

P74 2. a) $\frac{1.67 \times 10^{-27}}{\frac{4}{3}\pi(10^{-15})^3} = 3.99 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$

b) 水素原子の内部はスカスカ

3. 王冠の体積のうち、金の体積が V_{Au} 、銅の体積が V_{Cu} であるとすると

$$V_{\text{Au}} + V_{\text{Cu}} = 40 \times 10^{-6} \text{ [m}^3\text{]}$$

となる。また、質量については

$$19.3 \times 10^3 \times V_{\text{Au}} + 8.93 \times 10^3 \times V_{\text{Cu}} = 0.5 \text{ [kg]}$$

このことから、 V_{Au} と V_{Cu} をもとめると

$$V_{\text{Au}} = 13.8 \times 10^{-6}, V_{\text{Cu}} = 26.2 \times 10^{-6} \longrightarrow \frac{V_{\text{Au}}}{V_{\text{Cu}}} = 0.53$$

4. 地球を取り囲む空気には重力が働き、その力が地表を押している。大気圧は、空気が単位面積の地表を押す力である。正確に計算するためには、高度によって空気の密度がどのように変化するかを知る必要がある。ここでは、簡単のために密度は一定、重力加速度も一定として考えることにする。

地球の表面全体が大気圧によって押される力の合計は

$$1.01 \times 10^5 \times 4\pi \times (6.37 \times 10^6)^2 = 5.15 \times 10^{19} \text{ [N]}$$

である。この力は空気全体に働く重力と等しいので、空気の質量は

$$\frac{5.15 \times 10^{19}}{9.8} = 5.26 \times 10^{18} \text{ [kg]}$$

となる。

5. a) 2本の足で体重を支えているので、おへその位置に体重の半分が作用して、片足に働く力とのつり合いを考えればよい。

体重の半分の力は

$$F = 25 \times 9.8 = 245 \text{ [N]}$$

で、つま先に働く力の大きさを F_1 、踵に働く力の大きさを F_2 とすると、力のつりあいの条件は

$$F_1 + F_2 = F$$

となる。また、図のように回転軸をとったときの力のモーメントのつり合いは

$$14 \times F_1 - 6 \times F_2 = 0$$

となる。したがって、

$$F_2 = \frac{14}{20} F = 171.5 \text{ [N]}$$

である。

b) 踵に働く圧力は

$$\frac{171.5}{\pi \times (0.005)^2} = 2.2 \times 10^6 \text{ [N/m}^2\text{]}$$

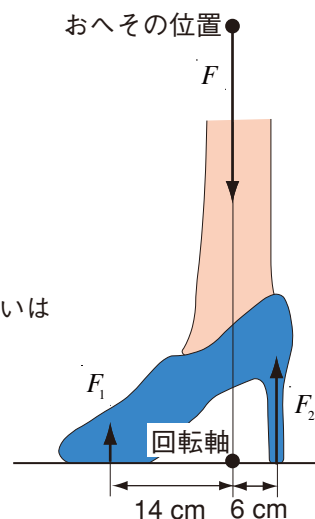
c) 足底が楕円であるとして



という数値を採用すると、面積は $\pi \times 10 \times 4 = 125.7 \text{ [cm}^2\text{]}$

なので、足底の圧力は

$$\frac{245}{125.7 \times 10^{-4}} = 1.9 \times 10^4 \text{ [N/m}^2\text{]}$$



P74 6. a) パスカルの法則から，カーリフト内の圧力はどこでも同じである。したがって，

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \Rightarrow F_1 = \frac{S_1}{S_2} F_2 \quad \text{ただし} \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi \times (0.05)^2}{\pi \times (0.15)^2} = \frac{1}{9}$$

