

総合教養ゼミナール 現代物理学

担当 田村 圭介 ktamura@u-fukui.ac.jp

予定

月1	10/5	10/12	10/19	10/26	11/2	11/9	11/16		11/30	12/7	12/14	12/21		1/18	1/25	2/1
木1								11/26								

 相対性理論

 量子力学

合否判定

「相対性理論」と「量子力学」について、それぞれ、レポートを提出

出席をして講義を聞くことが必須

出席・質問カードを使用

出席管理システムは利用しません



概要

相対性理論

「どんな観測者にとっても光の速度は一定である」この一言でわれわれの常識が覆されることになる。「光と同じ速度で走ったら光はどのように見えるのだろうか」この疑問を少年時代のアインシュタインは抱いた。この問題に対する解答が「相対性理論」である。この解答は奇妙な予言を含んでいた。「時間の遅れ」「距離の収縮」「空間の歪み」さらには「ブラックホール」という不思議な世界へと誘う。現代物理学は「相対性理論」に基づいて宇宙の成り立ちについての定量的な議論を可能としている。医学とは無関係な純粋物理のお話ではない。「相対性理論」と「量子力学」の融合によって、宇宙には「反粒子」が存在することが予言された。陽電子放射断層撮影(PET)で使われている「陽電子」とは、電子の反粒子である。

量子力学

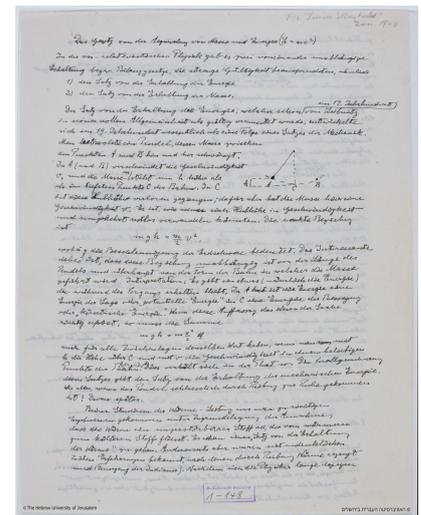
極微の世界の自然法則は摩訶不思議である。「粒子」は「波」だし、「波」は「粒子」である。禅問答ではなく、「粒子」とか「波」という分類は人間の勝手な概念である。このような摩訶不思議な原理にしたがって原子の世界は成り立っている。人類は摩訶不思議な世界を「計算」する方法を見つけ出した。すなわち「量子力学」である。摩訶不思議な世界の法則「量子力学」は不思議な世界へと誘う。「量子力学」は原子の成り立ちについて猛烈に正しい結果を予言する。タンパク質も「計算」できる。現代の電子機器は「量子力学」よって動いているといっても過言ではない。医療機器やあらゆる電子機器の中に入っている半導体の働きは、量子力学を使わなければ説明できない。化学反応を理解するには「量子力学」が必要である。様々な原子・分子のイオン化エネルギーや結合エネルギーも、炭素原子の結合の手が4つある理由も、オゾン層が紫外線を遮る理由も、発光ダイオード(LED)が光るのも「量子力学」が説明をしてくれる。

アインシュタイン年譜

- 1879 (明治12) 0 3月14日 ドイツ・ウルム市に生まれる。長男。妹(アリア)は1881年誕生
- 1885 (明治18) 6 ムンヘンの小学校に入学。家でユダヤ教の基本を教えられる。
坚信礼(confirmatio)は施されなかった。ヴァイオリンを習い始める。(13歳まで)
- 1889 (明治22) 10 ムンヘンのルイトポルト州立学校に入学、
幾何学の本を読み、驚く。微積分学を含む数学の基礎に慣れ親しむ。
- 1894 (明治27) 15 州立学校中途退学。父を追ってミラノへ。
- 1895 (明治28) 16 (2歳不足ながら特別許可で受験した)スイス連邦工科大学ETH
入学試験に落ちて、スイス・アーラウの州立学校へ入学。
自伝ノートには16歳の頃、光のパラドックスに考えが及んだ、と記述されている。
- 1896 (明治29) 17 スイス連邦工科大学ETH入学(教職コース)。ドイツ市民権放棄。以降5年間無国籍。
- 1900 (明治33) 21 スイス連邦工科大学卒業。最初の論文『毛管現象からの二、三の帰結』受理される。
- 1901 (明治34) 22 スイスの市民権を得る(以後終生スイス市民権を確保。のちドイツ、アメリカと二重国籍)。
スイス兵役不適合。高校臨時教員。
ETHの同級生ミレバ・マリッチ Mileva Maric との間に女兒リーゼをもうけ、結婚。
のちに男児2人(ハンス・アルバートとエドゥアルト)が生れる。
- 1902 (明治35) 23 スイス・ベルンのスイス特許局3級技師に採用。正式に採用されるのは2年後、
1906年に2級職に昇進。
- 1905 (明治38) 26 3月18日 『光の発生と変換に関する一つの発見的な見地について』(光电効果論文)
- 1905 (明治38) 26 5月11日 『熱の分子論から要求される静止液体中の懸濁粒子の運動について』
(ブラウン運動論文)
- 1905 (明治38) 26 6月30日 『動いている物体の電気力学』(特殊相対論論文)
- 1905 (明治38) 26 9月27日 『物体の慣性はその物体の含むエネルギーに依存するであろうか』
(特殊相対論第2論文)
- 1905 (明治38) 26 学位論文『分子の大きさの新しい決定法』
古典的流体力学と拡散理論を結びつけて分子の大きさ、
アボガドロ数などを決める新方法を提示。
(アインシュタインの論文のなかで最も引用度が高い)。
- 1906 (明治39) 27 『光の発生と光の吸収の理論について』『ブラウン運動の理論』
- 1907 (明治40) 28 『輻射に関するプランクの理論と比熱の理論』(固体の比熱の量子理論)
わが生涯で最も素晴らしい考え(等価原理)
- 1908 (明治41) 29 スイス・ベルン大学講師。
- 1909 (明治42) 30 10月 特許局を辞任、スイス・チューリヒ工科大学定員外教授。
- 1910 (明治43) 31 スイス・プラハ大学教授。
- 1911 (明治44) 32 『光の伝播に対する重力の影響』
- 1911 (明治44) 32 第1回のソルベー会議に出席。
ポアンカレ、キュリー、プランク、ランジュバンらを知る。
- 1912 (大正1) 33 母校、スイス・チューリッヒ工科大学の教授に。
グロスマンよりリーマン幾何学を時空の幾何学に応用することを教えられる。
- 1914 (大正3) 35 プロイセン科学アカデミー特別俸給付会員。
ドイツ・ベルリン大学教授。ベルリンに単身赴任。ミレバと離婚。
- 1914 (大正3) 35 **第1次世界大戦が勃発**。
最初の政治的的反戦声明となるニコライ＝アインシュタイン宣言に署名。
- 1914 (大正3) 35 『一般相対性理論および重力論の草案』
- 1915 (大正4) 36 ドイツのカイザー・ウィルヘルム研究所(現在のマックス・プランク研究所の前身)所長。
- 1915 (大正4) 36 『水星の近日点の移動に対する一般相対性理論による説明』
- 1916 (大正5) 37 『一般相対性理論の基礎』『Hamiltonの原理と一般相対性理論』『量子論による輻射の放出と吸収』従姉エルザと結婚。
- 1917 (大正5) 38 一般相対性理論についての宇宙論的考察。宇宙項を導入した論文。



1905ごろ



$E = mc^2$ についての論文



第1回ソルベー会議

1919 (大正8) 40 **第1次世界大戦終結**。ドイツ帝政崩壊。ベルサイユ体制。

11月6日 英国の天文学者A.Eddingtonが、
この年の5月に西アフリカで起きた皆既日食の観測で、
重力場による光の屈曲が、
一般相対性理論の予言通りであることを発表。

1922 (大正11) 43 『Stern と Gerlachの実験についての量子論的注意』

フランス訪問、国際連盟学芸協力委員、

1921年度Nobel物理学賞を受賞。

一報は、日本に来る途中の船上、

11月17日(上海から神戸港)来日、

全国各地で講演、12月29日(門司港から上海へ)。



Berlin 1920



日本 1922

1923 (大正12) 44 パレスチナ訪問、スペイン訪問、

1924 (大正13) 45 ベルリンへ帰る、

1924 (大正13) 45 Bose-Einstein統計の理論を発表、

1924 (大正13) 45 『一原子理想気体の量子論』

1925 (大正14) 46 『重力および電気の統一理論』(統一場理論の研究を始める)

1929 (昭和4) 50 Hubbleにより、宇宙が膨張していることが報告される、

Einsteinは宇宙項の導入を撤回しなければならなくなった、

1930 (昭和5) 51 アメリカ・カリフォルニア工科大学客員教授、

1933 (昭和8) 54 **Hitlerが政権につき、ナチによる迫害を逃れ、**

ベルギーからイギリスを経てアメリカに亡命、

プリンストン高等研究所教授、

1935 (昭和10) 56 『物理的实在についての量子力学的記述は完全であると考えられるであろうか』

Einstein-Podolsky-Rose(EPR)パラドクスとして知られる、

量子現象の非局所的解釈を攻撃し、決定論的因果性(局所性原理)を擁護、

1938 (昭和13) 59 妻エルザ死去、

1939 (昭和14) 60 8月2日 ルーズベルト大統領に原子爆弾の研究をすすめる手紙を送る、

(亡命科学者L・シラードとE・テラーの要請によって口述・署名)

9月1日 **第二次世界大戦勃発**(ドイツがポーランドに侵攻)

1940 (昭和15) 61 アメリカ市民権を得る、

1941 (昭和16) 62 真珠湾奇襲

1845 (昭和20) 66 8月**広島・長崎に原子爆弾投下**

1947 (昭和22) 68 国連総会に世界政府樹立を提唱するメッセージ

1949 (昭和24) 70 最後の論文(物理の著作261本め)『一般相対性理論における粒子の運動』

1955 (昭和30) 76 4月11日 核廃絶のバグウォッシュ会議創設を訴える。ラッセル=アインシュタイン声明

1955 (昭和30) 76 4月13日 以前から分かっていた腹部大動脈瘤が破裂し出血が始まったが手術拒否、

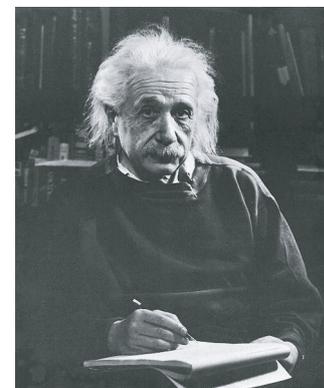
4月18日 プリンストン病院にて動脈瘤破裂のため死去、



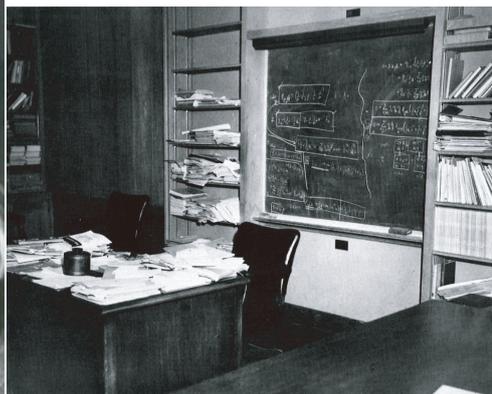
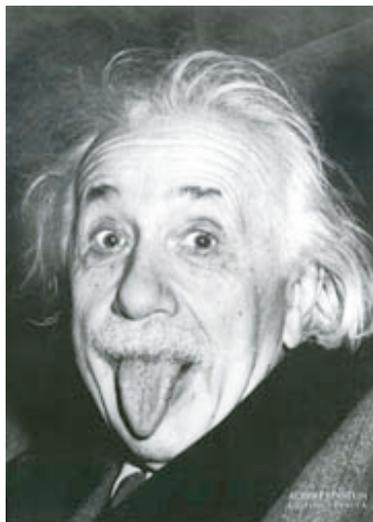
Violin, 1929



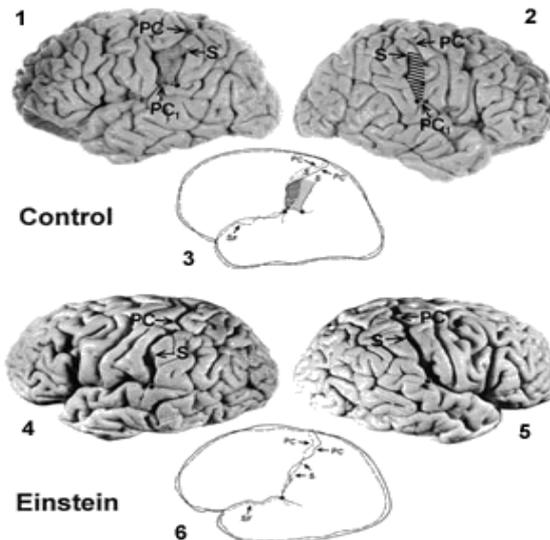
Santa Barbara, 1933



1947



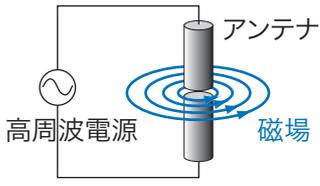
The last blackboard



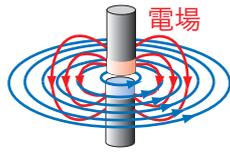
1. 相対性理論前夜

1.1 電磁波と光

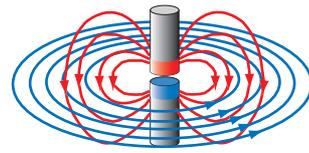
電磁波を作る方法



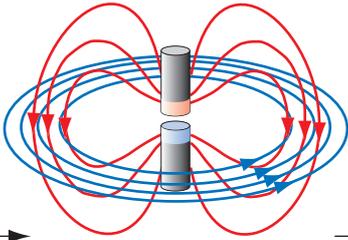
アンテナを流れる上向き
の電流最大
電圧0、電荷0



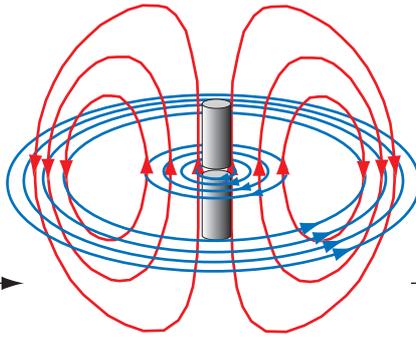
電流減少、電圧増大
アンテナの端に電荷発生



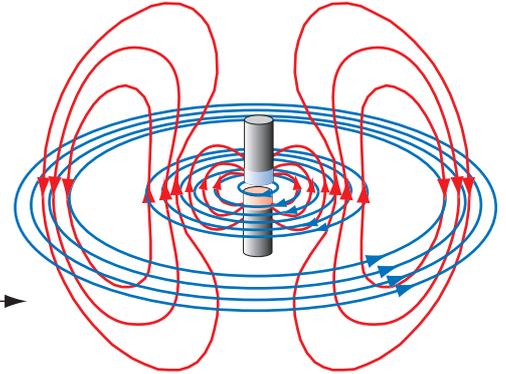
電流0、電圧最大
電荷最大



下向き
の電流増大
電圧減少、電荷減少

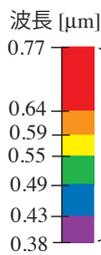
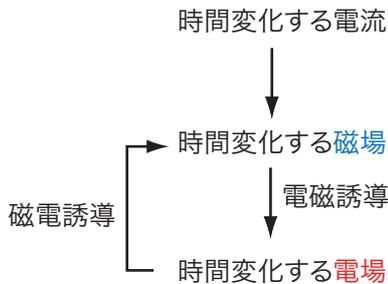
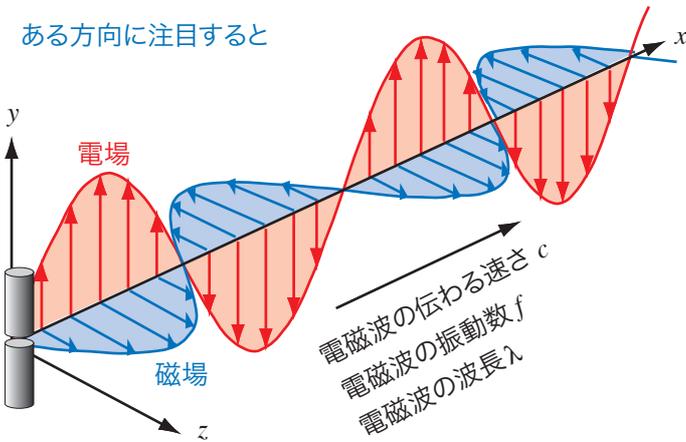


下向き
の電流最大
電圧0、電荷0



下向き
の電流減少
逆向き
の電圧増大、電荷発生

ある方向に注目すると



光は電磁波の一種

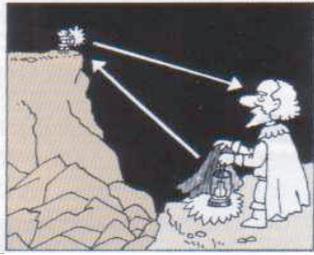
電磁波の分類

波長 [m]	名称	振動数 [Hz]	光子のエネルギー [J]	光子1 mol 分のエネルギー [kJ/mol]
10^5	VLS 超長波	10^3	10^{-30}	10^{-9}
10^4	LF 長波	10^4	10^{-29}	10^{-8}
10^3	MF AMラジオ 中波	10^5	10^{-28}	10^{-7}
10^2	HF 無線通信 短波	10^6	10^{-27}	10^{-6}
10	VHF テレビ 超短波	10^7	10^{-26}	10^{-5}
1	UHF 移動体通信 極超短波 携帯電話	10^8	10^{-25}	10^{-4}
10^{-1}	SHF レーダー センチ波	10^9	10^{-24}	10^{-3}
10^{-2}	EHF 衛星通信 ミリ波	10^{10}	10^{-23}	10^{-2}
10^{-3}	サブミリ波	10^{11}	10^{-22}	10^{-1}
10^{-4}	電波望遠鏡	10^{12}	10^{-21}	1
10^{-5}	遠赤外線	10^{13}	10^{-20}	10^1
10^{-6}	赤外線	10^{14}	10^{-19}	10^2
10^{-7}	近赤外線	10^{15}	10^{-18}	10^3
10^{-8}	可視光線	10^{16}	10^{-17}	10^4
10^{-9}	紫外線	10^{17}	10^{-16}	10^5
10^{-10}	真空紫外線	10^{18}	10^{-15}	10^6
10^{-11}	X線	10^{19}	10^{-14}	10^7
10^{-12}		10^{20}	10^{-13}	10^8
10^{-13}		10^{21}	10^{-12}	10^9
10^{-14}	γ線	10^{22}	10^{-11}	10^{10}

