 70^\circ - R_y - W_L + N = 0$

## 力のモーメントのつり合い

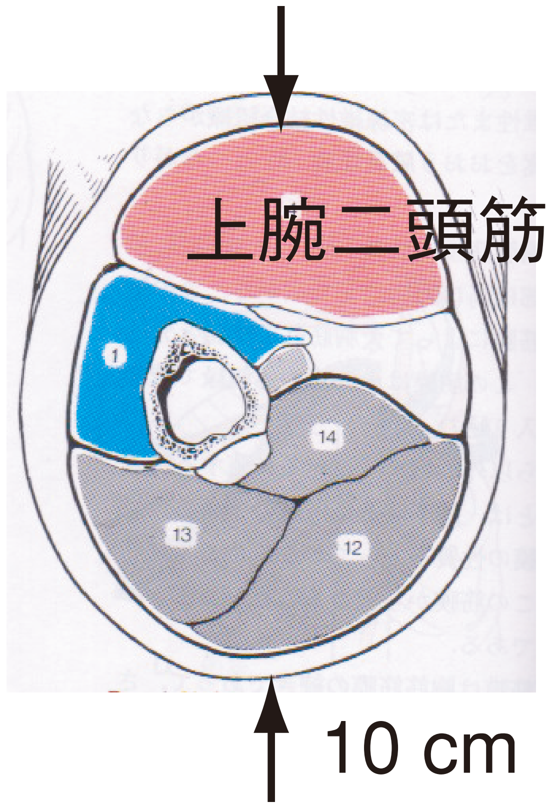
$$N\cdot(18-\ell-7) - F\cdot 7\cdot\sin 70^\circ - W_L(10-x-7) = 0$$