よって， $\frac{1}{9}$ トンの物体に働く重力に相当する力

$$b) \quad P = \frac{F_2}{S_2} = \frac{1000 \times 9.8}{\pi \times (0.15)^2} = 1.4 \times 10^5 \text{ [Pa]}$$

c) 車が 1 m 上昇したとき，カーリフト内の液体（通常は油）は

$$S_2 \times 1 \text{ [m}^3\text{]}$$

の体積分移動する。これと同じ体積だけ小さなピストンの液体も移動するので、小さなピストンの移動距離を L [m] とすると

$$S_1 \times L = S_2 \times 1 \Rightarrow L = \frac{S_2}{S_1}$$

となり， $L = 9$ [m] である。

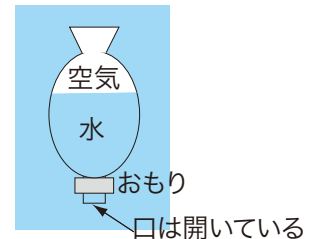
d) 車は 9800 N の力で 1 m 移動したのだから 9800 J の仕事をされた。

e) ピストンを押す力は $\frac{1}{9} \times 9800$ N で，ピストンは 9 m 動くので

$$\frac{1}{9} \times 9800 \times 9 = 9800 \text{ [J]}$$

となり，d) の結果と一致する。（エネルギー保存則）

7. 図のように，浮沈子には途中まで水が入れてあり，おもり込みの全体の重さは浮沈子に働く浮力とほぼつり合うように調節してある（わずかに浮力が大きい）。浮沈子が入れてあるペットボトルを押すと，パスカルの法則によって，すべての部分の圧力が大きくなる。この圧力は浮沈子内の空気にも働くので，空気は圧縮される。その結果，浮沈子内に水が流入して，浮沈子全体の質量が増えることになる。浮沈子の体積は変わらないので，浮沈子に働く浮力は変化しない。この結果，浮沈子に働く重力が浮力をうわまわることになり，浮沈子は沈む。



8. 深さ h [m] での水圧は $\rho_{\text{水}}gh$ なので，

$$1 \times 10^3 \text{ [kg/m}^3\text{]} \times 9.8 \text{ [m/s}^2\text{]} \times 4 \text{ [m]} \times 0.7 \text{ [m]} \times 2 \text{ [m]} = 5.5 \times 10^4 \text{ [N]} \quad (5.6 \text{ トンに相当})$$

9. 物体の密度を ρ ，体積を V ，流体 X の密度を ρ_x とすると

$$\rho Vg = 15 \text{ [N]}, \quad \rho Vg - \rho_{\text{H}_2\text{O}} Vg = 12 \text{ [N]}, \quad \rho Vg - \rho_x Vg = 13 \text{ [N]}$$

が成立する。未知数は ρ ， V ， ρ_x なので，3つの関係式から求めることができる。

$$\rho = 5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad V = 3.1 \times 10^{-4} \text{ m}^3, \quad \rho_x = 6.7 \times 10^2 \text{ kg/m}^3$$

10. 灯油 6 cm による圧力と水 $6-h$ cm による圧力が等しい。

$$0.82 \times 10^3 \times 6 \times 10^{-2} \times g = 1 \times 10^3 \times (6-h) \times 10^{-2} \times g \Rightarrow h = 1.08 \text{ cm}$$

P75 11. 冰山全体の体積を V ，海水内の体積を $V_{\text{海}}$ とすると，冰山に働く浮力は

$$\rho_{\text{海}} \times V_{\text{海}} \times g$$

である。これが，冰山に働く重力 $\rho_{\text{氷}} \times V \times g$ とつり合っているので

$$\rho_{\text{氷}} \times V \times g = \rho_{\text{海}} \times V_{\text{海}} \times g$$

が成立する。したがって，

$$\frac{V_{\text{海}}}{V} = \frac{\rho_{\text{氷}}}{\rho_{\text{海}}} = \frac{0.917}{1.024} = 0.896 \quad (89.6\% \text{ は海の中})$$

12. a) 浮力の大きさは $30 \times 10^4 \text{ トン} \times g = 3 \times 10^8 \times g \text{ [N]}$