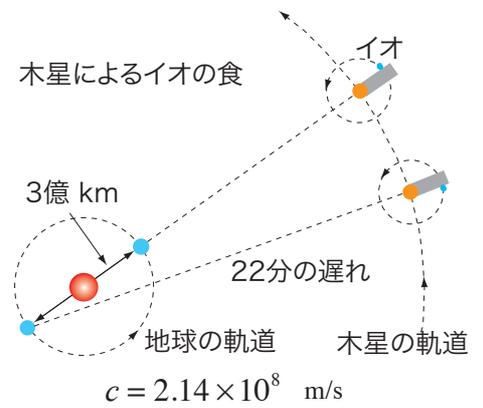
光速度の測定



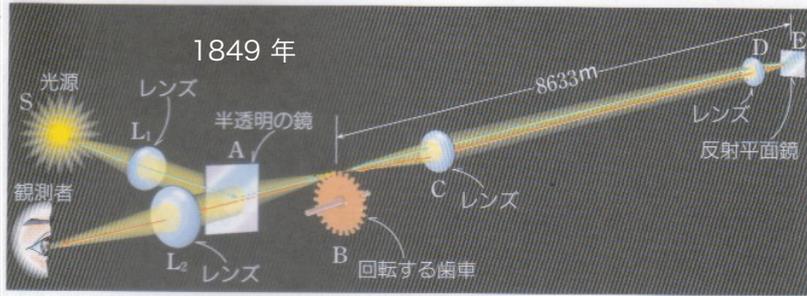
Galileo Galilei
1564 - 1642



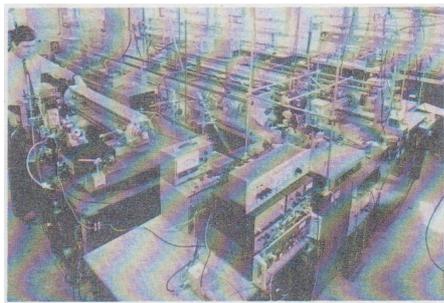
Olaf (Ole) Roemer
1644-1710



A. H. L. Fizeau
1819-1896



最も暗くなる条件 歯車の枚数:720 歯車の回転速度:12.6 回/s
 $c = 2 \times 8633 \times 720 \times 12.6 \times 2 = 3.13 \times 10^8$ m/s



1970年代にレーザーを用いた精密測定がおこなわれた。

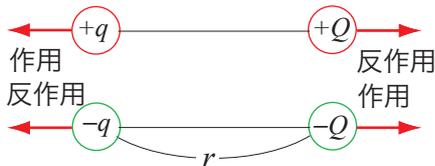
$$c = 299792.4588 \pm 0.0002 \text{ km/s}$$

しかし、長さの誤差が支配的となり、現在ではメートルは、1秒の $1/299792458$ の時間に光が真空中を伝わる行程として定義されている。

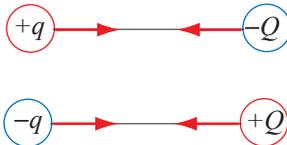
光速度の正体

電気力

同じ符号の電荷は斥力



異なる符号の電荷は引力

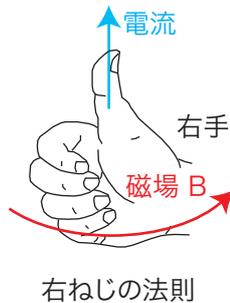
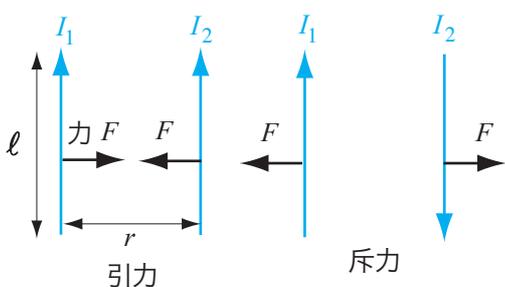


$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2}$$

誘電率

$$\epsilon_0 = 8.854187817 \dots \times 10^{-12} \left[\frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \right]$$

磁気力



$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r} \ell$$

透磁率

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \left[\frac{\text{N}}{\text{A}^2} \right]$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8.854187817 \times 10^{-12} \times 4\pi \times 10^{-7}}} = 2.99792458 \times 10^8 \text{ [m/s]}$$

光速

マクスウェル方程式(1873年): 電磁気学の基礎方程式。すべての電磁気現象はこの方程式で理解できる。

クーロンの法則

$$\frac{\partial}{\partial x} E_x(x,y,z,t) + \frac{\partial}{\partial y} E_y(x,y,z,t) + \frac{\partial}{\partial z} E_z(x,y,z,t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x,y,z,t)$$



J.C. Maxwell, 1831-1879

19世紀最大の物理学者。15歳のころ卵型曲線の論文を発表して学会を驚かせた。気体分子の速度分布則、電磁気学の理論を研究。48歳に母と同じ胃ガンで亡くなった。

単極の磁石はない

$$\frac{\partial}{\partial x} B_x(x,y,z,t) + \frac{\partial}{\partial y} B_y(x,y,z,t) + \frac{\partial}{\partial z} B_z(x,y,z,t) = 0$$

電磁誘導の法則(磁場が時間変化すると電場ができる)

$$\frac{\partial}{\partial y} E_z(x,y,z,t) - \frac{\partial}{\partial z} E_y(x,y,z,t) = -\frac{\partial}{\partial t} B_x(x,y,z,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} E_x(x,y,z,t) - \frac{\partial}{\partial x} E_z(x,y,z,t) = -\frac{\partial}{\partial t} B_y(x,y,z,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E_y(x,y,z,t) - \frac{\partial}{\partial y} E_x(x,y,z,t) = -\frac{\partial}{\partial t} B_z(x,y,z,t)$$

アンペールの法則(電流のまわりに磁場ができる)および磁電誘導(電場が時間変化すると磁場ができる)

$$\frac{\partial}{\partial y} B_z(x,y,z,t) - \frac{\partial}{\partial z} B_y(x,y,z,t) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} E_x(x,y,z,t) + i_x(x,y,z,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} B_x(x,y,z,t) - \frac{\partial}{\partial x} B_z(x,y,z,t) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} E_y(x,y,z,t) + i_y(x,y,z,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} B_y(x,y,z,t) - \frac{\partial}{\partial y} B_x(x,y,z,t) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} E_z(x,y,z,t) + i_z(x,y,z,t)$$

電場は y 成分だけで, x と t だけの関数 $E_y(x,t)$

磁場は z 成分だけで, x と t だけの関数 $B_z(x,t)$

電荷がない $\rho(x,y,z,t) = 0$

電流がない $i_x(x,y,z,t) = 0, i_y(x,y,z,t) = 0, i_z(x,y,z,t) = 0$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x} E_y(x,t) = -\frac{\partial}{\partial t} B_z(x,t) \quad -\frac{\partial}{\partial x} B_z(x,t) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} E_y(x,t)$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} E_y(x,t) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial}{\partial t} B_z(x,t) \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial}{\partial x} B_z(x,t) \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} E_y(x,t) \right)$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y(x,t) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_y(x,t) \quad \rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E_y(x,t) = 0$$

波動方程式

波動方程式の意味

ある関数 $f(x)$ を考える。微分可能なものであれば、どんな関数でもよい。話を分かりやすくするために、右図の黒い曲線のように $x=0$ での関数の値 $f(0)$ が最大となる山型の関数を考えてみる。この関数の変数 x を

$$x-vt$$

と置き直してみる。ここで、 v は定数で、 x と t は変数とする。

変数 x は位置を表し、変数 t は時刻を表す。このようにして作った新しい関数

$$f(x-vt)$$

について考えてみる。まず、時刻を $t=0$ としてみると、関数は $f(x)$ となって、元の関数と同じである。グラフでは黒い曲線となる。時刻 t をゼロでない値にすると、新しい関数の頂点の位置がずれることになる。関数の頂点は括弧の中身がゼロのときだから

$$x-vt=0 \quad \text{すなわち} \quad x=vt$$

が頂点の位置となる。つまり、時刻 $t=0$ と比べて、全体が vt だけ右にずれたものとなっている。グラフでは赤い曲線となる。このように、時刻が経過していくと、関数の位置は一定の割合で右へ進んでいく。単位時間あたりの移動距離、すなわち、速度は v となっている。以上のことから、関数 $f(x-vt)$ は速度 v で右へ進行する波を表していることが分かる。この波を表す関数 $f(x-vt)$ を x と t で、それぞれ、微分してみると

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x-vt) = f'(x-vt) \qquad \frac{\partial}{\partial t} f(x-vt) = -v \times f'(x-vt)$$

となる。ここで f' は関数 $f(x)$ の一次導関数である。さらにもう一度微分をすると

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x-vt) = f^{(2)}(x-vt) \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x-vt) = v^2 \times f^{(2)}(x-vt)$$

となり、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x-vt) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x-vt)$$

の関係があることが分かる。この関係が波動方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f(x-vt) = 0$$

である。さらに、マクスウェル方程式からの結果と比較すると、電磁波の速度が

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

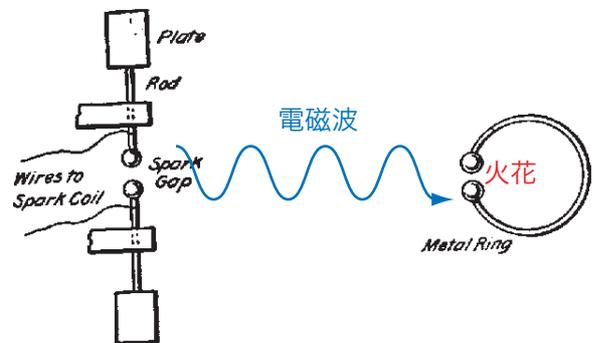
であることが分かる。

電磁波の確認と応用

Heinrich Rudolph Hertz (1857 - 1894) Germany



マクスウェルが電磁波の存在を理論的に予言したのは1864年であった。それから20年後の1888年、その実在を実験で確認した。マクスウェルの理論を整理して、現在の形式にまとめた。



Guglielmo Marconi (1874 - 1937) Italy



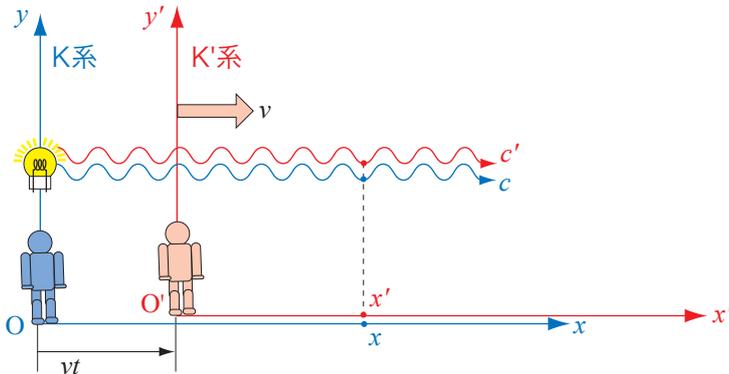
1894年、その年37歳の若さでなくなったヘルツの実験を科学雑誌で知る。
1895年には、1700m離れた丘の上から無線通信を行うことに成功した。
1901年、大西洋横断通信に成功。
1909年、ノーベル物理学賞受賞。

1.2 ガリレイの相対性原理

相対性原理

たがいに等速運動をしているすべての慣性系において、すべての基本的運動法則はまったく同じ形となる

等速運動をする2つの座標系 K と K' を考える



2つの座標系の関係(ガリレイ変換)

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z$$

2つの座標系での速度の関係

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v, \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt}$$

2つの座標系での光の速度の関係

$$c' = c - v$$

困ったこと

- 座標系によって光の速度は変わる。c = 30万 km/s という光速はどの座標系においてのものなのか?
- 静止系における速度が c = 30万 km/s ならば、光の速度を測定すれば静止系に対する速度が分かる?
- そもそも宇宙における静止系とはなにか?
地球は太陽の回りをまわっている。太陽は銀河のなかを動いている。銀河も運動している。

アインシュタイン「相対性理論」(1949年) 講談社文庫「晩年に想う」より

数学というものはもっぱら諸概念相互のあいだの関係を取り扱い、それらと経験とのあいだの関係は考慮しません。物理学もまた数学的概念をとり扱います。しかしこれらの概念は経験の対象との関係を明確に決定することによってはじめて物理的内容を獲得するものです。これは、運動、空間、時間の概念においてとくにそうです。

相対性理論はこれら三つの概念の首尾一貫した物理的解釈に基づいた物理的理論です。「相対性理論」という名前の由来は、運動というものが経験的可能性の見地からすればつねに一つの対象の他にたいする相対的運動と見られるという事実によるものです。運動は「空間に対する運動」とか、いわゆる「絶対運動」とかの形では決して観測できません。もっとも広い意味における「相対性原理」は次の命題に含まれています。

「物理現象の全体は、なんら『絶対的運動』の概念を導入する根拠を与えないような性質のものである。すなわちより短く、ただしより不正確には言えば『絶対的運動は存在しない』」

かような否定的命題は我々の洞察になんら益するところがないように見えるかもしれませんが。しかし実際はそれは自然の諸法則に対する強い制限となります。この意味で相対性理論と熱力学のあいだに類似点があります。後者もまた「永久運動は存在しない」という否定的命題に基づいているのですから。

古典力学における時間空間の物理的解釈

物理的見地からすれば幾何学とは、互いに静止している剛体のある関係に配置することができると述べている法則の全体です。かような解釈にはユークリッド的法則が成り立つということが仮定されています。物理学は空間時間の中における「事象」を取り扱います。それぞれの事象にはその空間座標の他に時間値 t が付随しています。後者はほとんど空間的の広がりをもたない時計により測りうるものと考えられていました。

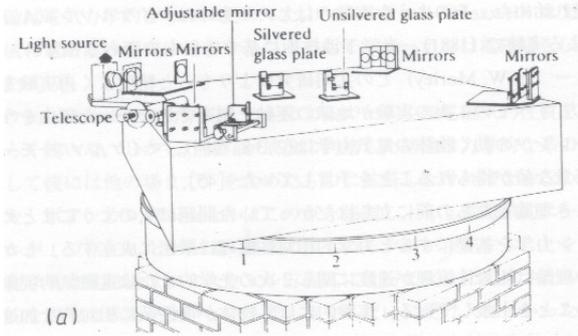
古典力学はガリレオの原理に基づいています。すなわち物体は他の物体が働きかけなければ一様な直線運動を行います。この命題はいわゆる「慣性系」にたいしてのみ妥当性を主張できるものです。いろいろな慣性系は互いに一様な直線運動を行っています。古典力学においては、諸法則はすべての慣性系に関してのみ妥当性を保証できるものです(相対性原理)。

さて特殊相対性理論を導いたディレンマを理解することは容易です。経験および理論によって、真空中の光は色や光源の運動状態によらず同一の速度 c で伝搬する(光速一定の原理)という確信が徐々に生まれてきました。ところが初歩的な直感的考察では同じ光線がすべての慣性系にたいして同じ速度 c で運動することは不可能なように思われます。すなわち「光速一定の原理」は「相対性原理」と矛盾するようになります。

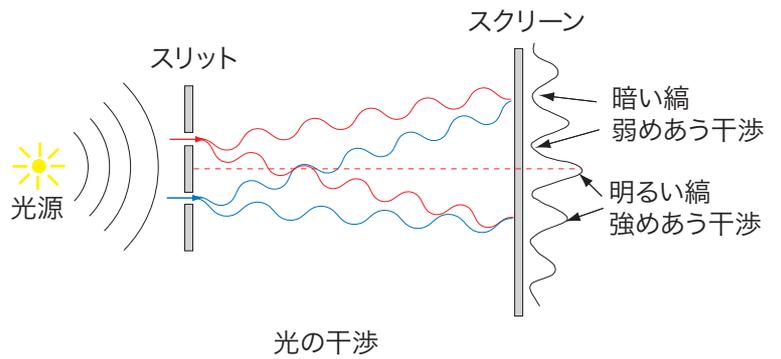
しかしながらこの矛盾は、実は時間 — というよりはむしろ隔たった事象の同時性 — の絶対的性格にかんする偏見に基づいた見かけ上のものです。

1.3 マイケルソン - モレーの実験 (1887年)