$$\boxed{F = 0.45\ W \qquad R = 1.2\ W}$$

杖なし　1.6 W　　2.5 W

杖を使うことで中殿筋の力と大腿骨頭部に働く力を大幅に軽減できる。

# 上腕二頭筋が出すことができる力




筋肉が出せる力

最大　2〜3×10$^5$ N/m$^2$

$$3\times10^5\times\pi\times(0.05)^2\times\frac{1}{5}$$

面積

$= 471$ [N]　47kg相当分

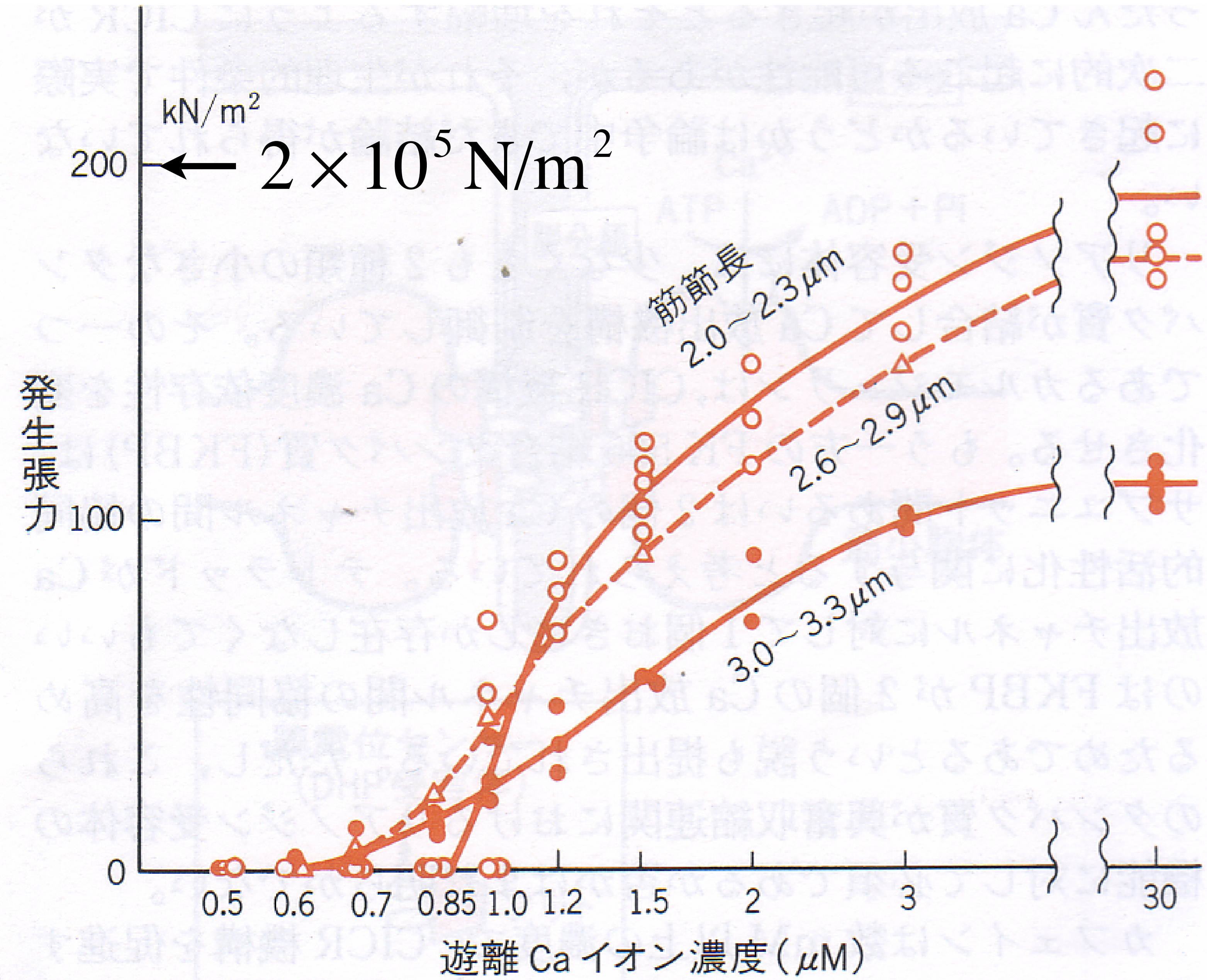
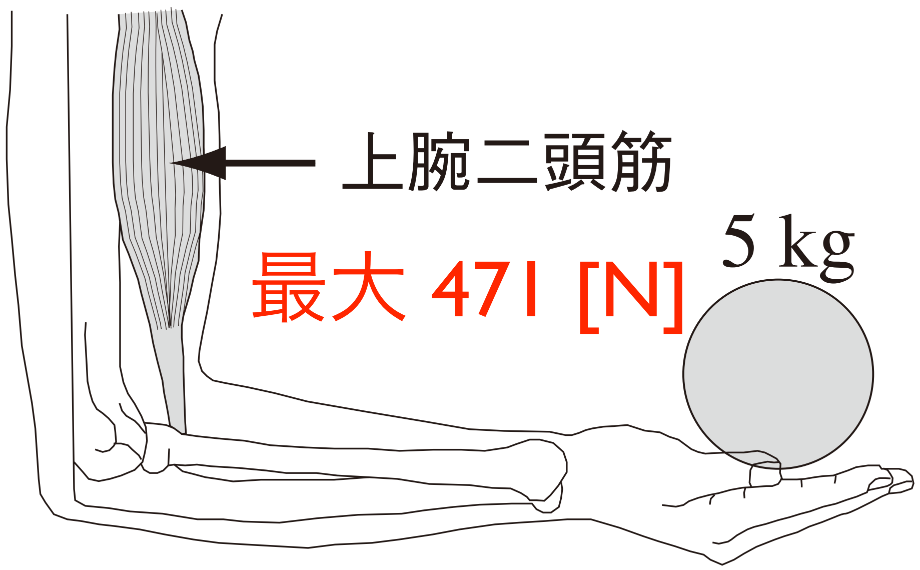
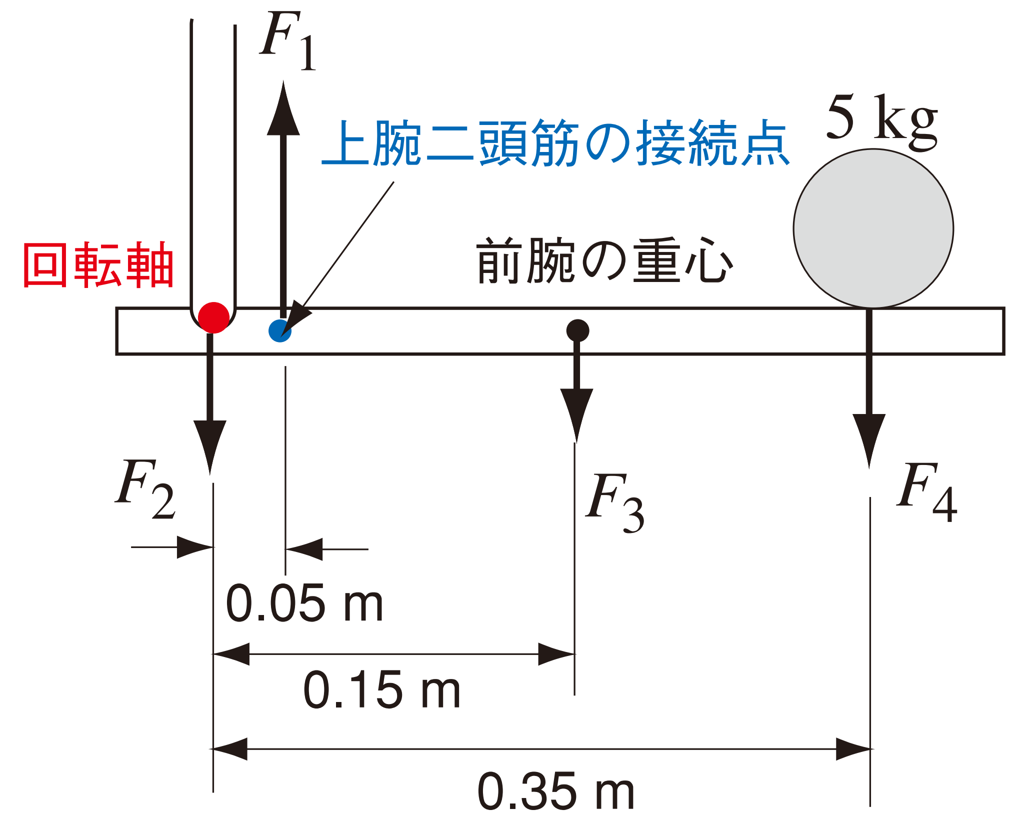