これが船に働く重力とつり合っている。重力の大きさは

$$\text{鉄板: } (300 \times 100 + 300 \times h + 100 \times h) \times 0.02 \times 2 \times \rho_{\text{鉄}} \times g$$

$$\text{原油: } 300 \times 100 \times h \times \rho_{\text{油}} \times g$$

の和である。したがって

$$(3 \times 10^4 + 400h) \times 0.04 \times 7.9 \times 10^3 + 3 \times 10^4 \times h \times 0.9 \times 10^3 = 3 \times 10^8$$

が成立することになり、 $h = 10.7 \text{ m}$ であることが分かる。

b) 30 万トン分の海水の体積は

$$\frac{300000 \times 10^3}{1 \times 10^3} = 3 \times 10^5 \text{ [m}^3\text{]}$$

なので、海水内の船の体積が $3 \times 10^5 \text{ m}^3$ となる。したがって、海水内の船の高さを x とすると

$$300 \times 100 \times x = 3 \times 10^5$$

となるので、 $x = 10 \text{ m}$ であることが分かる。a) の結果から船は 0.7 m だけ海面に出ていることになる。

c) 原油を積んでいないとき、船の質量は鉄板によるものだけとなるので

$$(300 \times 100 + 300 \times h + 100 \times h) \times 0.02 \times 2 \times \rho_{\text{鉄}} \times g = 1.08 \times 10^7 \times g \text{ [N]}$$

となる。原油を積んでいないときの海水内の船の高さを x とすると

$$1.08 \times 10^7 \times g = \rho_{\text{海}} \times 300 \times 100 \times x \times g$$

より

$$x = 0.36 \text{ m}$$

となる。

13. a) 水深 $x \text{ m}$ での水圧は $\rho g x$ である。いま、水の底から高さ y の位置は水面からの深さが $H - y$ なので、水圧は $\rho g(H - y)$ となる。

b) 茶色の部分の面積は $w \times dy \text{ [m}^2\text{]}$ である。したがって、この部分に働く力は

$$\rho g(H - y) \times w \times dy \text{ [N]}$$

c) b) の結果を $0 \leq y \leq H$ の範囲で足し上げれば（積分すれば）よいので、

$$\int_0^H \rho g(H - y) \times w \times dy = \rho g w \left[Hy - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^H = \frac{1}{2} \rho g w H^2 \text{ [N]}$$

d) c) の結果から

$$\frac{1}{2} \times 10^3 \times 9.8 \times 100 \times 30^2 = 4.41 \times 10^8 \text{ [N]}$$

これは、 $4.5 \times 10^7 \text{ kg}$ の物体に働く重力に相当する。したがって、4.5 万トン。

14. a) 角速度 Ω で半径 R の位置にある質量 m の物体に働く遠心力は $mR\Omega^2$ である。注目している微小部分の質量は $\rho \times A \times dR$ なので、この部分に働く遠心力は

$$\rho \times A \times dR \times R\Omega^2$$

となる。

b) プリント 73 ページ式 (6) $\frac{dP(z)}{dz} = \rho(z)g$ において、重力が遠心力に、 z が R に対応すると考えればよい。

式 (6) の右辺は、単位体積の流体に働く重力を表しているので、いまの場合、単位体積の流体に働く遠心力を考えることになる。a) の結果は体積 $A \times dR$ の流体に働く遠心力なので、

$$\frac{dP(R)}{dR} = \rho R\Omega^2$$

とすればよい。

P75 14. c) b) の結果は R についての微分方程式なので、 R について積分をして半径 R の位置での圧力 $P(R)$ を求めればよい。b) の両辺を $R_0 \sim R$ の範囲で積分すると

$$\int_{R_0}^R \frac{dP(R)}{dR} dR = \int_{R_0}^R \rho R \Omega^2 dR \quad \Rightarrow \quad [P(R)]_{R_0}^R = \left[\frac{1}{2} \rho \Omega^2 R^2 \right]_{R_0}^R \quad \Rightarrow \quad P(R) - P(R_0) = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 (R^2 - R_0^2)$$