宇宙のどこかにはあるはずの「絶対静止系」(エーテル)に対する地球の速度を測定する

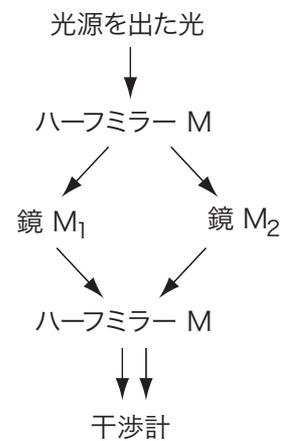
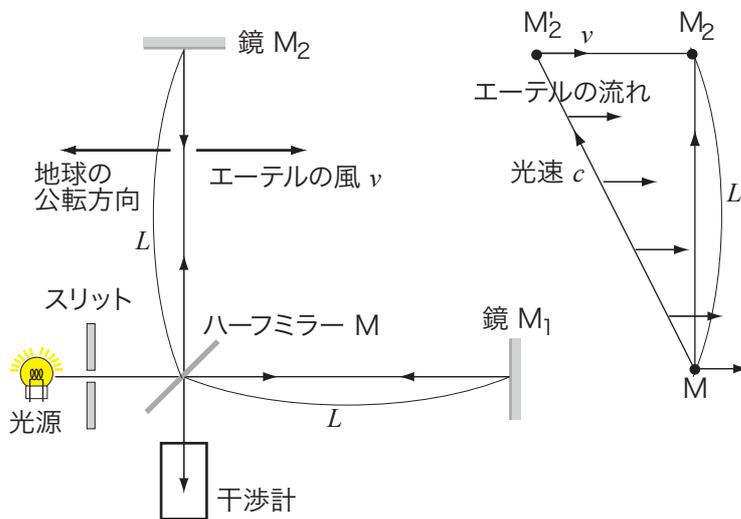


マイケルソン - モレーの実験装置



光の干渉

マイケルソン - モレーの実験の説明



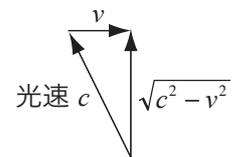
□ 経路 M - M₁ - M

$$T_1 = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = \frac{2cL}{c^2 - v^2}$$

光速
行き: 追い風 $c+v$
帰り: 向い風 $c-v$

□ 経路 M - M₂ - M

$$T_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$



□ 光路差

$$\Delta L = c(T_1 - T_2) = \frac{2L}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} - \frac{2L}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \neq 0$$

□ 装置を水平面内で 90°回転させる。

干渉縞の移動 → エーテルに対する地球の速度 v が分かる

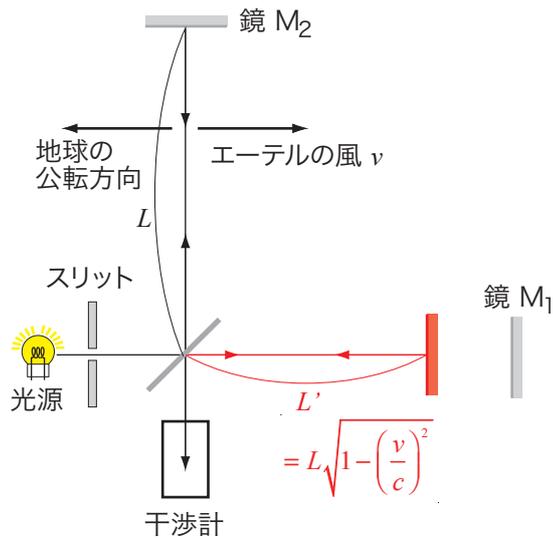
□ 実験結果

測定の季節を変えても $v=0$

→ エーテル(光が伝わる媒質)の影響はない

1.4 ローレンツの理論(イイワケ) 1892年

運動の方向には $\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ の割合だけ距離が収縮する(ローレンツ収縮)。



□ 経路 M - M₂ - M

$$T_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

□ 経路 M - M₁ - M

$$T_1 = \frac{2cL}{c^2 - v^2}$$

$$\rightarrow \frac{2cL\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{c^2 - v^2}$$

$$= \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = T_2$$



Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928)

光の電磁理論に基づいて光の屈折と物質の密度の関係を発見した。結晶光学と金属光学の問題も扱い電磁光学の基礎部分を作り上げた。マクスウェルの電磁論に基づいて電磁波、光、電子の研究をし、ゼーマン効果の理論を提出した。エーテルに対して運動する地球上の光学的影響が検出できなかったマイケルソン・モーリーの実験から、高速で運動する物体は運動方向に短縮するというローレンツ収縮を発表し、続いてローレンツ変換を発表した。

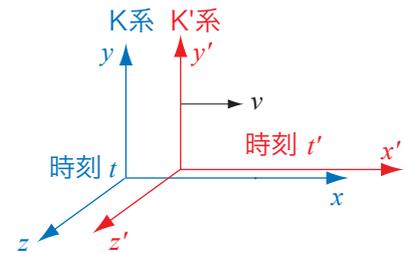
2つの経路で時間差がなくなり光の干渉は生じない。マイケルソン - モーリーの実験結果を説明できる。

なぜ、ローレンツ収縮が起きるのかを説明していない。

さらに、ローレンツは考察を進めて、マイケルソン - モーリーの実験結果をマクスウェル方程式と矛盾しないように説明するための方法を発見した。

ローレンツは静止座標系 K に対して、速度 v で x 軸方向に等速運動している座標系 K' について、

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, y' = y, z' = z, t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$



という座標変換を見いだした。これらの関係式はローレンツ変換と呼ばれている。しかし、ローレンツは絶対静止系であるエーテルとそれに対して運動する座標系との関係を発見したと考えていた。

理論物理学の基礎(1940年)

場の時空的法則を精密に定式化することはマクスウェルの仕事でした。彼の組み立てた微分方程式によって、電磁場が偏った波の形で、しかも光の速度で伝わることを示されたときの彼の感情を想像してごらん下さい!かような経験は世界中で数えるほどの人々にしか恵まれないものです。この戦慄の瞬間において彼はかくも完全に解かれたように思えた光の不思議な性質が、その後数世代の人々を悩ますだろうとはよもや考えなかったでしょう。

ところでもし電磁場がその物質的な源とは独立な波として存在しうるならば静電的相互作用はもはや遠隔作用として説明するわけには行きません。そして電気力の場合に成り立つことは重力にたいしても退けることはできないでしょう。かくしてニュートンの遠隔作用はいたるところで、有限速度で広がる場に席をゆずることになりました。

かくして物理学者は場の理論のプログラムに固執することになりました。しかしそれは基礎付けと呼ばれるようなものではありません。なぜなら一貫した場の理論によって重力ならびに物質の素成分が説明されるかは誰にも分からないからです。かような事情ですから物質粒子はやはりニュートンの運動法則に従う質点として考えなければなりません。これはローレンツが電子論及び運動物体の電磁氣的現象の理論を作り上げたときに用いた方法です。

世紀の変わり目において、基礎的な考えはかような点まで到達していました。新しい現象の全体を理論的に洞察し理解することにおいては広大な進歩がなされましたが、物理学の統一的基础付けを行うことは、はるか彼方にあるように思われました。現世紀における発展は本質的には2つの理論的体系によって特徴づけられますそれは相対論と量子論であります。

2 特殊相対性理論

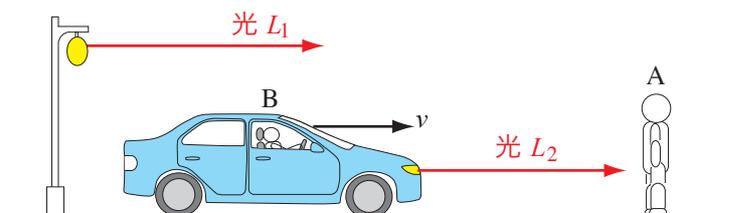
2.1 相対性原理と光速不変の原理

相対性原理

たがいに等速度運動をしているすべての慣性系(座標系)において、すべての基本的物理法則はまったく同じ形で表され、それらの慣性系のなかから特別なものを選び出すことはできない。

光速不変の原理(マイケルソン-モレーの結論)

いかなる慣性系から見ても、光の速さは一定の値 $c = 30$ 万km/s である。



常識的(ガリレイ的)には

	観測者 A	観測者 B
光 L_1	c	$c-v$
光 L_2	$c+v$	c

となると思っている。

光速不変の原理は、これらすべての光の速さが c であると言っている。

2.2 時間の遅れ

静止座標系において床から光を出し、高さ a の天井にある鏡で反射させて、再び床に戻るようにする。発光してから光が戻ってくるまでの時間を測定すると

$$t = \frac{2a}{c}$$

となる。同じ現象を速度 v で動いている座標系からみると、図のように光はななめに進行することになる。動いている観測者から見て、発光してから光が戻ってくるまでに時間 t' かかったとすると、光は

$$2\sqrt{a^2 + (vt'/2)^2}$$

の距離だけ走ったことになる。われわれの常識(ガリレイ的)には、ななめに進行する光の速度は $\sqrt{c^2 + v^2}$ となるはずなので、

$$\sqrt{c^2 + v^2} t' = 2\sqrt{a^2 + (vt'/2)^2}$$

という関係が成り立つはずである。両辺を自乗してみると

$$(c^2 + v^2)t'^2 = 4a^2 + (vt')^2 \quad \rightarrow \quad t' = \frac{2a}{c}$$

となつて、 $t = t'$ という常識的な結果を得ることになる。しかし、光速不変の原理に従えば、ななめに進行する光の速度も c となってしまうので、

$$ct' = 2\sqrt{a^2 + (vt'/2)^2}$$

の関係が成り立つことになる。この関係式の両辺を二乗して、 t' を求めると

$$t' = \frac{2a}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

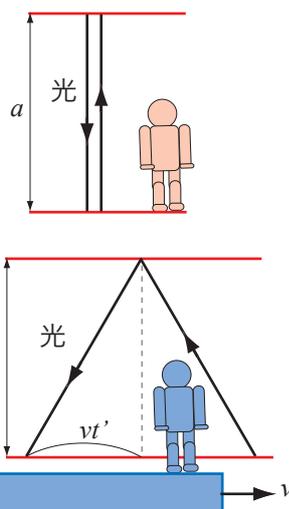
となり、式(1)を使って t と t' の関係を調べると

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

となっていることが分かる。すなわち、

運動している座標系の時間は静止している座標系の時間より「ゆっくり」進む

ことになる。



2.3 長さの収縮(ローレンツ収縮)

速度 v で走っている棒を考える。この棒と同じ速度で動いている観測者が見たとき、棒の長さが L_0 であるとする。さて、**静止している観測者**はこの棒の長さをどのように測定するだろうか。

測定方法には様々なものがあるだろうが、

1) 棒の右端が静止している観測者の前を通過する時刻を調べる。

静止している観測者の時計で、この時刻が t_1 であるとする。

「時計の遅れ」の議論で分かるように、**動いている観測者**の時刻は静止している観測者のものと異なっているので、動いている観測者が測定した時刻を t'_1 としておく。

2) 次に、棒の左端が静止している観測者の前を通過する時刻を調べる。**静止して**

いる観測者が測定した時刻を t_2 、**動いている観測者**が測定した時刻を t'_2 とする。

この結果、棒とともに**動いている**(棒に対して静止している)**観測者**が測定した棒の長さは $v(t'_2 - t'_1)$ となり

$$L_0 = v(t'_2 - t'_1) \quad (1)$$

の関係が成り立つ。同様に、**静止している観測者**が測定した棒の長さを L とすると

$$L = v(t_2 - t_1) \quad (2)$$

となる。「時計の遅れ」の議論から、**静止している観測者**の時間間隔 $t_2 - t_1$ と**動いている観測者**の時間間隔 $t'_2 - t'_1$ の間には

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (3)$$

の関係がある。式(3)に式(1)と(2)を代入すると

$$L = L_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

となり、静止している観測者にとって棒の長さは短くなることが分かる。この結果は、ローレンツがマイケルソンモレーの測定結果を説明するために仮定した距離の収縮と一致している。このため、この現象はローレンツ収縮と呼ばれている。

こんなことを言われても、「はいそうですか」と信じることができない人のために、別の説明をする。光源から光が出て、距離 L_0 離れた場所にある鏡で反射して、戻ってくるまでにかかる時間を考える。静止している観測者は

$$t = \frac{2L_0}{c} \quad (4)$$

の時間を報告する。一方、速度 v で右に向かって動いている観測者の立場で考えてみると、光源と鏡は速度 $-v$ で左へ動いていることになる。光が出てから鏡に到達するまでの時間が t'_1 であったとすると光が進んだ距離は $L - vt'_1$ となる。したがって、

$$ct'_1 = L - vt'_1$$

の関係が成立する。鏡で反射してから t'_2 秒後に光源の位置に光が戻ってきたとすると光が進んだ距離は $L + vt'_2$ となるので、

$$ct'_2 = L + vt'_2$$

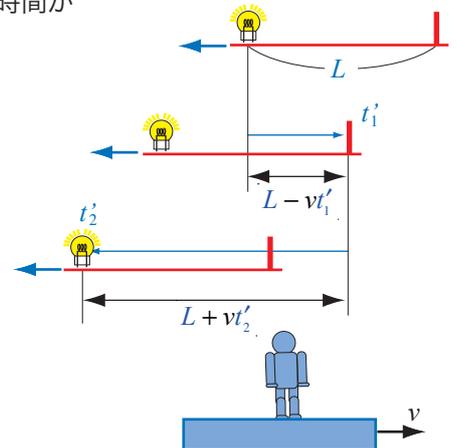
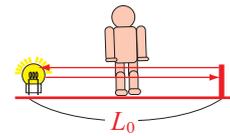
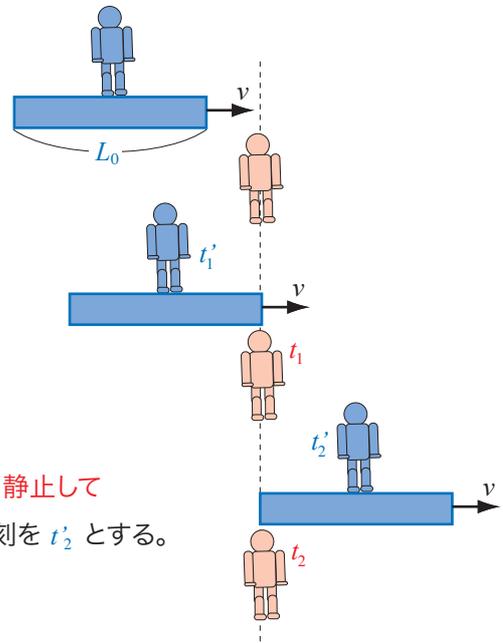
の関係を得る。したがって、往復に要した時間は

$$t' = t'_1 + t'_2 = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = \frac{2cL}{c^2 - v^2} \quad (5)$$

となる。ここで、時間の遅れの関係

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

を用いて、式(4)と(5)を比較すると、 $L = L_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}$ という結果を得る。



2.4 ローレンツ変換

ここまでの考察で、静止している観測者と一定の速度で動いている観測者の時刻と座標の関係はわれわれの常識に反するものであることが分かった。

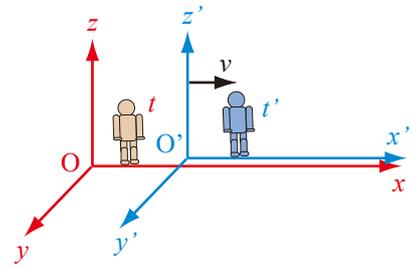
われわれの常識とは、2つの座標系の間に

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$$

という変換のルールがあるというものである。この変換のルールはガリレイ

変換と呼ばれている。時間の原点は自由に設定してよいので、それぞれの座標における時刻がゼロのとき、両者の座標の原点が一致しているものとする。

「相対性原理」と「光速不変の原理」を同時に満たすためには、ガリレイ変換を捨てる必要がある。では、正しい座標変換のルールはどのようなものとなるのだろうか。



a) x', y', z', t' は x, y, z, t の一次式でなければならない (空間の一様性)

一次式とは $x' = ax + by + cz + dt$ のような変数の1乗と定数からなる式のことである。さて、右図のように静止座標系において長さ L の棒を動いている座標系で測定することを考えてみる (逆でもかまわない)。

それぞれの座標系で測定した棒の端の座標が x_1, x_2 と x'_1, x'_2 であったと

する。すでに、ローレンツ収縮によって動いている座標系の観測者は棒の長さを L' と短く報告することを知っている。したがって、両座標系には

$$L' = x'_2 - x'_1 = a(x_2 - x_1) = aL$$

という関係がある。ここで、定数 a は具体的には $1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ であるが、速度の関数ではあっても、座標の関数ではない。すなわち、棒の置き場所を変えて (座標は異なる値となる) 棒の長さを比べても、同じ結果にならなければならない。これは、それぞれの座標系において空間が一様であることを意味している。このことだけでも、座標変換が一次式でなければならないことが分かるのであるが、具体的に一次式でない場合は何事が起きるかを調べてみよう。たとえば、

$$x' = ax^2$$

というルールにしたがって座標が変換されると考えてみる。これは x の自乗の式なので一次式ではない。

動いている座標の観測者が見る棒の長さ L' は

$$L' = x'_2 - x'_1 = a(x_2^2 - x_1^2) = a(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) = a(x_2 + x_1)L$$

のように静止している観測者の長さ L と関係することになる。ここで $x_2 + x_1$ は棒の置き場所によって異なる値をとることになるので、動いている座標系は場所ごとに異なる座標の間隔を持つことになる。これは、空間が一様であることに反していて、受け入れがたいものである。

b) 運動 (速度) の方向と垂直な向きは運動による影響を受けない

図のように運動の向きを x, x' 軸とする。静止座標系の観測者が自分の座標と時間を使って、相手の座標を計算する方法を考える。速度に対して垂直な向きである y' についての変換式も一次式のはずだから

$$y' = ax + by + cz + dt \quad (1)$$

と書くことができる。ここで、 a, b, c, d は座標によらない定数である。

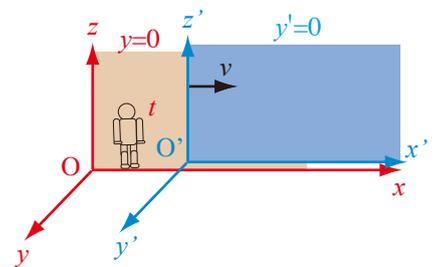
運動の向きを x 軸としたので、 $x-z$ 平面と $x'-z'$ 平面は常に同一平面となる。したがって、 x, z, t がどのような値であろうとも

$$y=0 \quad \text{ならば} \quad y'=0$$

が成立することになる。この条件を式 (1) に代入すると

$$0 = ax + cz + dt$$

という関係を得る。これは、 x, z, t についての恒等式として成立するので、 $a=c=d=0$ となることが分かる。



したがって、静止している座標系の観測者の y 座標と動いている座標系の y' 座標には

$$y' = by \quad (2)$$

が成立することになる。ところで、運動している座標系の観測者の立場に立って考えてみると、「自分は静止しているのであって、動いているのはこれまで静止座標系と呼んでいた方だ」と主張するであろう。「相対性原理」