図 2-60　Ca 濃度と発生張力
筋節長により関係が変わる例を示す。(Endo：Nature, 237, New Biol., 211, 1972 より)

標準生理学P100




$$F_3 = 1.5\mathrm{g} = 14.7 \ [\mathrm{N}]$$

$$F_4 = 5\mathrm{g} = 49 \ [\mathrm{N}]$$

力のつり合い

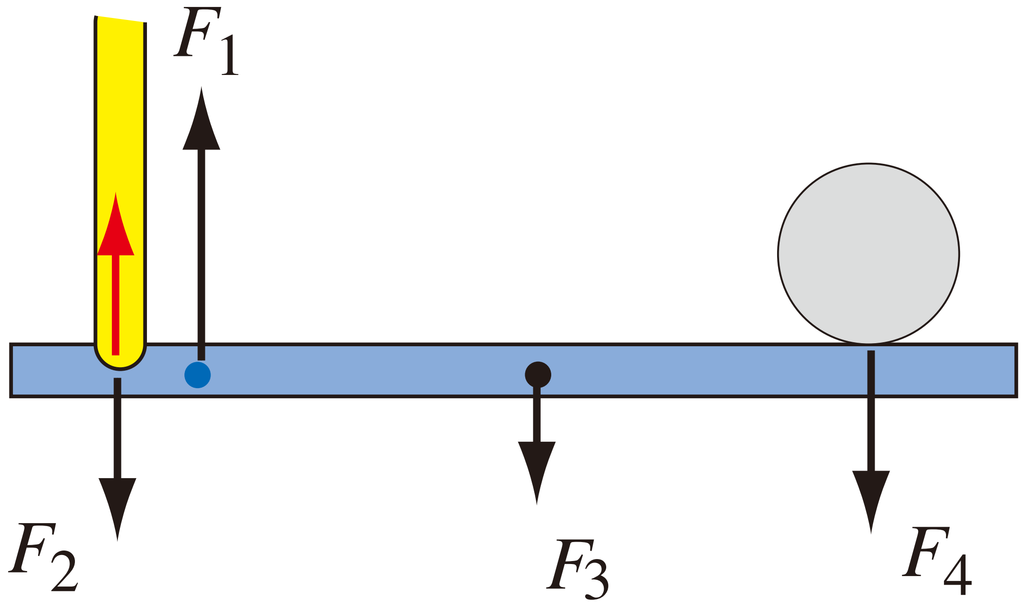
$$F_1 - F_2 - F_3 - F_4 = 0$$

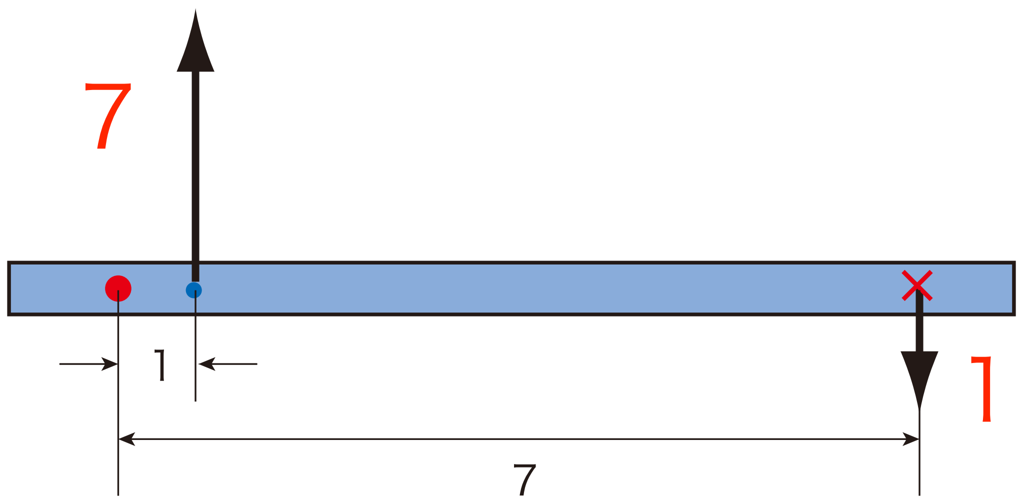
力のモーメント
のつり合い

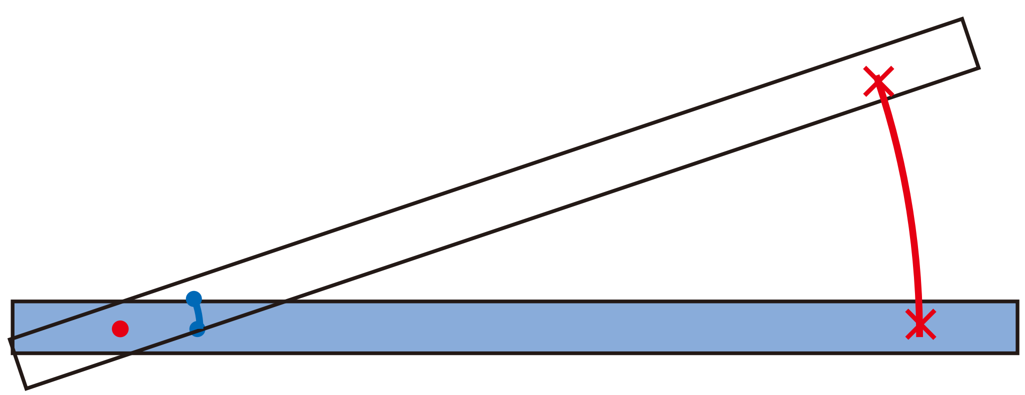
$$F_1 \times 0.05 - F_3 \times 0.15 - F_4 \times 0.35 = 0$$

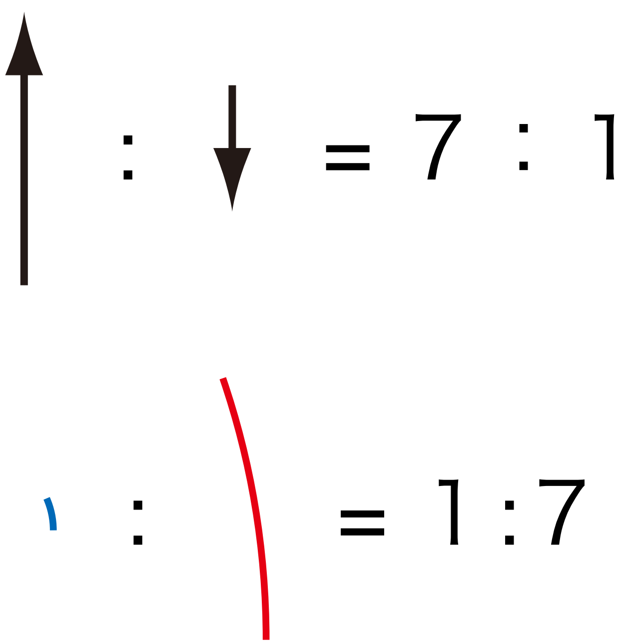
$$\longrightarrow \quad F_1 = 387.1 \ [\mathrm{N}], \ F_2 = 323.4 \ [\mathrm{N}]$$

39kg相当分


F1
F2
F3
F4


7
1
1
7




: = 7 : 1
: = 1 : 7