流体の表面は R_0 の位置で、大気にさらされているので、表面の圧力は大気圧と等しい ($P(R_0) = P_0$)。したがって、

$$P(R) = P_0 + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 (R^2 - R_0^2)$$

d) $R = R_0 + z$ を用いて c) の結果を書き直すと (圧力を z の関数として表す。 $\tilde{P}(z) = P(R_0 + z)$)

$$\tilde{P}(z) = P_0 + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 \{ (R_0 + z)^2 - R_0^2 \} = P_0 + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 R_0^2 \left\{ \left(1 + \frac{z}{R_0} \right)^2 - 1 \right\}$$

となる。ここで、 $z \ll R_0$ なので

$$\left(1 + \frac{z}{R_0} \right)^2 \cong 1 + 2 \frac{z}{R_0}$$

の近似を用いると

$$\tilde{P}(z) \cong P_0 + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 R_0^2 \left\{ 1 + 2 \frac{z}{R_0} - 1 \right\} = P_0 + \rho \Omega^2 R_0 z$$

e) 水深 h の位置での圧力は $P_0 + \rho g h$ である。これを d) の結果と比べると、遠心分離機内の流体は、重力加速度が $\Omega^2 R_0$ であるような環境に置かれていると考えることができる。したがって、

$$\frac{\Omega^2 R_0}{g} = \frac{(2\pi \times 500)^2 \times 5 \times 10^{-2}}{9.8} = 5 \times 10^4$$

となる。すなわち、5万倍の重力下に流体が置かれることに相当する。「沈殿」という現象は、重力によるもので、重い物質が底の方にたまる。遠心分離機を用いると、重力を大きくした環境を作り出すことができ、よりすばやく、明確に物質を分離することができる。

P78 1. 私の場合の測定結果

	高	低
腕を挙げたとき	82	52
腕を心臓の位置にしたとき	138	108
腕を下げたとき	170	125 mmHg

で考える。腕を心臓の位置にした場合との差は

腕を挙げたとき	-56	-56
腕を下げたとき	+32	+17 mmHg

となっている。腕を挙げたとき、手首から心臓までの距離を 80 cm とすると

$$80[\text{cmH}_2\text{O}] = \frac{80}{1.36} [\text{mmHg}] = 58.8[\text{mmHg}]$$

だけ血圧が下がることとなり、測定結果とほぼ一致している。また、腕を下げたとき、手首から心臓までの距離を 40 cm とすると

$$40[\text{cmH}_2\text{O}] = 29.4[\text{mmHg}]$$

だけ血圧が上がることとなり、測定結果とまあまー一致している。

2. 0.4 m 上方のとき、脳内の血圧は 心臓の位置での血圧40 cmH₂O で
0.4 m 下方のとき、脳内の血圧は 心臓の位置での血圧40 cmH₂O となる。
したがって、その差は

$$80 [\text{cmH}_2\text{O}] = \frac{80}{1.36} [\text{mmHg}] = 58.8[\text{mmHg}]$$

P80 1. パイプは水平なので、ベルヌーイの定理における ρgh の項は考えなくてよい。したがって、

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

が成立している。また、非圧縮流体であるから

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (\text{体積が変化しないための条件})$$

という関係がある。したがって

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 v_2^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

となり、よって

$$v_2 = A_1 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$$

2. タンクの液面と穴の出口についてベルヌーイの定理を考える。穴の位置での流体の速さを v 、タンクの液面が降下する速さを v' とすると、

$$P_a + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y = P + \frac{1}{2} \rho v'^2 + \rho g (h + y)$$