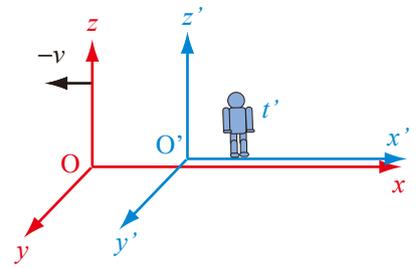
によると、どのような慣性系も物理法則は同じでなければならない。式 (2) の座標変換は一つの物理法則である。したがって、静止座標系 y と運動座標系 y' の役割を入れ替えた

$$y = by' \quad (3)$$

が式 (2) と同時に成り立たなければならない。式 (2) と (3) から

$$y = b^2 y \rightarrow b^2 = 1 \rightarrow b = \pm 1$$

となることが分かる。座標の向きをそろえている場合 $y' = y$ を選ばばよい。



c) x 方向の変換には y, z は関係しない

右の上の図のような2つの座標系の x 軸方向の座標についての変換式を考える。やはり、一次式であるはずだから

$$x' = ax + by + cz + dt \quad (4)$$

のように書けるだろう。ところで、下の図のように y 軸と z 軸の向きをひっくり返した座標系を考えてみる。上の座標系と比べて y と z の向きだけが異なるので、式 (4) において

$$x \rightarrow x, \quad y \rightarrow -y, \quad z \rightarrow -z$$

という置き換えをした関係式が成り立つはずで

$$x' = ax - by - cz + dt \quad (5)$$

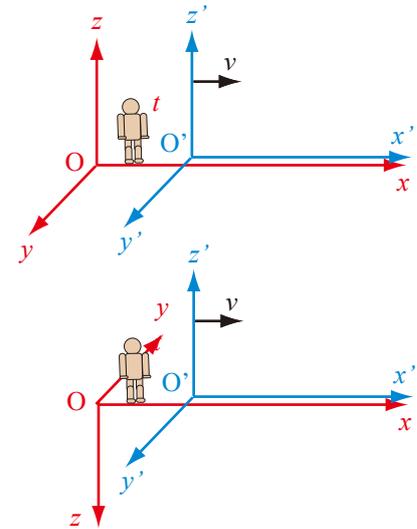
を得る。式 (4) と (5) の辺々を引き算してみると

$$by + cz = 0$$

となり、この条件は y と z についての恒等式なので、

$$b = c = 0$$

となる。したがって、 x 方向（速度方向）の変換式には y, z は関係しないことが分かる。



d) x 方向の変換

右の図のように2つの座標系において、時刻 $t = t' = 0$ で両座標系の原点が一致するように座標と時刻の設定をしておく。このような設定によって問題の一般性を失うことはない。座標の原点にせよ、時刻の原点にせよ、どこかに決めなければならないし、それらは自由に決めることができるはずである。ここまでの議論によって、2つの座標系の変換式は

$$x' = ax + bt \quad (6)$$

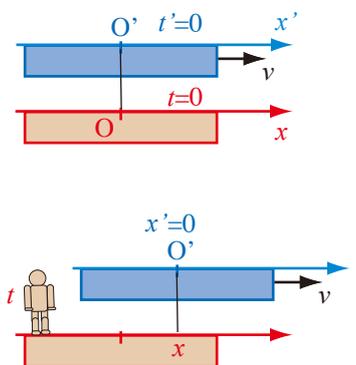
のように書くことができる。ここで、係数 a と b は速度の関数ではあるが、座標にはよらない。

まず、相対性原理から導かれる結論について考えてみよう。静止座標系の観測者にとっての時刻が t であるとき、動いている座標系は vt だけ右へ進んでいる。したがって、この時刻において、動いている座標系の原点 O' の座標 $x' = 0$ は、静止座標系において

$$x = vt$$

に対応することになる。この条件を変換式 (6) に代入すると、

$$0 = avt + bt \quad (7)$$



という条件を得る。この条件はどんな時刻 t においても成立しなければならないから、 t についての恒等式である。このことから、変換式の係数には

$$b = -av$$

という関係があることが分かる。したがって、座標変換は

$$x' = a(x - vt) \quad (8)$$

という形となる。さて、観測者の立場を変えてみよう。動いている座標系の

観測者は「静止座標」と呼んでいたものが左へ動いていると主張する。

相対性原理によると、この観測者にとっても式 (8) と同等な変換式が成立

しなければならない。すなわち、座標と速度の置き換え

$$x \leftrightarrow x', \quad t \leftrightarrow t', \quad v \leftrightarrow -v$$

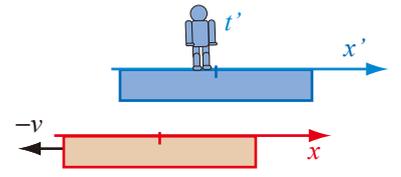
を式 (8) に施して

$$x = a(x' + vt') \quad (9)$$

という変換式が得られる。変換式 (8) と (9) は互いに逆変換の関係となっている。試みに $a=1$ として、2つの座標系の時刻が等しいとしてみると

$$x' = x - vt, \quad x = x' + vt$$

となり、ガリレイ変換と一致していることが分かる。



次に、光速不変の原理について考えてみよう。右の図のように両座標系の原点に光源を置く。時刻 $t = t' = 0$ において、両座標系の原点すなわち光源の位置は一致している。この瞬間に光源を点灯させる。静止座標系の時間で t 秒後に光が x まで進んでいるとする。このとき、動いている座標系において、時間が t' に相当していて、光が進んだ距離を x' とする。光速不変の原理によると、どちらの座標系においても光の速さは一定の値 c である。したがって、

$$x = ct, \quad x' = ct'$$

の関係が成立する。さて、これら座標と時刻の組 (x, t) と (x', t') は変換式 (8) と (9) を満たす。式 (10) を代入して座標を消去してみると

$$ct' = a(c - v)t, \quad ct = a(c + v)t' \quad \rightarrow \quad ct = a(c + v)(c - v)t / c$$

という t に関する恒等式を得る。この条件から、変換式の係数 a は

$$c^2 = a^2(c^2 - v^2) \quad \rightarrow \quad a = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

となる。図のように座標が同じ向きである場合は、複号の $+$ を選べばよい。以上のことから、座標変換の式は

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}(x - vt) \quad (11) \quad x = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}(x' + vt') \quad (12)$$

となることが分かる。また、式 (12) の x' に式 (11) を代入して t' を求めると

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} x - \frac{v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} t + vt' \right) \quad \rightarrow \quad t' = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$$

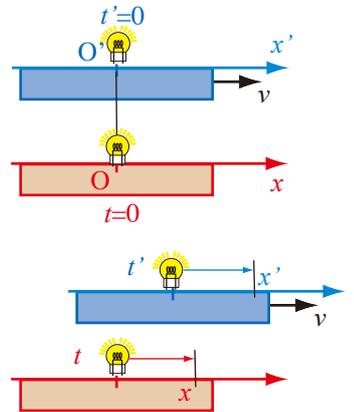
であることが分かる。まとめると、座標と時間についての変換式は

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}(x - vt) \quad t' = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$$

となる。これらの関係はローレンツ変換と呼ばれている。また、逆変換が

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}(x' + vt') \quad t = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right)$$

となることは簡単に確かめることができる。



2.5 相対性理論における時間と空間の性質

われわれの常識は「時間の流れは悠久であり、過去は過去、未来は未来、同時は同時」というものである。相対性理論によって時間の概念を覆されてしまったここに至っては、すべての常識を疑わなければならなくなってしまった。常識と非常識の架け橋であるローレンツ変換にしたがって検討を進めてみよう。

2.5.1 同時性の相対性

空間的に離れた2点における事件が「同時刻」に起きたという主張はある人から見れば真実であるが、別の人から見ると正しくない。

静止座標系の異なる2つの場所で同時に起きた事象

$$(x_1, t) \quad (x_2, t)$$

を考える。この2つの事象が動いている座標系では

$$(x'_1, t'_1) \quad (x'_2, t'_2)$$

のように観測されたとする。これらの座標と時刻はローレンツ変換によって関係付けられるので

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad t'_1 = \frac{t - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad x'_2 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad t'_2 = \frac{t - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

となる。したがって、動いている座標系では時間差

$$t'_1 - t'_2 = \frac{v/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}(x_2 - x_1) > 0 \quad (1)$$

が生じることになり、異なる時刻の事象として観測されることになる。時刻の関係は $t'_1 > t'_2$ なので、動いている観測者は x_2 で起きた事件が x_1 で起きた事件より先に起きたと主張することになる。

この結果は数学的に正しいのではあるが、こんなに重大な結果をいきなり認めると言われても納得しがたいものがあるだろう。より直感的に理解するために、例によって光を使って説明をしてみよう。静止座標系で同時におきる事象を作るために、右図のように棒の中央に光源をおいて光が棒の両端に到達することを考えてみる。棒の中心から光が右と左に同時に出て、同じ速さで伝わって、棒の両端に到着するのだから静止座標系の観測者にとっては「同時」に起きる事象である。

このことを動いている座標系の観測者が見ると、静止座標系は左へ速さ v で動いていることになる。光が棒の中央から時刻 $t' = 0$ に出て、棒の右端に到達する時刻を t'_2 とする。この間に静止座標系は vt'_2 だけ左へ移動している。動いている観測者が見る棒の長さを L' とすると、動いている観測者にとって光が進んだ距離は $L' - vt'_2$ となるので

$$L' - vt'_2 = ct'_2$$

の関係が成立することになる。したがって、棒の右端に光が到達する時刻は $t'_2 = \frac{L'}{c+v}$ となる。同様に、棒の左端に光が到達する時刻を t'_1 とすると、

$$L' + vt'_1 = ct'_1$$

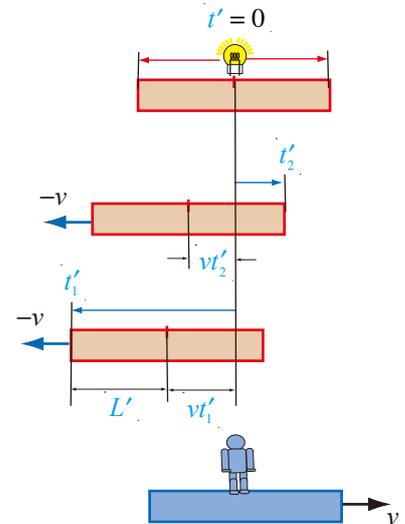
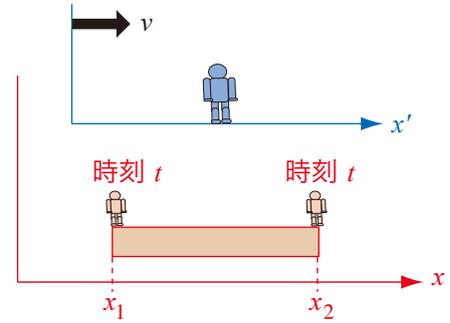
の関係が成立することになり、 $t'_1 = \frac{L'}{c-v}$ であることが分かる。これらの時刻の差を計算してみると

$$t'_1 - t'_2 = \left(\frac{1}{c-v} - \frac{1}{c+v} \right) L' = \frac{2v}{c^2 - v^2} L'$$

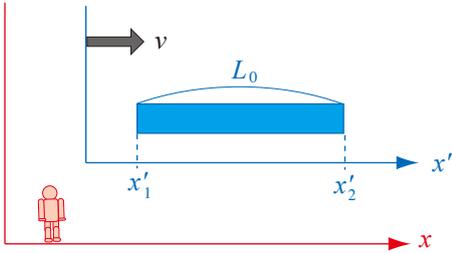
となっており、 $t'_1 > t'_2$ であることが分かる。また、ローレンツ収縮による結果 $L' = L\sqrt{1 - (v/c)^2}$ を用いると

$$t'_1 - t'_2 = \frac{v/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \times 2L$$

となり、式(1)の結果と一致していることが分かる。



2.5.2 ローレンツ収縮



速度 v で動いている長さ L_0 の棒を考える。棒とともに動いている座標系を考えると、棒の両端の座標を x'_1, x'_2 とすると、棒の長さは

$$L_0 = x'_2 - x'_1$$

と表すことができる。この棒の長さを静止している観測者が測定する。このためには、棒の両端の座標を同時に測定する必要がある。

したがって、静止している観測者が測定する棒の両端は (x_1, t) と (x_2, t)

という座標で表すことができる。したがって、静止している観測者が測定した棒の長さは

$$L = x_2 - x_1$$

と書くことができる。また、2つの座標系はローレンツ変換

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad x'_2 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

によって関係づけられるので、

$$L_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{L}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

となる。つまり、速度 v で動いている棒の長さは

$$L = L_0 \sqrt{1 - (v/c)^2} < L_0$$

のように縮んで見えることになる。

2.3.3 同時性とローレンツ収縮についてのパラドックス (Paradox)

長さ $2d$ の棒と直径 d の穴のあいた壁を考える。ただし、双方ともに静止している場合についての長さある。

棒と壁の相対速度を $v = \frac{2\sqrt{2}}{3}c$ とすると、相対論の係数は

$$\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{1}{3}$$

となる。

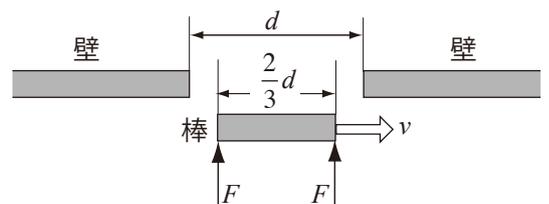
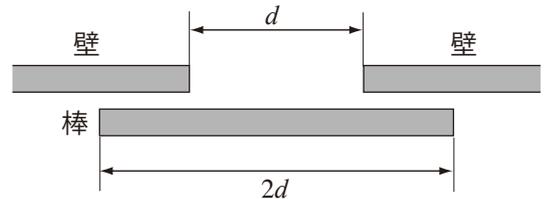
a) 壁が静止している座標系

棒が壁に対して速度 v で壁と平行に運動している。

この時、ローレンツ収縮によって、棒の長さは

$$2d \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{2}{3}d$$

となっており、棒が穴の前を通過する時、棒の両端に同時にするどい衝撃力 F を加えると、棒は穴を通過する。



b) 棒が静止している座標系

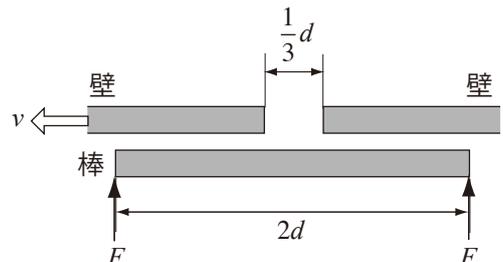
壁が棒に対して速度 v で棒と平行に運動している。

この時、ローレンツ収縮によって、穴は

$$d \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{1}{3}d$$

に収縮しているので、棒の長さより狭くなり、

棒は穴を通過できない。



このパラドックスの答えは、「壁が静止している座標系」での主張が正しく、棒は穴を通過できる。問題点は棒の両端に与える衝撃力の同時性にある。問題点を明らかにするために、事象が起きる時刻をはっきりさせよう。

- 1) 壁に固定された座標系において、棒の右端が穴の右端に一致した時刻に棒の両端に衝撃力を与えることとする。この時刻を $t_{右}=t_{左}=0$ とする。棒はローレンツ収縮しているため、両端の座標は

$$x_{右} = 0, \quad x_{左} = -\frac{2}{3}d$$

である。

- 2) この事象を棒に固定された座標系で見ている。座標と時刻の関係はローレンツ変換によって

$$t'_{右} = \frac{t_{右} - \frac{v}{c^2}x_{右}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 0 \quad t'_{左} = \frac{t_{左} - \frac{v}{c^2}x_{左}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{4\sqrt{2}d}{3c}$$

$$x'_{右} = \frac{x_{右} - vt_{右}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 0 \quad x'_{左} = \frac{x_{左} - vt_{左}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = -2d$$

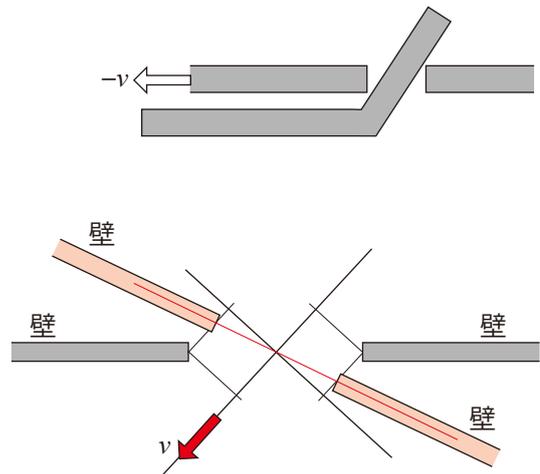
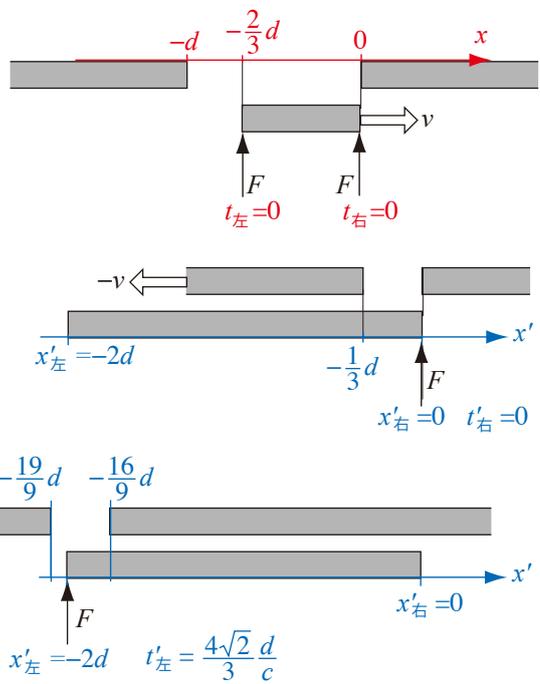
となっていることが分かる。棒の右端が押される時刻は

