

手書きでレポートを作成して、写真を撮って提出して下さい。締切：7/6(月)

図1のように、質量 m_1 の原子 A と質量 m_2 の原子 B が結合している分子を考える。2つの原子はたがいに力を及ぼし合っており、原子 B から原子 A に働く力を F とする。簡単のために、2つの原子が互いに及ぼしあう力のほかには、外部から働く力はないものとする。図1に示したように、AB を結ぶ直線を x 軸とする。

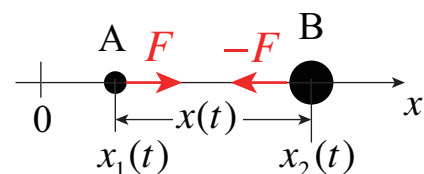


図1

この2つの原子が x 軸上を運動する場合を考える。原子 A の位置 $x_1(t)$ と原子 B の位置 $x_2(t)$ を用いると、それぞれの原子の運動方程式は

$$m_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} = F, \quad m_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} = -F$$

となる。一般に F は原子 A と B の相対位置

$$x = x_2 - x_1$$

の関数である。

(1) 分子の重心の座標 $x_G(t)$ を $x_1(t), x_2(t), m_1, m_2$ を用いて表せ。

(2) 重心の運動方程式が

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2 x_G(t)}{dt^2} = 0$$

となることを示せ。

(3) 重心は等速運動をするか静止している。その理由を説明せよ。

(4) 2つ原子の相対運動の方程式が

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -F$$

となることを導け。ただし、 $x(t) = x_2(t) - x_1(t)$ で m は

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

で定義される量で、換算質量とよばれる。

以下、力 F が x の関数であることを明確にするために $F(x)$ と書く。

(5) 原子間距離を x から ∞ まで広げるために必要な仕事は

$$W = \int_x^\infty F(x) dx$$

となることを示せ。

(6) 原子間に働く力が引力だとすると、原子間距離が x の状態である分子の位置エネルギー $U(x)$ と原子間距離が ∞ の状態である分子の位置エネルギー $U(\infty)$ はどちらが大きい。理由を明確にして答えよ。また、

$$U(\infty) - U(x) = \int_x^\infty F(x) dx$$

となることを示せ。

(7) 位置エネルギー $U(x)$ が分かっているとき、(6) の結果から

$$F(x) = \frac{dU(x)}{dx}$$

と表すことができることを示せ。

(8) 位置エネルギー $U(x)$ が図2に示したような関数であるとき、関数 $U(x)$ が極小となる $x = R$ が安定な原子間距離であることを説明せよ。

(9) 2つの原子の相対運動の力学的エネルギー E を $E = -U_0 + \varepsilon$ (ただし $\varepsilon > 0$) と表すとき、 ε がある限界を超えると分子の結合が切れてしまう。分子の結合が切れないための ε の範囲を求めよ。

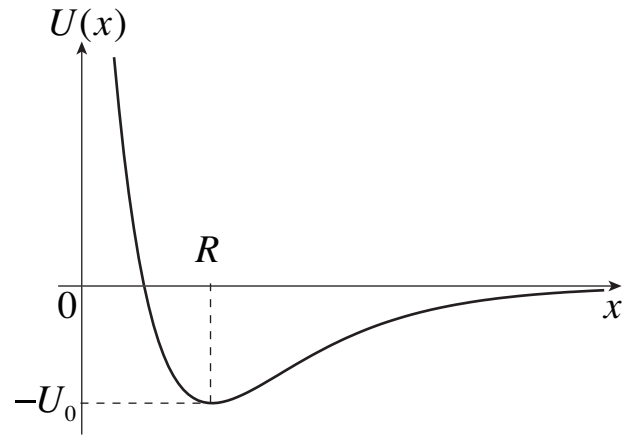


図2

2原子分子の相対運動に関する位置エネルギー $U(x)$ は現実的なモデルとしてモース関数

$$U(x) = U_0 \left[e^{-2\alpha(x-R)} - 2e^{-\alpha(x-R)} \right]$$

がよく使われる。ここで、 α は正の定数である。

(10) モース関数の α はどのような単位を持つ量か。

(11) ε が十分小さいとき、分子の相対運動は平衡点 $x = R$ の近傍における微小振動となる。

(a) $\alpha|x - R| \ll 1$ のとき $U(x)$ の近似式を $\alpha^2(x - R)^2$ の項まで導き、原子間力の定数 (ばねの場合のばね定数に相当する係数) k を求めよ。ただし、指数関数は $|z|$ が十分に小さいとき

$$e^z \doteq 1 + z + \frac{1}{2}z^2$$

と近似できる。

(b) 相対運動の微小振動は単振動と考えることができることを説明せよ。

(c) 単振動の振動数 f (振動数は周期の逆数) を換算質量 m と α, U_0 を用いて表せ。

(d) 単振動の振幅 r を ε, α, U_0 を用いて表せ。

一酸化炭素分子について考える。すなわち、原子Aが炭素(C)、原子Bが酸素(O)である。原子の質量 m_1 と m_2 はそれぞれ 12.00u と 15.99u である。ただし $1\text{u} = 1.660 \times 10^{-27}\text{kg}$ である。一酸化炭素分子について $f = 6.494 \times 10^{13}\text{Hz}$, $U_0 = 1.780 \times 10^{-18}\text{J}$, $R = 1.128 \times 10^{-10}\text{m}$ であることが知られている。

(12) 観測値を用いてモース関数の α の値を求めよ。

(13) 分子の微小振動の振動数に近い電磁波を照射すると、共鳴によって一酸化炭素分子が振動を始める。そのような共鳴を起こす電磁波の波長 $\lambda[\text{m}]$ を求めよ。また、その電磁波は遠赤外線から紫外線のどれに相当するか。なお、光の速さは $c = 3.00 \times 10^8\text{m/s}$ で、

$$c = \lambda \times f$$

が成立する。

10^{-4}m \sim 10^{-5}m \sim 10^{-6}m \sim 10^{-7}m \sim 10^{-8}m
 遠赤外線 赤外線 可視光線 紫外線