が成立する。穴の断面積を A 、タンクの断面積を A' とすると、穴から流れ出る流体の体積とタンク内の流体が減少する体積は同じなので

$$Av = A'v'$$

が成り立っている。ここで、穴の断面積がタンクの断面積に比べて極めて小さいとすると ($A \ll A'$)

$$v' = \frac{A}{A'} v \approx 0$$

であると近似することができる (タンクの液面はほとんど変わらない)。したがって、

$$v = \sqrt{\frac{2(P - P_a)}{\rho} + 2gh}$$

となる。さらに、タンク液面での圧力と穴の出口での圧力が等しい (両方とも大気圧) $P = P_a$ の場合は

$$v = \sqrt{2gh}$$

3. 翼の上部は下部と比べて流体の速度が大きくなる。したがって、ベルヌーイの定理から、上部の圧力は下部の圧力よりも小さくなる。よって、翼には上向きの力が働く。

4. a) 大気圧を P_0 とし、管から流れ出す水の速さを v 、タンクの水面が降下する速さを v' とすると、タンクの液面 (A) と管の出口 (B) についてベルヌーイの定理を適用すると (B の位置を高さの基準とする)

$$P_0 + \frac{1}{2} \rho v'^2 + \rho g h = P_0 + \frac{1}{2} \rho v^2$$

が成立する。したがって $v^2 - v'^2 = 2gh$ となる。タンクの径は管の径に比べて十分に太いので $v \gg v'$ となる。このことから

$$v = \sqrt{2gh} = 4.4 \text{ [m/s]}$$

b) 管内の水の速さは管の出口と同じである。(同じ時間内に管内を通過する水の量は一定である。)

管の頂点での圧力を P とすると、B と C の位置に対してベルヌーイの定理を適用すると

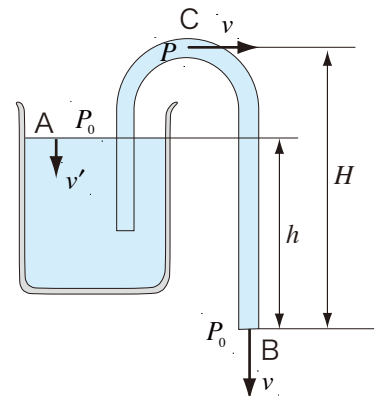
$$P_0 + \frac{1}{2} \rho v^2 = P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g H$$

が成立する。よって

$$P = P_0 - \rho g H$$

となる。水の蒸気圧は $3.53 \times 10^3 \text{ [Pa]}$ であるが、この圧力を下回ると水は沸騰して蒸気となり、サイフォンの役目を果たせなくなる。したがって、大気圧が $P_0 = 1.0133 \times 10^5 \text{ [Pa]}$ であることから

$$P = P_0 - \rho g H > 3.53 \times 10^3 \quad \longrightarrow \quad H < \frac{P_0 - 3.53 \times 10^3}{\rho g} = \frac{1.0133 \times 10^5 - 3.53 \times 10^3}{10^3 \times 9.8} = 9.98 \text{ [m]}$$



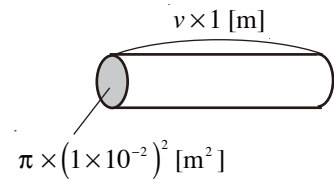
P81 1. (1) $1\ell = 10^{-3} \text{ m}^3$ に注意して

$$5[\ell / \text{min}] = \frac{5 \times 10^{-3}}{60} [\text{m}^3 / \text{s}] = 8.3 \times 10^{-5} [\text{m}^3 / \text{s}]$$

1秒間に大動脈のある断面を $8.3 \times 10^{-5} \text{ m}^3$ の血液が通過するので、血液の速さを v とすると

$$\pi \times (1 \times 10^{-2})^2 \times v = 8.3 \times 10^{-5}$$

となり $v = 0.26 [\text{m/s}]$



(2) $P = \rho gh$ より $100 \times 10^{-3} [\text{m}] \times 13.59 \times 10^3 [\text{kg/m}^3] \times 9.8 [\text{m/s}^2] = 1.33 \times 10^4 [\text{Pa}]$