$t'_{右}=0$ であるが、左端が押される時刻は遅れていることが分かる。また、この座標系での棒の長さは(もちろん) $2d$ であり、穴の直径は、ローレンツ収縮によって $\frac{1}{3}d$ となっている。

- 3) このように、棒の両端が押される時刻が異なるために、棒は右端から穴に入っていく、順に左端へに向かって通過して行くことができる。しかし、棒がクネクネと曲る訳ではない。では、どのように穴を通過して行くのだろうか。

棒が押されると、棒は壁へ向かう方向の速度を持つことになる。棒の座標系から見ると、壁が棒に近付いてくることになる。つまり、棒が穴を通過する時は、速度ベクトルが少し斜めの方向に向いている。

ローレンツ収縮は速度ベクトルの向きにのみ起きて、垂直方向は影響を受けない。したがって、棒から見ると右図のように、壁全体が傾くことになる。棒は傾いた壁の穴を通過するのである。



2.5.4 時計の遅れ

相対運動をする2つの座標系に置かれた時計を比較することを考える。2つの時計は、それぞれの座標の原点に置かれていて、2つの座標の原点が一致するときに時刻合わせをしてあるものとする。

静止している座標系の原点にいる観測者が、動いている座標系の時計を見ることを考える。ローレンツ変換

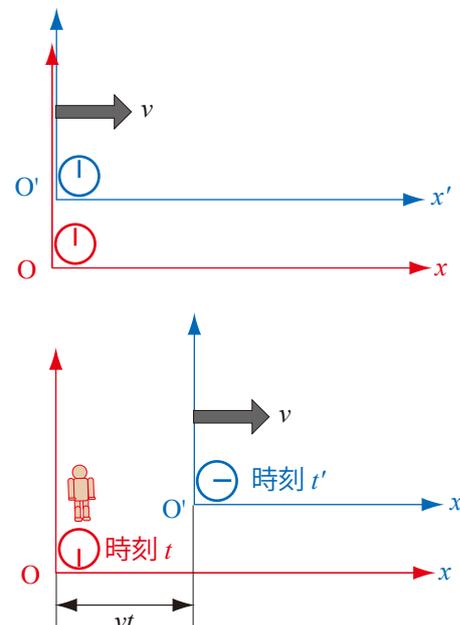
$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

を用いると、動いている座標系の時計は $x'=0$ の位置に置かれているので、2つの座標系の時刻の関係は、

$$t' = t\sqrt{1 - (v/c)^2} < t$$

であることが分かる。すなわち、動いている時計を静止している観測者が見ると時刻が遅れていくように見えることになる。ローレンツ変換

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$



を用いる場合は、**動いている座標系**の時計は $x=vt$ の位置に置かれていることになるので、同じ結果を得ることができる。

逆に、**動いている座標系**の観測者が、**静止している時計**を見る場合は、**ダッシュあり**と**ダッシュなし**を入れ替えて考えることになる。したがって、

$$t = t' \sqrt{1 - (v/c)^2} < t'$$

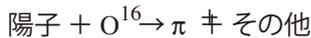
のように**静止している座標系**の時計が遅れているように観測することになる。

結果として、**相対運動をする時計はお互いに遅れいく**ことになる。これは、時計という機械の動作について議論している訳ではなくて、**時間そのものが相対的な概念であることを意味している**。

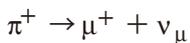
μ粒子の寿命(宇宙線)

宇宙からは大きなエネルギー(高速)の粒子が地球に降りそそいでいる。これを宇宙線とよび、大気圏を通過して地表まで到達できるエネルギーを持つものはほとんどが太陽系外から来ている。これらの宇宙線の起源は超新星爆発だと考えられているが必ずしも明らかになっていない。

大気圏に突入した宇宙線は、大気の構成物質の原子核と反応を起こして2次粒子を作る。2次粒子は、π中間子、陽子、中性子、γ線、軽い原子核などが成分である。π中間子を作る典型的な反応は



である。寿命の短いπ中間子(2.6×10^{-8} 秒、10 mくらい飛行した後)は



という反応でミュー粒子(μ)とニュートリノ(ν)に崩壊する。また、ミュー粒子の寿命は 2.6×10^{-6} 秒で



という反応で陽電子(e^+)に崩壊する。ところで、ミュー粒子が発生するのは成層圏で、地上から50 km上空である。たとえ、ミュー粒子が光速で飛んできたとしても、成層圏から地上までの距離を飛行するのにかかる時間は

$$\frac{50}{300000} = 1.7 \times 10^{-4} \text{ 秒} > 2.2 \times 10^{-6} \text{ 秒}$$

となり、地上に到達する前にミュー粒子は崩壊してしまうことになる。しかし、地上に来る宇宙線のほとんどはミュー粒子で、1分間に1 cm²あたり一個の高速ミュー粒子が飛んでくる。これは、相対性理論の時計の遅れによる現象である。ミュー粒子の速度が $v=0.999987c$ の場合、ミュー粒子の寿命を計算すると

$$\frac{2.2 \times 10^{-6}}{\sqrt{1 - 0.999987^2}} = 4.4 \times 10^{-4} \text{ 秒} > 1.7 \times 10^{-4} \text{ 秒}$$

となり、ミュー粒子が地上に到達できる理由が分かる。

同じ議論をミュー粒子の立場で考えてみると、寿命は 2.6×10^{-6} 秒のままである。しかし、この場合、ミュー粒子にとっては地面が速度 $v=0.999987c$ で近づいてくることになる。したがって、

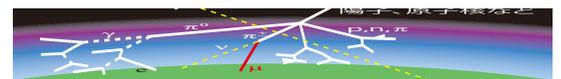
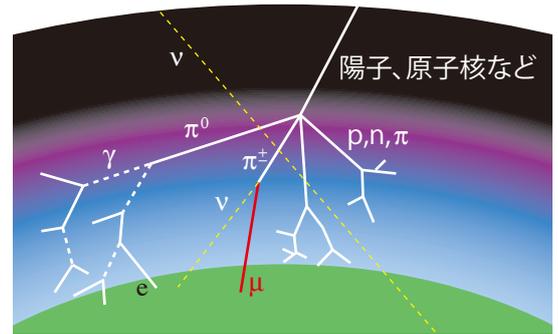
ミュー粒子が飛行する距離は50 kmに対してローレンツ収縮が考慮されることになり、

$$50 \times \sqrt{1 - 0.999987^2} = 0.25 \text{ km}$$

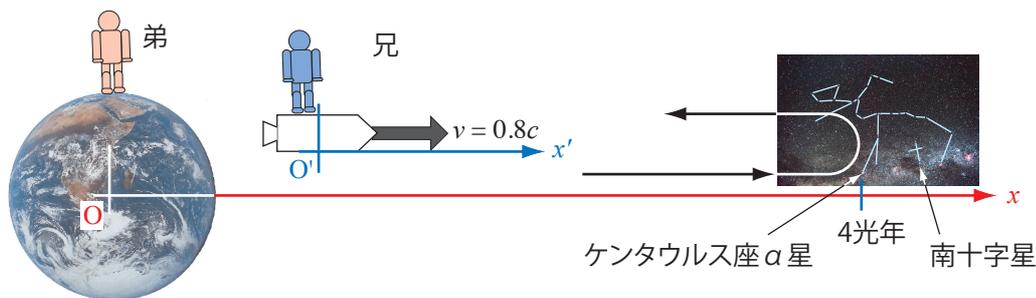
の距離を飛行すればよいことになる。このことから、ミュー粒子の時計で

$$\frac{0.25 \times 10^3}{0.999987 \times 3 \times 10^8} = 8.3 \times 10^{-7} \text{ 秒}$$

の時間だけ経過すれば地表に到達する。これは寿命より短い時間である。



2.5.5 時計の遅れについてのパラドックス (双子のパラドックス、浦島効果)



双子の兄弟がいる。兄が宇宙船に乗って、地球から4光年離れたケンタウルス座 α 星に出かけ、そこで方向転換して地球に戻ってくる。宇宙船の速さは光速の0.8倍であるとする。一方、弟は兄の旅行の間地球に留まっている。

弟の立場

相対性理論によると、「運動している兄の時計」は「静止している弟の時計」に対して遅れいく。したがって、兄が地球に戻ったときは、**弟の方が年をとっている**。

宇宙船の速度が $0.8c$ で、地球と星の往復の距離が8光年だとする。弟(地球)の時計では

$$\frac{8 \text{ 光年}}{0.8 \text{ 光速}} = 10 \text{ 年}$$

で兄が地球に戻ることになる。一方、宇宙船の時計の進み方は

$$\sqrt{1-0.8^2} = 0.6$$

の割合で遅くなるので、兄は帰還までに

$$10 \times 0.6 = 6 \text{ 年}$$

にしか年をとらない。

兄の立場

兄からは、弟と地球が反対方向に飛んで行き、引き返して来るように見える。この立場では、運動しているのは弟である。したがって、「運動している弟の時計」は「静止している兄の時計」に対して遅れいく。この結果、兄が地球に戻ったときは、**兄の方が年をとっている**。

地球と星までの距離は4光年であるが、宇宙船は $0.8c$ の速度で飛んでいるので、地球と星までの距離は、宇宙船から見ると、ローレンツ収縮によって

$$4 \text{ 光年} \times \sqrt{1-0.8^2} = 2.4 \text{ 光年}$$

に短縮されることになる。この短縮された距離を $0.8c$ の速度で飛ぶので、星に到着するまでにかかる時間は、兄(宇宙船)の時計で

$$\frac{2.4 \text{ 光年}}{0.8 \text{ 光速}} = 3 \text{ 年}$$

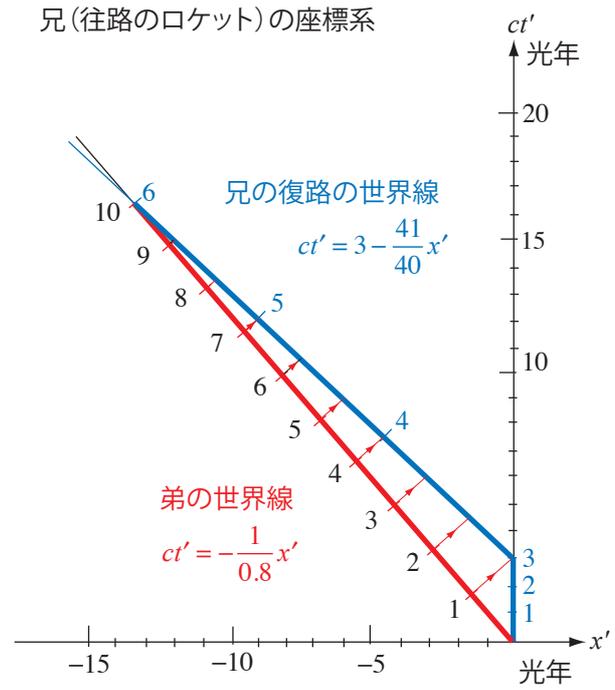
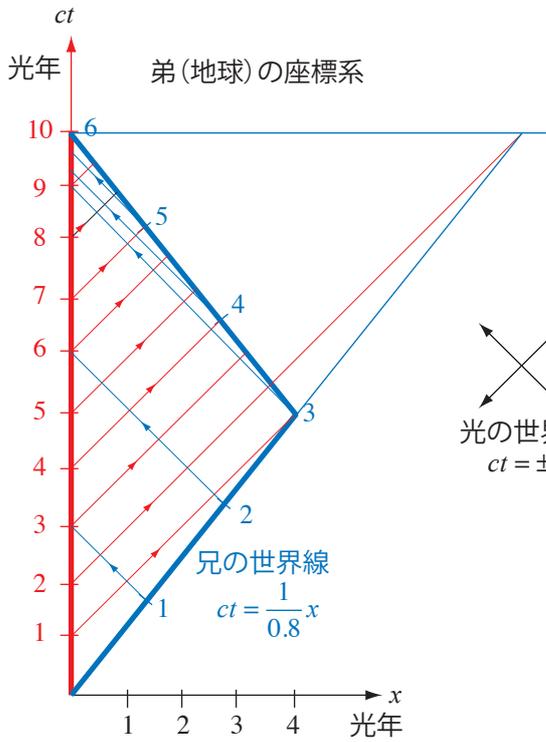
となる。したがって、兄は、兄の時計で6年後に地球に帰還することになる。このとき、弟(地球)の時計の進み方は

$$\sqrt{1-0.8^2} = 0.6$$

の割合で遅くなるので、弟は兄は帰還までに

$$6 \times 0.6 = 3.6 \text{ 年}$$

にしか年をとらない。



兄弟ともにそれぞれの時間で、光の信号を相手に送り、信号を受け取る回数で相手の時間を判断する。

弟が兄から受け取る信号		兄が弟から受け取る信号	
0年 < t ≤ 3年	1回	0年 < t ≤ 3年	1回
3年 < t ≤ 9年	2回	3年 < t ≤ 10年	9回
9年 < t ≤ 10年	3回		
合計	6回	合計	10回

したがって、弟から見て兄の時間は6年経過して、兄から見ると弟の時間は10年経過している。ただし、どちらの立場でも、最初の0~3年の間は相手の信号を1回しか受け取っていないので、どちらも相手の時間が遅れていると判断する。ロケットが引き返さずに飛び続ければ、この状況はいつまでも続くことになる。この場合、両者は同じ時間と空間に存在することはないので、両方の主張が正しくても矛盾ではない。

ところで、相手の時間が自分の0.6倍となるという結論はどのようにして得られるのだろうか。たとえば、弟が3年目に兄から受け取った信号について考えてみよう。弟の時間がtであるときに兄が送った信号であるとすると、光を出したときのロケットの位置は0.8ctとなる。すなわち、弟が受け取った光は0.8ctの距離を飛んで来たことになる。また、光が飛行した時間は3-tなので

$$\frac{0.8ct}{3-t} = c$$

が成立する。この条件からtを求めると

$$t = \frac{1}{0.6}$$

となって、これが兄の1年なので、兄の時間の進みかたは弟の0.6倍となっていることが分かる。

2.6 質量とエネルギーの等価性

2.6.1 速度の合成

(x, t) 座標系において、 x 軸方向へ速度 v で動いている物体を速度 u で動いている観測者が見たときの速度はどのようになるだろうか。時刻 $t=0$ で $x=0$ であったとすると、時刻 t の物体の位置は

$$x = vt$$

となる。ところで、ローレンツ変換によると、2つの座標系の関係は

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}$$

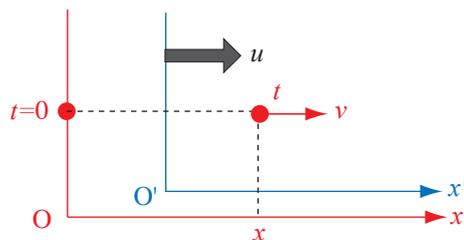
となるので、これに $x = vt$ を代入すると

$$x' = \frac{v - u}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} t, \quad t' = \frac{1 - \frac{uv}{c^2}}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} t$$

を得る。したがって、動いている座標系 (x', t') での物体の速度は

$$v' = \frac{x'}{t'} = \frac{v - u}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

となる。いま、対象としている物体が光だとして、 $v=c$ を代入してみると $v' = \frac{c - u}{1 - \frac{uc}{c^2}} = c$ となって、光の速度は動いている座標系においても c であることが分かる。

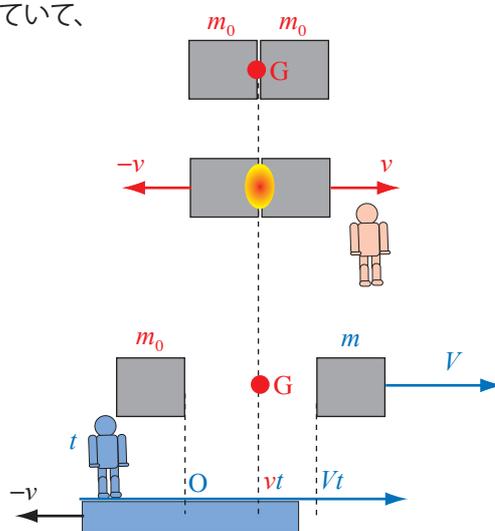


2.6.2 速度による質量の変化

質量が等しい2つの物体(質点)を考える。最初、2つの物体はくっついていて、静止している。静止状態でそれぞれの物体の質量を m_0 とする。

このとき、全体の重心は2つの物体の中間の位置となっている。

2つの物体が接触している面に爆薬を挟んでおいて、時刻ゼロ(どんな立場の観測者でも時刻をゼロにリセットする)に爆薬を爆発させる。2つの物体は反対方向へと走り始めることになるが、2つは同じ質量なので速さは同じはずである。右側の物体の速度を v 、左側の物体の速度を $-v$ と書くことにする。この様子を静止している観測者がみると