(3) ベルヌーイの定理には、 P , ρgh , $\frac{1}{2} \rho v^2$ の3つの項が関係している。それぞれの大きさを比較してみると

$$P = 100 [\text{mmHg}] = 1.4 \times 10^4 [\text{Pa}]$$

$$\rho gh = 0 \sim 1 \times 10^3 [\text{kg/m}^3] \times 2 [\text{m}] \times 9.8 [\text{m/s}^2] = 0 \sim 2 \times 10^4 [\text{Pa}]$$

$$\frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 10^3 [\text{kg/m}^3] \times (0.26 [\text{m/s}])^2 = 33.8 [\text{Pa}]$$

となっており、 $P + \rho gh = 1.4 \times 10^4 \sim 3.4 \times 10^4 [\text{Pa}]$ の値に対して $\frac{1}{2} \rho v^2$ は3ケタ小さい値でしかない。

(4) 寝ている場合：すべて 100 mmHg

立っている場合：足 $100 [\text{mmHg}] + 1 \times 10^3 [\text{kg/m}^3] \times 1.2 [\text{m}] \times 9.8 [\text{m/s}^2] \times \frac{1}{133.32} = 188.2 [\text{mmHg}]$

頭 $100 [\text{mmHg}] - 1 \times 10^3 [\text{kg/m}^3] \times 0.6 [\text{m}] \times 9.8 [\text{m/s}^2] \times \frac{1}{133.32} = 55.9 [\text{mmHg}]$

(5) 心臓の位置 逆流する

P76 の $h [\text{mmHg}] = \rho_{\text{Hg}} \times (h \times 10^{-3}) \times g = 133.32 \times h [\text{Pa}]$ より

2. (1) 高くなる。

脳の位置が 80 cm だけ低くなったので $80 [\text{cmH}_2\text{O}] \times \frac{\rho_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho_{\text{Hg}}} = \frac{80}{13.59} [\text{cmHg}] = 58.8 [\text{mmHg}]$

(2) 立ち上がる時の加速度は上向きである。したがって、下向きの慣性力 (P42 参照) が働くことになる。加速度の大きさを a とすると重力加速度 g が $g+a$ へと大きな値に変更されたと考えることができる。すなわち、頭部における血圧が低くなり、血液が不足する。



P76 を参考にして、頭部動脈の圧力がゼロとなるような加速度はどのような大きさとなるか、計算してみよ。

(3) (1) の結果のように、頭部の血圧を上昇させることができる。

3. 管の入り口が水面下 $h [\text{m}]$ の位置であるとする。液面と管の上端での圧力は大気圧 P である。管の入り口 (A) と管の内部 (B) について考えてみる。(他の場所についての関係を議論しても同じ結果が得られることを確認せよ。) A は大気圧 P の場所から h だけ潜った場所で、B は $h+0.2$ だけ潜った場所なので、それぞれの場所での圧力は

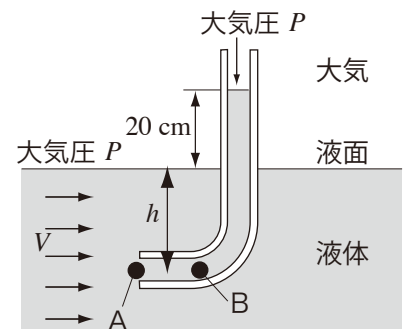
$$P_A = \rho gh \quad P_B = \rho g(h+0.2)$$

となる。これら2点についてベルヌーイの定理を考えると (高さは同じ) となり、

$$P_A + \frac{1}{2} \rho V^2 = P_B$$

$$V = \sqrt{2g \times 0.2} = 2 [\text{m/s}]$$

であることが分かる。このような方法で流速を測定することができる。



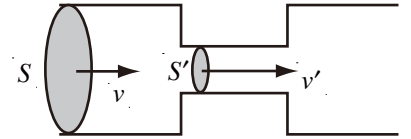
P82 4. (1) 図のように断面積が異なる管が接続されている場合を考え ($S > S'$), それぞれの部分の流速を v, v' とする。