2つの物体全体の重心は爆発前と同じ位置である。

爆発は2つの物体の間で起こったので、全体の重心に力は働いていない。したがって、重心の位置は変わらないのである。

さて、この様子を左側の物体とともに動く観測者の立場で考えてみよう。この観測者からみて、左側の物体の速度はゼロである。右側の物体は静止座標系で速度 v であり、これを $-v$ で動いている観測者がみるのだから、速度の合成のルールに従って

$$V = \frac{v - (-v)}{1 - \frac{v(-v)}{c^2}} = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \quad (1)$$

という速度で動いていくことになる。

左側の物体は観測者に対して静止している。したがって、左側の物体は、最初物体が静止していたときと同じ状況に置かれていることになる。このことから、

左側の物体の質量は m_0 である。

ところで、右側の物体は観測者に対して速度 V で動いている。これまでの相対性理論についての議論から想像できるように、何も信じられない！動いている物体の性質が変化するかもしれない。いま、質点を考えているので、物体の性質は質量しかない。この質量が変化してもよいように（変換しないかもしれないが）

速度 V で動いている右側の物体の質量を m としておく。

動いている座標系の原点を左の物体と一致させておくことにすると、動いている観測者の時刻 t のときの右側の物体の位置は Vt となる。したがって、時刻 t での重心の位置は

$$\frac{m_0 \times 0 + m \times Vt}{m_0 + m} = \frac{m}{m_0 + m} Vt \quad (2)$$

となる。一方、静止座標系において重心の位置は変化しない。このことから、

動いている座標系において、時刻 t の重心の位置は vt である。

これと式 (2) の結果は同じでなければならないから

$$\frac{m}{m_0 + m} Vt = vt$$

という条件が得られる。このことから、速度 V で動いている物体の質量は

$$m = m_0 \frac{v}{V - v} \quad (3)$$

となる。ガリレイ的には速度 V は $2v$ である。これを式 (3) に代入すると $m = m_0$ となり、われわれの常識通りに質量は変化しない。しかし、速度合成則の結果（式 (1)）は、 $V \neq 2v$ であることを示している。つまり、

動いている物体の質量は静止しているときの質量と異なる値となることが分かる。

式 (1) から v を求めてみると

$$v = \frac{1 - \sqrt{1 - V^2/c^2}}{V/c^2}$$

となる。この結果を式 (3) に代入すると

$$m = m_0 \frac{\frac{1 - \sqrt{1 - V^2/c^2}}{V/c^2}}{V - \frac{1 - \sqrt{1 - V^2/c^2}}{V/c^2}} = m_0 \frac{1 - \sqrt{1 - V^2/c^2}}{\sqrt{1 - V^2/c^2} - (1 - V^2/c^2)} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (4)$$

という結果を得る。すなわち、**運動する物体の質量は速度とともに大きくなっていくのである！**高速で動く物体の質量は急速に増大し、光速に達すると質量は無限大となることを意味している。したがって、物体を加速しようとする、速度が大きくなるにつれて、加速にはより大きな力が必要となる。つまり、有限な静止質量を持つ物体を光速まで加速しようとする、無限大の力が必要となる。このため、質量を持つ物体は光速で運動することができない。

2.6.3 光のエネルギーと質量

左の図のような思考実験を考える。質量 M の箱の左端から光が放出され、箱の中を右に向かって飛んで行く。この放出された光のエネルギーを E とする。エネルギー E の光は、運動量

$$P = \frac{E}{c}$$

を持つ。この関係は電磁気学から証明可能である。さて、運動量を持った光が右へ飛び出すので、箱は逆向きに跳ね飛ばされることになる。光が出た後、箱が持つ速さを v とすると、運動量保存則から

$$Mv = P$$

となり、 $v = \frac{E}{Mc}$ の速さで箱は左へ動いて行くことになる。箱の中を走った光 (光速はいつも c) は、時間

$$t = \frac{L}{c}$$

後に右の壁に達するので、その間に箱は

$$x = v \times t = \frac{EL}{Mc^2} \quad (5)$$

だけ左へ動くことになる。したがって、箱の重心 G は x だけ左へ移動していることになる。しかし、光は箱の内部で移動しただけで、箱は外部から力を受けていないので、箱の重心が移動することはない。この矛盾を解決するために、光が質量 m を持っていると考えてみる。

質量 m が左から右へ移動して、重心の位置が変わらないようにするためには

$$\left(\frac{M}{2} - m\right)\left(\frac{L}{2} + x\right) = \left(\frac{M}{2} + m\right)\left(\frac{L}{2} - x\right)$$

が成立していればよい。したがって、

$$Mx = mL \quad (6)$$

となり、式 (5) と (6) から

$$M \frac{EL}{Mc^2} = mL$$

の関係を得る。この式から、光のエネルギー E と光の質量 m との間には

$$E = mc^2 \quad (7)$$

の関係があることが分かる。

2.6.4 エネルギーと質量の等価性

静止状態で質量 m_0 を持つ物体が速度 v で動くと、その質量は

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (8)$$

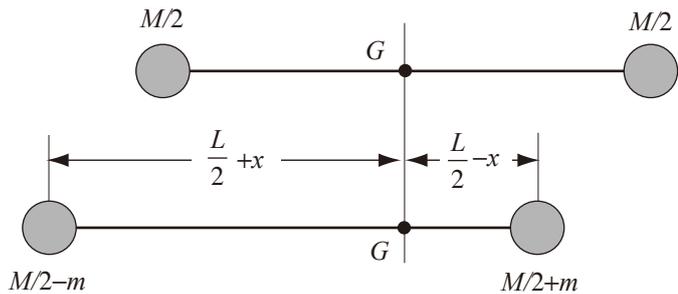
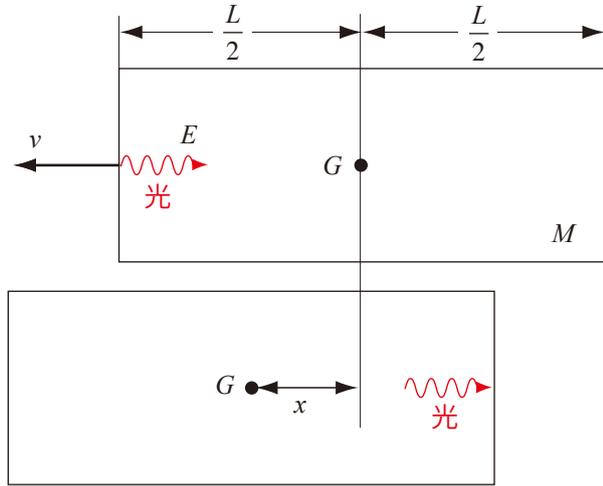
に増加する。また、光についての特別な場合の議論からの推測ではあるが、質量とエネルギーには

$$E = m(v)c^2 \quad (9)$$

という関係が成立しているようである。式 (9) に式 (8) を代入して、 $v \ll c$ の場合についてテーラー展開をしてみると

$$E = m(v)c^2 \cong m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 + \dots$$

と書けることが分かる。すなわち、速度を持つ物体の**質量が増加するのは**、物体のエネルギー増加を意味しており、そのエネルギー増加分はニュートン力学で**運動エネルギー** $\frac{1}{2}m_0v^2$ と解釈されていたものである。さらには、静止している物体であっても、 $E = m_0c^2$ のエネルギーを持っていることになる。つまり、**エネルギーには様々な形態があるが、質量はその1つの存在様式なのである。**

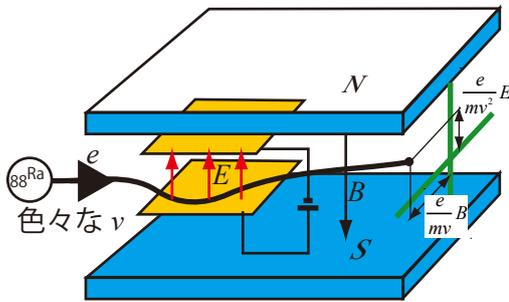


2.6.5 実験的証拠

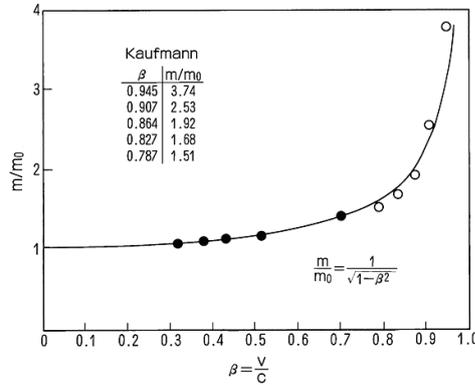
ベータ線の質量

1901年、カウフマン(Walter Kaufmann, 独、1871~1947)は、ラジウム線源からのベータ線として放出される高速電子線を電場と磁場によって屈曲させ、電子の質量 m がその速度によって変化することを確かめた。

ラジウムからはいろいろな速度を持ったベータ線(高速の電子)が放出される。速いものは光速に近く、磁場と電場の両方について曲がりにくく、速度の小さいものほど曲がりやすい。電子の軌道の曲がり方は電子の質量に反比例するので速度によって質量がどのように変化するかを調べることができる。

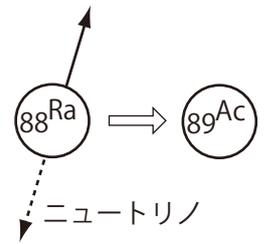


カウフマンの実験装置



実験結果：横軸は電子の速度。
縦軸は運動する電子の質量と
静止質量の比

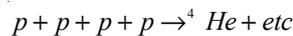
β線 (高速の電子)



大型加速器：粒子は中心部から外側へと螺旋状に加速される。加速されると粒子の質量は大きくなるので、外側の磁極幅が広くなっている。

核融合と核分裂

太陽が放出するエネルギーは



という核融合反応によって作られている。元素周期表を見ると水素とヘリウムの質量数は

水素：1.00794 ヘリウム：4.002602

となっており、水素原子4つ分(4.03176)よりヘリウム原子は軽いことが分かる。つまり、水素が4つ融合してヘリウムが出来ると質量の余剰が生じることになる。質量数単位は ${}^{12}\text{C}$ の質量を12で割ったもので

$$9.9964 \times 10^{-4} \text{ kg/mol} \cong 1 \text{ g/mol}$$

である。この質量は「エネルギーと質量の等価性」によって

$$mc^2 = 9.9964 \times 10^{-4} \times (3 \times 10^8)^2 = 8.997 \times 10^{13} \text{ J/mol}$$

のエネルギーに相当する。水素の核融合によって1グラムのヘリウムが生じたとすると、放出されるエネルギーは

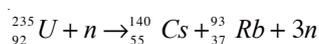
$$\frac{1[\text{g}]}{4} \times (4.03176 - 4.002602) \times 8.997 \times 10^{13} = 6.558 \times 10^{11} \text{ J}$$

となる。一方、化石燃料である石炭を燃やしたときに生じるエネルギーについて考えてみる。燃焼は化学反応であり、一般に化学反応には100kJ/mol程度のエネルギーが関与する。したがって、石炭を80トン燃やすと

$$\frac{80 \times 10^6 [\text{g}]}{12} \times 100 \times 10^3 = 6.7 \times 10^{11} \text{ J}$$

のエネルギーを得ることができる。つまり、核融合反応のエネルギー発生量は80000000倍大きいことになる。

核融合反応とは逆に、原子炉内ではウランの核分裂反応を利用している。天然に産出するウランには ${}^{238}\text{U}$ が99%と ${}^{235}\text{U}$ が0.7%含まれている。この ${}^{235}\text{U}$ を5%程度まで濃縮して、速度の遅い中性子を当てると



という反応が起きる。この反応で1つの中性子に対して3つの中性子が生じることが重要である。反応の結果発生した中性子のうち1つが次の ${}^{235}\text{U}$ に当たるように ${}^{235}\text{U}$ の濃度や配置を工夫すると、ウランの核分裂反応が定常的に連鎖することになる。しかし、このような条件を超えて ${}^{235}\text{U}$ の濃度を高めると、爆発的に核分裂反応が進行してしまうことになる。

ウランの核分裂反応に関する原子の質量数を調べてみると

$${}_{55}^{140}\text{Cs} : 139.917 \qquad {}_{37}^{93}\text{Rb} : 92.922 \qquad n : 1.0087$$

となっている。これらの数値を用いて、核分裂反応の右辺と左辺の質量差を計算してみると

$$235.044 - (139.917 + 92.922 + 2 \times 1.0087) = 0.188$$

であり、右辺の方が軽くなっていることが分かる。したがって、この反応が起きると余剰質量によるエネルギー

$$0.188 \times 8.997 \times 10^{13} = 1.691 \times 10^{13} \text{ J/mol}$$

の放出が生じる。原子炉では、このエネルギーが発電に利用される。1グラムのウラン燃料から得られるエネルギーは

$$\frac{1[\text{g}]}{235} \times 1.691 \times 10^{13} = 7.20 \times 10^{10} \text{ J}$$

で、このエネルギーを石炭の燃焼によって得るためには

$$\frac{12[\text{g}] \times 7.20 \times 10^{10} [\text{J}]}{100 \times 10^3 [\text{J}]} = 8.64 \times 10^6 [\text{g}] = 8.64 \text{ トン}$$

が必要である。

以上のように、核融合反応や核分裂反応では、あたかも、質量がエネルギーに転換されたように思える。しかし、反応を起こしている原子核の構造について考えてみると、より直感的な説明が可能である。ヘリウムにせよウランにせよ、原子核には陽子と中性子が狭い空間に閉じ込められている。陽子と中性子がどのように閉じ込められているかを理解するために、 ${}_{92}^{235}\text{U}$ をばらばらにすることを考えてみる。 ${}_{92}^{235}\text{U}$ は 92 個の陽子と 143 個の中性子からできているので、ばらばらになった陽子と中性子の集団と ${}_{92}^{235}\text{U}$ の質量数との差は

$$92 \times 1.007276 + 143 \times 1.00866 - 235.043925 = 1.863847$$

となる。ここで、1.007276 は陽子の質量数、1.00866 は中性子の質量数である。この質量差をエネルギーに換算して、ウラン原子核内の陽子と中性子 1 個あたりのエネルギーを計算してみると

$$\frac{1.863847 \times 1.66 \times 10^{-27}}{235} \times (3 \times 10^8)^2 = 1.18 \times 10^{-12} \text{ J}$$

となる。つまり、ウラン原子核内の陽子や中性子は $1.18 \times 10^{-12} \text{ J}$ だけエネルギーの低い井戸に閉じ込められているのである。

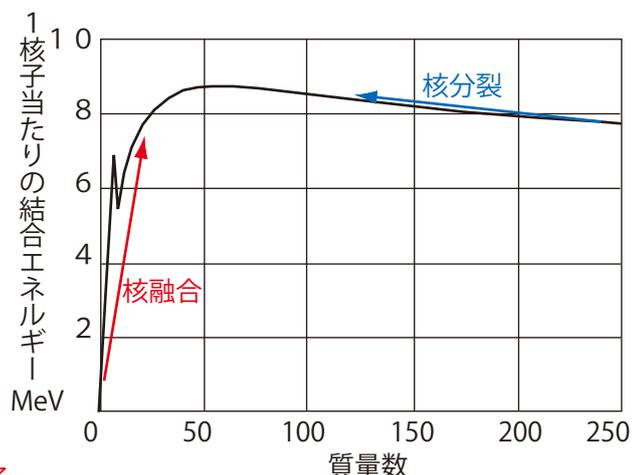
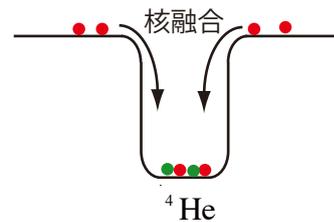
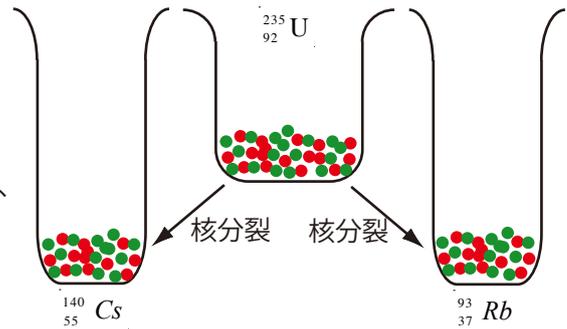
同様に、核分裂反応に関する ${}_{55}^{140}\text{Cs}$ と ${}_{37}^{93}\text{Rb}$ について調べると、 $1.3 \times 10^{-12} \text{ J}$ になり、 ${}_{55}^{140}\text{Cs}$ と ${}_{37}^{93}\text{Rb}$ の井戸は ${}_{92}^{235}\text{U}$ より深くなっていることが分かる。このことから、核分裂反応は、ウラン原子核の陽子や中性子が浅い井戸から深い井戸に落ち込んだときに、エネルギーの差を放出していると考えられる。

同様に、 ${}_{2}^4\text{He}$ の井戸の深さを調べてみると

$$\frac{(2 \times (1.007276 + 1.00866) - 4.002602) \times 1.66 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2}{4} = 1.09 \times 10^{-12} \text{ J}$$

となる。核融合反応 $p + p + p + p \rightarrow {}_{2}^4\text{He} + \text{etc}$ は、自由に飛び交っている陽子がヘリウムの井戸に落ち込んだとき、井戸の深さ分のエネルギーを放出する反応であると理解できる。これは、イオン化している原子が、中性の原子に戻るといった化学反応に似ていて、この化学反応が発熱反応であることから、核融合によってエネルギーが生成されることが理解できるであろう。

様々な元素について原子核の井戸の深さを調べると、右図のようになっている。この結果から、質量数の小さな元素は核融合によって質量数の大きな元素へと変わることができることが分かる。ただし、質量数 50 程度の元素の井戸が最も深いので、単純な核融合反応では質量数が 50 よりも大きな元素を作り出すことはできない。地球に大きな質量数の元素が存在するという事実は、われわれの太陽系生成以前に、太陽よりも激しい活動をした天体が存在したことを物語っている。



反粒子

運動量 p はエネルギー E とともに重要な物理量である。ニュートン力学では、運動量は質量 m と速度の積

$$p = mv$$

である。運動量の意味を理解するために、2つの物体の衝突を考える。質量 m_1 と m_2 の物体が速度 \vec{v}_1 と \vec{v}_2 で衝突し、速度が \vec{v}'_1 と \vec{v}'_2 になるとする。物体が接触している間それぞれの物体には力 \vec{F}_1 と \vec{F}_2 が働く。これらの力には作用・反作用の関係

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad (1)$$

がある。それぞれの物体についてニュートンの運動方程式を書くと

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1(t)}{dt} = \vec{F}_1 \quad m_2 \frac{d\vec{v}_2(t)}{dt} = \vec{F}_2$$

となる。物体の働く力には式(1)の関係があるので、2つの運動方程式の和をとると

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1(t)}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2(t)}{dt} = 0 \quad (2)$$

となる。式(2)を衝突前の時刻 t から衝突後の時刻 t' まで積分すると

$$\int_t^{t'} m_1 \frac{d\vec{v}_1(t)}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2(t)}{dt} dt = m_1 \vec{v}_1(t') + m_2 \vec{v}_2(t') - m_1 \vec{v}_1(t) - m_2 \vec{v}_2(t) = 0$$

となり、衝突の前後で運動量の和は

$$m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

のように変化しない（保存される）ことが分かる。このような関係を「運動量保存則」といい、物体の個数がどんなに多くても、また、衝突が複雑なものであっても、運動量の総和は常に一定となることを示すことができる。

相対性理論では、物体の質量は速度とともに

$$m(v) = m_0 / \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

のように変化する。このとき、速さ v の物体が持つ運動量は

$$p = m(v)v$$

と書くことができる。一方、物体の持つエネルギーは

$$E = m(v)c^2$$

なので、両辺を自乗して変形すると

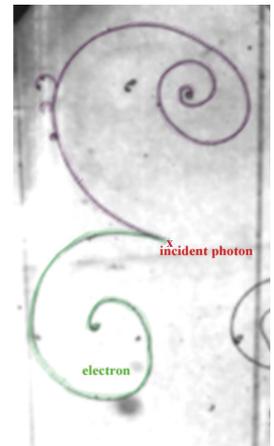
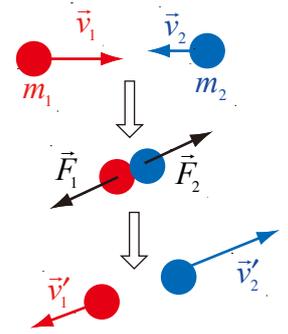
$$E^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - v^2/c^2} = \frac{m_0^2 c^2 v^2}{1 - v^2/c^2} + \frac{m_0^2 c^4 (1 - v^2/c^2)}{1 - v^2/c^2} = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$$

という関係を得ることができる。この関係からエネルギー E は

$$E = \pm \sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2}$$

であることが導かれる。この結果は負のエネルギーを持つ物体の存在を示唆している。

ディラック(1902-1984)は、この相対性理論を考慮して量子力学の基礎方程式であるシュレーディンガー方程式を整理した。シュレーディンガー方程式では、時間と空間が数学的に別々に扱われていたので、それを統合し、電子が光速近くで動く場合にも式が成り立つようにした。それがディラック方程式である。ところが、彼の方程式で電子の振る舞いを計算すると、びっくりするような答えが出てきた。マイナスの電荷(エネルギー的には正)しか持たないとされてきた電子に、なんとプラスの電荷(負のエネルギー)を持つ電子が存在する可能性を示していたのである。これには、最初ディラックも悩んだが、彼は意を決して「電子と反対の性質を持つ反電子(陽電子)がある」と発表した。そして1932年、アメリカのアンダーソンが宇宙から地球に降り注ぐ宇宙線の中に陽電子を本当に発見した。ふつう電子と言えば、マイナスの電子を持っていると考える。原子はプラスの電荷を持つ原子核とマイナスの電荷を持つ電子が、電氣的に引き合っていると説明してきた。しかし電子には電荷の符号だけが逆(プラス)で、その他の性質(スピン、重さ、寿命など)がまったく同じものがある。これがプラスの電荷を帯びた陽電子である。これは電子だけに限った話ではない。他の素粒子のほとんどにも、このように電荷の符号だけが違う粒子がある。これを総称して「反粒子(反物質)」という。陽電子などの反物質は、自然の状態では見られない。だが、ガンマ線同士を衝突させるなどして、真空のある一点に大きなエネルギーを集中させると、電子と陽電子のペアがポッカーリ現れる。真空中に反物質のペアが瞬間的に現れることを対生成(ついせいせい)、それらがガンマ線を出してパッと消えることを対消滅(ついしょうめつ)という。



電子 - 陽電子対の生成

ところで、何にもない真空から、なぜ電子や陽電子が生まれるのか不思議に思うかも知れない。じつは量子論的な真空とは、何もないゼロの状態ではなく、電子と陽電子の生成と消滅を繰り返している状態である。電子と陽電子は、プラスとマイナスで電氣的に中性になるので、一見何もない状態に思えるが、実際には仮想的な電子と陽電子が対生成と対消滅を繰り返しているのである。

より直感的(少々不正確ではあるが)には、真空とは負のエネルギーを持った粒子(たとえば電子)がギッシリと詰まった状態である。大量の電荷や質量が真空の状態に存在していることになるが、これがわれわれの宇宙の真空で、この状態の電荷がゼロ、質量がゼロと定義されていると考えればよい。このような真空に向けて、 $2m_0c^2$ 以上のエネルギーを注入すると、負のエネルギーの電子がエネルギーを獲得して、正のエネルギーの状態へとジャンプして通常の電子となる。一方、真空には「穴」ができる。この「穴」の開いた真空のエネルギーは、真空から負のエネルギー $-m_0c^2$ を取り去ったのだから

$$\text{真空のエネルギー } -(-m_0c^2)$$

となる。われわれは、真空のエネルギーをゼロだと思っているので、「穴」の開いた真空は

$$+m_0c^2$$

のエネルギーを持っていることになる。また、「穴」の開いた真空の電荷は

$$\text{真空の電荷 } -(-e)$$

となり、真空の電荷はゼロだと思っているので、「穴」の開いた真空は

$$+e$$

の電荷を持っていることになる。すなわち、「穴」の開いた真空は質量が m_0 で電荷が $+e$ の粒子のように振る舞うことになる。これが、陽電子(反粒子)である。

また、電子と陽電子が同じ場所に存在すると、電子はよりエネルギーの低い真空の「穴」に落ち込んで、「穴」を埋めてしまう。このとき、エネルギーの余剰が生じ、外界へのエネルギー放出が起きる。通常、高エネルギーの光(γ 線)が放射される。このような現象を「対消滅」と呼ぶ。電子と陽電子が「対消滅」を起こすためには、両者が接近していて、ほぼ静止状態でなければならない。

ある程度接近すれば、電子と陽電子は異なる符号の電荷を持っているので、引力のクーロン力によって互いに引き合って両者は結合することができる。このため、「対消滅」直前の電子と陽電子の運動量の和はほぼゼロとなる。

余剰のエネルギーを担って光が放射されるのであるが、光は運動量を持っている。「対消滅」の前後で運動量が保存するためには、放射される光は1つではだめで、正反対の方向に同じエネルギーを持った光が2つ出ていかなければならない。また、この光のエネルギーは電子の静止質量分のエネルギー

$$9.109 \times 10^{-31} [\text{kg}] \times (3 \times 10^8)^2 = 8.20 \times 10^{-14} [\text{J}]$$

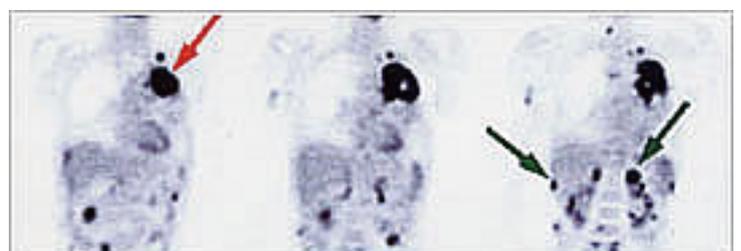
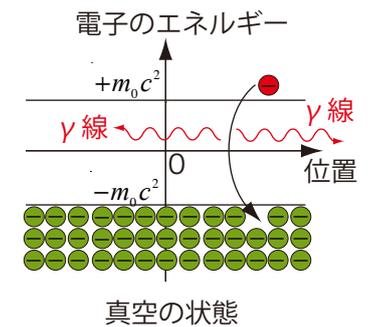
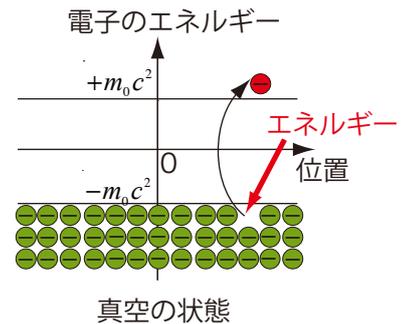
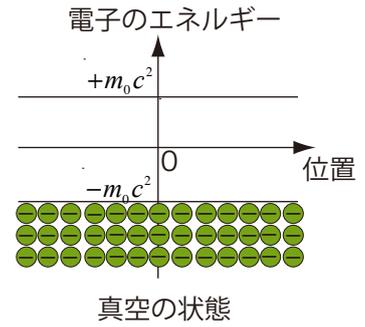
となる。このエネルギーを持つ光の波長は

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{6.6 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{8.20 \times 10^{-14}} = 2.4 \times 10^{-12} \text{ m}$$

となる(4ページ参照)。強力な画像診断法であるPET(Positron Emission Tomography)は患者の体内に陽電子を放出する放射性物質を注入し、

体内にある電子との「対消滅」によって発生する2つの γ 線を測定する装置である。2つの γ 線を同時に測定することで、容易に「対消滅」が起きた場所を特定することができ、また、外界からの雑音による影響を回避することができる。

体内にある電子との「対消滅」によって発生する2つの γ 線を測定する装置である。2つの γ 線を同時に測定することで、容易に「対消滅」が起きた場所を特定することができ、また、外界からの雑音による影響を回避することができる。



3. 一般相対性理論

3.1 加速系と慣性系

図1のように、重力のない静止状態の慣性系 K と、 K に対して上向きに加速度 g で運動している座標系 K' がある。これは、アインシュタインのによるエレベーターの思考実験として知られているものである。座標系 K に対して静止している質量 m の物体について考えてみると、座標系 K には重力がないので、物体は K に対して静止したままである。座標系 K' にいる観測者にとっては、この物体は加速度 $-g$ で下へ向かって加速度運動をするように見える

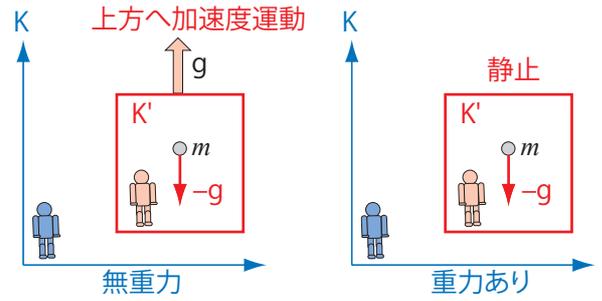


図1

図2

だろう。つまり、物体に mg という大きさの力が下向きに働いているように観測することになる。この力は慣性力として知られているものである。この状況と、図2のように重力加速度 $-g$ の重力が存在する中で、座標系 K' が静止している場合を比べてみよう。座標系 K' が閉鎖された箱であるとすると、この箱の中にある観測者はどちらの状況に置かれているか判断する手段はないであろう。

図3のように、座標系 K に重力加速度 $-g$ の重力が存在していて、座標系 K' が重力の中を自由落下している場合について考えてみる。このとき物体も自由落下するので、座標系 K' の観測者は重力の存在を感じることはないであろう。この場合と、図4のように、無重力の座標系 K の中で静止している座標系 K' を比較してみると、箱の中の観測者は両者を区別することはできないであろう。

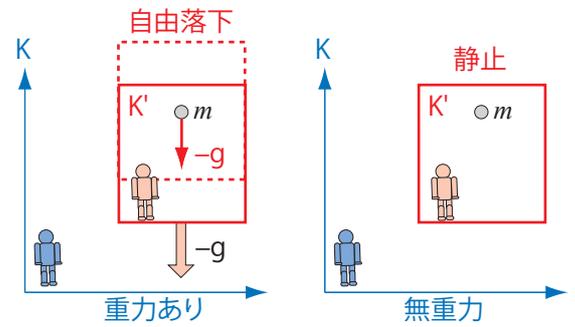


図3

図4

以上の思考実験から、

- 加速度運動をしている座標系に発生する慣性力と重力を区別する手段はない
- 自由落下する座標系を考えることで、重力を消去することができる

という可能性が示唆される。この仮定が一般相対性理論の出発点である。

図3の座標系 K' は無重力状態である。したがって、この座標系は慣性系であると考えることができる。慣性系では特殊相対性理論が成り立つので、光はこの座標系の中で一定の速度 c で直進することになる。

図5のように、座標系 K' の観測者から見て、箱の左の壁の A から右の壁 B まで光が伝わったとしてみよう。この座標系では光が直進している。

この状況を重力が存在する外部の座標系 K から見てみると、座標系 K' は自由落下しているので、 K' の速度は時間の自乗に比例して大きくなっていく。この K' の中で光は直進しているので、外部から見ると、光は放物線を描いて曲がって進行することになる。

K' という箱を考えなくても同様の結果を得ることになるだろう。つまり、重力の影響下においては、光は彎曲して進むと結論される。

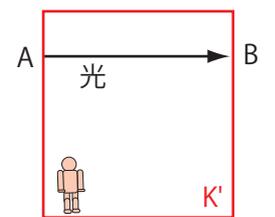


図5

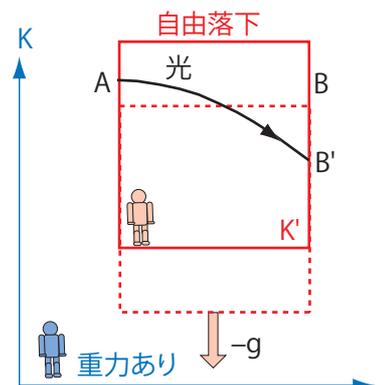
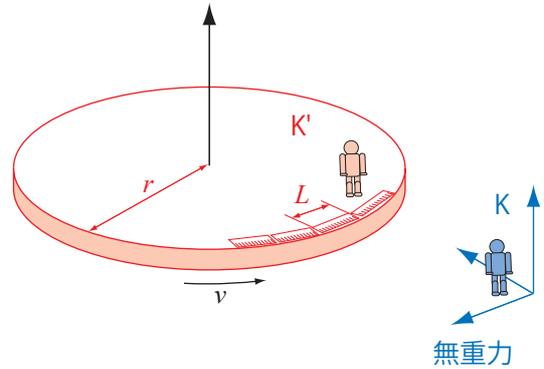


図6

3.2 重力と曲った空間

一定の速度で回転している座標系 K' と、無重力で静止している座標系 K について考えてみる。 K' 上にいる観測者は慣性力（遠心力）の影響を受けることになる。「座標系の加速度運動による慣性力と重力は区別できない」とすると、座標系 K' は円の外側へ向かって重力が働いている空間であると考えることができる。



さて、円板の周長を測定することについて考えてみよう。

まず、円板上 (K') の観測者が、長さ L の物差しを円周に沿って

隙間なく並べたとしよう。このとき、 N 本の物差しを使ったとすると、円周は NL の長さということになる。

これを、円板の外にいる観測者が測定する。 K 座標系の観測者は自分の目の前を通過して行く物差しの長さを測る。

このとき、物差しは速度 v で運動しているため、ローレンツ収縮のために、物差しの長さは

$$L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

と測定することになる。物差しの数はやはり N 本なので、座標系 K の観測者は円周の長さが

$$NL\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

であると考えられることになる。円板の半径については、速度と垂直方向の長さを測定することになるので、ローレンツ収縮の影響は受けない。ところで、座標系 K は慣性系である。したがって、ここではユークリッド幾何学が正しく成立しているはずである。(もちろん、成立しているという証拠はないのだが、それまで疑い始めると何も議論できなくなってしまう。)したがって、

$$NL\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 2\pi r$$

という関係が成立することになる。このことから、円板上の座標系 K' においては、円周長と半径の関係が

$$\text{円周長} = NL > 2\pi r$$

となり、ユークリッド幾何学が成立していないと結論される。すなわち、加速運動をしている系、あるいは、**重力が作用している系においては、非ユークリッド的な幾何学が必要である。**

3.3 非ユークリッド幾何学

ユークリッド幾何学は23の定義、5つの公理、5つの公準に基づいて構成されている。このうち公準5は「平行線の公理」とも呼ばれるが、他のものと比べて内容が複雑で、自明ではない印象を与えるものである。この「平行線の公理」が成立しない幾何学についての研究はガウスに始まるが、完成させたのはリーマンである。



Riemann 1826-1866

定義	公理
1. 点は部分をもたないものである。	1. 同じものに等しいものは互いに等しい。
2. 線とは幅のない長さである。	2. 等しいものに等しいものを加えれば、また等しい。
3. 線の端は点である。	3. 等しいものから、等しいものを引けば、残りは等しい。
4. 直線とはその上にある点について一様な線である。	4. 互いに重なり合うものは互いに等しい。
5. 面は長さのみをもつものである。	5. 全体は部分より大きい。
公準	
1. 任意の点から任意の点へ直線を引くこと。	4. すべての直角は互いに等しい。
2. 有限な直線を連続的に直線に延長すること。	5. 直線が2直線と交わるとき、同じ側の内角の和が2直角より小さいなら、この2直線は限りなく延長されたとき、内角の和が2直角より小さい側において交わる。
3. 任意の点を中心とする任意の半径の円を描くこと。	