太い部分と細い部分を単位時間を通しての流体の体積は等しいので、

$$S \times v = S' \times v'$$

が成立する。したがって

$$v' = \frac{S}{S'} \times v > v$$



(2) 太い部分の圧力を P , 細い部分の圧力を P' とすると、ベルヌーイの定理から

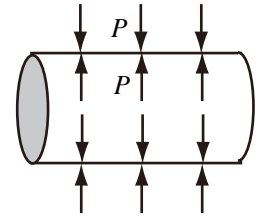
$$\frac{1}{2} \rho v^2 + P = \frac{1}{2} \rho v'^2 + P'$$

となり、

$$P' = P - \frac{1}{2} \rho (v'^2 - v^2) < P$$

細い部分の圧力が低くなるのが分かる。

(3) 通常の血管においては、血液の圧力 P によって血管壁は外向きに押され、それとつり合う圧力で外部から押し返されている。いま、血管が閉塞して、断面積が小さくなると、(2) の結果から圧力が降下する。血管壁が外部から押される圧力は変わらないはずだから、外部から血管を収縮させる圧力が血液の圧力を上回ることになる。このため、血管をより閉塞させることになる。血管がより閉塞すると、血液の圧力はより降下することになるので、閉塞はより深刻なものとなる。



5. 生理食塩水 0.67 m 分による圧力が血圧と同じになっている。生理食塩水による圧力は

$$\rho_{\text{NaCl}} g h_{\text{NaCl}} = 1300 [\text{kg/m}^3] \times 9.8 [\text{m/s}^2] \times 0.67 [\text{m}]$$

で求めることができ、これを水銀圧に変換するには $\rho_{\text{NaCl}} g h_{\text{NaCl}} = \rho_{\text{Hg}} g h_{\text{Hg}}$ の関係をもちいればよい。したがって、

$$h_{\text{Hg}} = \frac{1300}{\rho_{\text{Hg}}} \times 0.67 = \frac{1300}{13.59 \times 10^3} \times 0.67 = 0.064 [\text{m}]$$

となる。よって、血圧は 64 mmHg。

6. 発泡スチロールの面積を $S [\text{m}^2]$ とすると、体積 $0.1 \times S [\text{m}^3]$ の水による浮力を受けることになる。

人に働く重力と発泡スチロールに働く重力の合計が浮力とつり合っているのだから

$$70 \times g + 0.1 \times S \times 3 \times g = 0.1 \times S \times 10^3 \times g$$

が成立して $S = 0.7 [\text{m}^2]$

7. 血圧 (水銀圧) と水圧が等しくなればよいので

$$\rho_{\text{Hg}} \times 15 \times 10^{-3} = \rho_{\text{H}_2\text{O}} \times h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\rho_{\text{Hg}}}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}} \times 15 \times 10^{-3} = 0.2 [\text{m}]$$

P82 8. (1) 面積 S の部分を速さ v で流体が移動している場合、単位時間あたりの流量 $[\text{m}^3/\text{s}]$ は $S \times v$ である。

針の部分とシリンダーの部分の流量は同じであるから

$$3 \times \left(\frac{0.01 \times 10^{-2}}{2} \right)^2 \times \pi = v \times \left(\frac{1 \times 10^{-2}}{2} \right)^2 \times \pi \quad \Rightarrow \quad v = 3 \times 10^{-4} [\text{m/s}]$$

(2) 大気圧を P_0 , シリンダー内の圧力を P とすると、ベルヌーイの定理より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho_{\text{H}_2\text{O}} \times 3^2 + P_0 &= \frac{1}{2} \rho_{\text{H}_2\text{O}} \times (3 \times 10^{-4})^2 + P \\ \Rightarrow P &= P_0 + \frac{1}{2} \rho_{\text{H}_2\text{O}} \times (3^2 - (3 \times 10^{-4})^2) = P_0 + 4.499 \times 10^3 [\text{Pa}] \end{aligned}$$