3次元空間の非ユークリッド幾何学は想像が難しいので、曲面上の幾何学について考えてみる。図1のような曲面上に三角形を描くとその内角の和は 180° より小さくなる。また、図2の場合は、三角形内角の和は 180° より大きくなり、球面の場合、線ABは線ACと線BCに対して直交している。したがって、ユークリッド幾何学の場合は、線ACと線BCは平行で交わる点を持たないが、曲面上では、点Cが交点となっている。

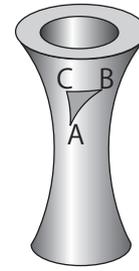


図1

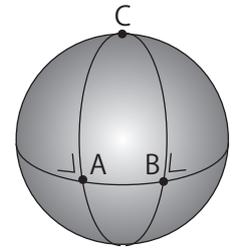


図2

このことから、3次元空間の非ユークリッド幾何学を想像することができるだろうか。上の例では3次元空間の中で作られた2次元曲面について考えた。一般相対性理論では、歪んだ3次元空間を相手にすることになるのだが、4次元空間内に作られた3次元空間を考えることになる。4つの次元とは縦、横、高さ、時間のことを意味している。

したがって、微小距離ベクトル (dx, dy, dz) だけ離れた2つの点間の距離は、もはや、

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

では定義できない。歪んだ3次元空間(時空間)の距離を定義するためには、時間についても考える必要がある。特殊相対性理論においては、時空間内の2つの点の距離 ds は

$$ds^2 = (c dt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (1)$$

はという定義を採用するのがよい。なぜならば、ローレンツ変換は

$$x' = \frac{x - \frac{v}{c}(ct)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad ct' = \frac{(ct) - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

なので、微小時間、微小距離についての関係は

$$dx' = \frac{dx - \frac{v}{c}(c dt)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad c dt' = \frac{(c dt) - \frac{v}{c}dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz$$

となる。これらの関係を式(1)の定義に代入して、2つの座標系での距離の関係を調べてみると

$$\begin{aligned} ds'^2 &= (c dt')^2 - (dx')^2 - (dy')^2 - (dz')^2 \\ &= \frac{\left(c dt - \frac{v}{c}dx\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{\left(dx - \frac{v}{c}(c dt)\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - dy^2 - dz^2 \\ &= (c dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \end{aligned}$$

のようになっていることが分かる。したがって、式(1)のように距離を定義しておけば、どのような慣性系においても距離は同じ値となる。逆の言い方をすると、**時空間の距離は式(1)で定義されて、この距離を不変に保つような座標変換がローレンツ変換である。**

一般相対性理論の場合には、時空間の座標がグチャグチャに混じり合うことになる。このために時空間の距離を一般的に表す必要がある。時空間の座標を

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

のように表して、距離を

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

と書くことにする。ここで $g_{\mu\nu}$ は**計量テンソル**と呼ばれ、重力がなくて時空間が平坦な場合には

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = -1, \quad g_{22} = -1, \quad g_{33} = -1, \quad \text{その他はゼロ}$$

となる。

3.4 一般相対性理論と等価原理

一般相対性原理

これまでの議論で分かるように、重力を問題とする場合、時間と空間を記述するための座標系は、単純な直交座標系という訳にはいかない。非ユークリッド幾何学を可能にするような曲線座標系を選択しなければならない。

さらに、そのような座標系の設定の仕方は一通りではないであろう。どのように、どのような座標系を設定するかで物理法則が変わってしまうようでは、何を議論しているのかが分からなくなってしまう。アインシュタインはそう考えて、慣性空間でだけ成立する特殊相対性原理を一般化して、

すべての基本的物理法則は、任意の座標系で同じ形で表される

という原理を要請した。

等価原理

上の一般相対性原理の任意の座標系というものは、そのスケールも、座標の網目の角度も場所によって変化するものである。このような勝手な座標系だけを考えて

いたのでは、物理法則を一義的に記述することが不可能になってしまう心配がある。この困難を克服する手がかりを与えてくれるのが等価原理である。図の

ように自由落下する座標系は無重力であり、そこでは特殊相対性理論が成立する。

つまり、われわれはこの座標系での物理法則をすでに知っているのである。

そこで、図のように座標系を自由落下させることによって、重力がある場合に

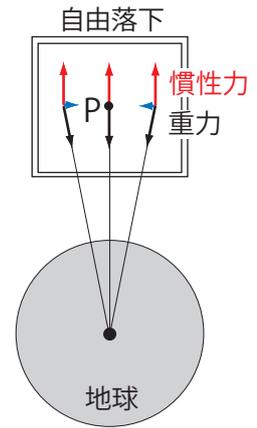
必要となる一般の座標系で成立する法則を求めることができるだろう。

しかし、自由落下させることによって重力を消し去ることができるのは、

狭い箱の中だけであって、例えば図のように箱の大きさが地球の大きさに比べて

無視できないときには、箱の内部の重力を全域にわたって消し去ることはできない。

そこで、図における点Pのような重力を消去できる点を考え、順にそのような重力を消去する手続きを積み重ねて行くという方法をとることにする。こうして、アインシュタインは、一般相対性原理を実質的に有効にする指導原理としての等価原理を



時空内の任意の点をかこむ無限小領域ではいかなる重力も消し去ることができ、そこでは特殊相対性理論の法則が成立する

とした。

重力場の方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu}$$

重力場方程式の読み方

□ 添字のギリシャ文字 (μ, ν, σ, ρ) には、0,1,2,3 の数字が当てはまる。

□ 上下に表れる同じギリシャ文字は 0~3 の和をとる。たとえば $A^\mu B_\mu = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3$

□ 方程式に表れる記号は以下のように定義されている。

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\rho\mu}^\rho}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma_{\nu\mu}^\rho}{\partial x^\rho} + \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\lambda - \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \quad \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\mu} \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}$$

$$\text{計量テンソル } g_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} \frac{\partial X^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\sigma}{\partial x^\nu} \quad \eta_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} X^\mu : \text{重力を消去した座標} \\ x^\mu : \text{重力が存在する一般座標} \end{array}$$

エネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ (静止している座標系では $T_{00} = \rho c^2$, ρ は密度を表す)

3.5 一般相対性理論からのいくつかの結論

3.5.1. 重力による時計の遅れ

特殊相対性理論の議論において、運動する時計は静止している時計に対して遅れていくことを示した。重力の影響によっても時間の進み方が遅くなる現象について考えてみよう。

図のように、上空に置かれた時計1と地上に置かれた時計2を考える。この2つの時計の進み方を比較するために、自由落下する箱に固定された時計0を利用する。箱が自由落下するまで、時計0は時計1の位置に静止していたとしよう。このとき、時計0と時計1の進み方は一致しているはずである。箱をつなぎ止めているロープを切った瞬間は、時計0の地面に対する速度はゼロである。したがって、その瞬間の時計0の進み方 Δt_0 と時計1の進み方 Δt_1 は等しく

$$\Delta t_0 = \Delta t_1 \quad (1)$$

である。箱は次第に速度を増しながら自由落下をはじめますが、箱の中は無重力状態なので、ここでは特殊相対性理論が成立している。したがって、自由落下している間、時計0の進み方は一定で変わらない。その箱が地上に到達したときの速度を v をすると、箱からみれば地上の時計2は速度 v で上空に向かって飛び上がっていく。この瞬間に箱から見た時計2の進み方は

$$\Delta t_2 = \Delta t_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

となつて、箱の中の時計0の進み方 Δt_0 より遅れていることになる。これに式(1)を代入すると

$$\Delta t_2 = \Delta t_1 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < \Delta t_1$$

となる。つまり、地上の時計の進み方は上空の時計の進み方より遅く、遅れていくことになる。

GPS (Global Positioning System) 衛星

30機のGPS衛星が地上 約2万km の高さを 0.5日の周期で周回している。

この衛星には原子時計が搭載されており、衛星の位置は正確に把握されている。衛星からの電波を受信すると、電波の発射時刻と受信時刻から、受信機と衛星間の距離が算出できる。したがって、経度、緯度、高さを決めるためには3つ衛星からの電波を受信すればよい。しかし、受信機の時計の精度はよくないので、時刻を決めるためにもう1つ、合計4つの衛星を使うことになる。仮に、時刻に 5×10^{-10} 秒の誤差があると、GPSを用いた位置については、最大で

$$5 \times 10^{-10} \times 3 \times 10^8 \times 4 = 0.6 \text{ m} = 60 \text{ cm}$$

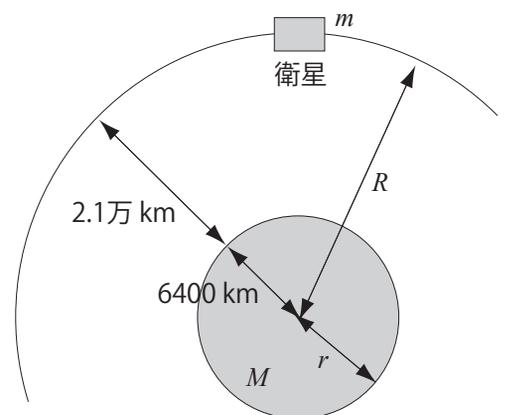
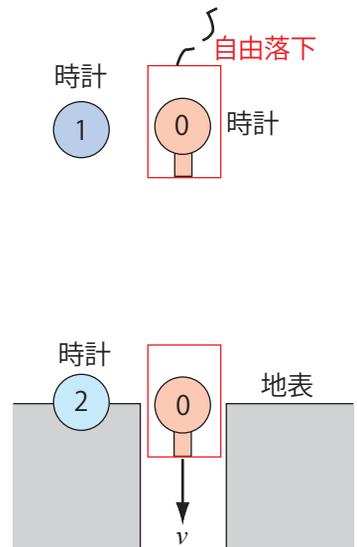
の誤差が生じることになる。重力の影響による時計の遅れを計算するために、GPS衛星の位置から物体が自由落下して地表に到達するときの速さを求めてみると

$$\frac{1}{2}mv^2 = G\frac{mM}{r} - G\frac{mM}{R} \quad v^2 = 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) = 2 \times 6.7 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24} \left(\frac{1}{6.4 \times 10^6} - \frac{1}{2.1 \times 10^7}\right) = 8.7 \times 10^7$$

となる。したがって、衛星の1秒と地表の1秒の差は

$$1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1 - \sqrt{1 - \frac{8.7 \times 10^7}{9 \times 10^{16}}} = 4.9 \times 10^{-10}$$

となる。このような重力による時計の遅れの影響を補正するために、衛星の時計は 4.45×10^{-10} 秒だけゆっくり進むようにあらかじめ設定されている。



3.5.2 光の歪曲

重力による光の歪曲は一般相対性理論によって予言された。1919年、イギリスの天文学者エディントンは、観測隊を率いてアフリカのギニア沖にあるプリンシベ島で、日食時に太陽の重力による星からの光の歪曲を観測した。この観測の結果は一般相対性理論の予言と一致するものであった。

ところで、一般相対性理論でなくても、光が重力によって曲げられるという現象は起きる。まず、このことを調べてみよう。

いま、光を質量 m を持った粒子であると考えて、それが、光速 c で無限遠方 ($x=-\infty$) から飛んで来て、半径が R で質量が M の星のそばを通過し、無限遠方 ($x=+\infty$) へ飛び去ることを考える。

質量のある光は星からの重力のために進路が曲げられるが、曲り方はわずかな量であると予想されるので、光の進路は直線であると近似する。光がこの進路を進んで、無限遠方に飛び去ったとき、進路と垂直な速度成分がどのようになっているかを考える。

運動量と力積の関係を用いると

$$mv = \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} f(t) dt = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x) \frac{dx}{c} = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{GmM}{x^2 + R^2} \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}} \frac{dx}{c} = \frac{2GmM}{cR}$$

となることが分かる。ここで、積分は $x=\tan\theta$ と置換すると実行することができる。したがって、光が $x=+\infty$ に到達したときには

$$v = \frac{2GM}{cR} \downarrow \quad \rightarrow c$$

のような速度を持つことになる。このことから、光の進路は

$$\alpha \equiv \tan \alpha = \frac{v}{c} = \frac{2GM}{c^2 R}$$

の角度だけ曲ることになる。星が太陽の場合

$$R = 6.96 \times 10^8 \text{ m}, \quad M = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad G = 6.7 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}, \quad c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \alpha = 4.26 \times 10^{-6} \text{ ラジアン} = 2.43 \times 10^{-4} \text{ 度} = 0.88 \text{ 秒}$$

となる。光は質量を持っていないが、エネルギーと質量の等価性から、光も重力による影響を受けることになる。

一般相対性理論に基づく考察のためには、重力場方程式を解く必要がある。アインシュタインは近似を用いて重力場方程式を解いて光が曲る角度を算出した。シュワルツシルドは、原点を中心として質量 M の球対称な物体があるときについて、その物体の周囲の空間について重力場方程式を解いた。

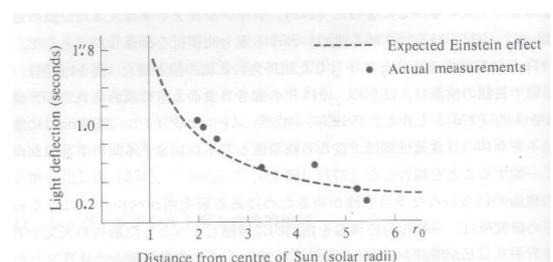
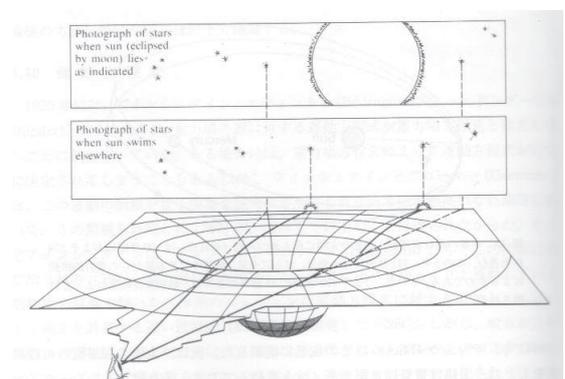
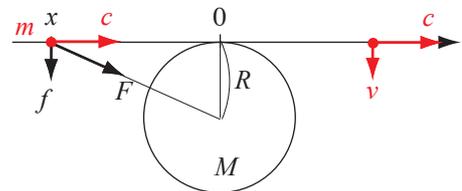
$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) (dx^0)^2 - \frac{1}{1 - \frac{a}{r}} (dr)^2 - r^2 ((d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\phi)^2) \quad a = \frac{2GM}{c^2}$$

光は $ds=0$ となる経路を進むことになり、その結果、歪曲の角度は

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2} = 1.76 \text{ 秒}$$

となる。これは、上で議論した計算のちょうど2倍となっている。

エディントンによる結果は右の図のようなもので、一般相対性理論の予言によく一致している。



3.5.3 水星の近日点移動

水星は太陽のまわりを楕円運動をしているが、詳しい観測によると、太陽に水星が最も近づく位置(近日点)が移動していくことが知られている。その移動の大部分は、他の惑星からの引力の効果として説明できるが、ニュートン力学ではどうしても説明できない部分が残るのである。一般相対性理論が完成する以前に、ニュートン力学によって精密に水星の軌道を計算が行われて、信頼できる観測値と比べると、近日点が動いていく角度は、100年あたりに

$$43.11 \pm 0.45 \text{ 秒}$$

だけは説明がつかないことが知られていた。重力場方程式によると、水星の軌道は

$$(u')^2 + (u)^3 - \frac{2GM}{h^2}u - \frac{2E}{h^2} = a(u)^3$$

ただし $u = \frac{1}{r}$, $u' = \frac{du}{d\phi}$, $a = \frac{2GM}{c^2}$, h : 面積速度, E : 惑星のエネルギー, M : 太陽の質量

という微分方程式の解であることが分かる。ここで、右辺の $a(u)^3$ の項が一般相対性理論の影響で表れたものであり、この項がなければ正確にニュートン力学の結果と同じになる。この微分方程式を解くと、近日点は、水星が1周するごとに

$$\delta = \frac{6\pi GM}{c^2 A(1-e^2)} \quad A: \text{楕円軌道の長軸の長さ} \quad e: \text{離心率}$$

という角度だけ移動していくことが分かる。水星の場合、

$$A = 5.8 \times 10^{10} \text{ m}, \quad e = 0.2056$$

なので

$$\delta = \frac{6\pi \times 6.7 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30}}{(3 \times 10^8)^2 \times 5.8 \times 10^{10} \times (1 - 0.2056^2)} = 5.05 \times 10^{-7} \text{ ラジアン} = 0.104 \text{ 秒}$$

となる。水星は 0.2409 年で公転するので、100年では

$$43.2 \text{ 秒}$$

という角度だけ近日点が移動することになる。これは、観測の結果と極めてよく一致するものである。

3.5.4 ブラックホール

シュワルツシルドの解

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right)(dx^0)^2 - \frac{1}{1 - \frac{a}{r}}(dr)^2 - r^2((d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\phi)^2) \quad a = \frac{2GM}{c^2}$$

を見てみると、重力の発生源(原点)からの距離が

$$r = a = \frac{2GM}{c^2}$$

となるとき、分母がゼロとなる項が含まれている。この距離においては時空の距離が定義できなくなる。この距離はシュワルツシルド半径と呼ばれている。例えば、太陽の場合は

$$r = \frac{2 \times 6.7 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30}}{(3 \times 10^8)^2} = 3 \times 10^3 \text{ m} = 3 \text{ km}$$

となる。太陽の半径は $6.96 \times 10^5 \text{ km}$ であるから、太陽の周辺にはこのような場所は存在していない。