(3) ピストンは常に大気圧で押されているので、余分に加える力は $4.499 \times 10^3 [\text{Pa}]$ の圧力に相当するものでよい。

$$F = 4.499 \times 10^3 \times \pi \times \left(\frac{1 \times 10^{-2}}{2} \right)^2 = 0.353 [\text{N}] \quad \Rightarrow \quad m = \frac{F}{g} = 0.036 [\text{kg}] = 36 [\text{g}]$$

9. (1) 水中の氷の高さを h [m] とすると、浮力は (空気による浮力は極めて小さい)

$$(0.02)^2 \times h \times \rho_{\text{water}} \times g$$

で、これが氷に働く重力

$$(0.02)^3 \times \rho_{\text{ice}} \times g$$

とつり合っている。したがって

$$h = \frac{\rho_{\text{ice}}}{\rho_{\text{water}}} \times 0.02 = 0.01834 [\text{m}] = 1.834 [\text{cm}]$$

(2) 浮力はアルコールによるものとの合計となる。水の中の氷の高さを h' とすると、浮力の合計は

$$(0.02)^2 \times h' \times \rho_{\text{water}} \times g + (0.02)^2 \times (0.02 - h') \times \rho_{\text{alcohol}} \times g$$

となる。したがって

$$(0.02)^2 \times h' \times \rho_{\text{water}} \times g + (0.02)^2 \times (0.02 - h') \times \rho_{\text{alcohol}} \times g = (0.02)^3 \times \rho_{\text{ice}} \times g$$

が成立するので、 $h' = 0.0114 [\text{m}]$ となり、アルコールの厚さは

$$0.02 - h' = 0.0086 [\text{m}] = 8.6 [\text{mm}]$$

P83 1. はじめ B が持っていた電荷を x [C] とすると、こすり合わせる前の A と B の電荷総量は $+5 \times 10^{-10} + x$ で、この電荷総量は、こすり合わせた後の電荷総量と同じなので

$$+5 \times 10^{-10} + x = +1.5 \times 10^{-10} - 4.3 \times 10^{-10}$$

が成立する。したがって、 $x = -7.8 \times 10^{-10}$ [C]

2. 摩擦前の A と B の電荷総量はゼロなので、摩擦後 B は -4.0×10^{-9} C の電荷を持つことになる。電子は負の電荷を持っているので、B の電子が増加したことになる。電子は 1 つで -1.6×10^{-19} C の電荷を持っているので

$$\frac{-4.0 \times 10^{-9}}{-1.6 \times 10^{-19}} = 2.5 \times 10^{10}$$

となり、電子は A から B へ 2.5×10^{10} 個移動したことになる。

3. 銀の質量数は 107.87 なので、10 グラムの銀は $\frac{10}{107.87} = 0.093$ [mol] となる。1 モルはアボガドロ数の原子を含むので、10 グラムの銀には $0.093 \times 6.02 \times 10^{23} = 5.6 \times 10^{22}$ 個の原子が存在する。銀の元素番号は 47 であるから、銀原子は 1 つにつき 47 個の電子を持っている。したがって、10 グラムの銀には $5.6 \times 10^{22} \times 47 = 2.6 \times 10^{24}$ 個の電子が含まれている。また、 -1 mC の電荷に関する電子の個数は

$$\frac{10^{-3}}{1.6 \times 10^{-19}} = 6.3 \times 10^{15}$$

なので、

$$\frac{6.3 \times 10^{15}}{2.6 \times 10^{24}} \times 100 = 2.4 \times 10^{-7} [\%]$$

P85 1. 体内の物質がすべて水であると考えてみる。体重が 70 kg であるとする

$$\frac{70 \times 10^3}{18} = 3.9 \times 10^3 \text{ [mol]}$$

の水分子が体内にある。水分子 1 つについて 10 個の電子を持っているので、体内の水分子が持つ電子の 1% は

$$3.9 \times 10^3 \times 10 \times 6.02 \times 10^{23} \times 0.01 = 2.3 \times 10^{26} \text{ [個]}$$

となる。この余分な電子の電荷量は

$$1.6 \times 10^{-19} \times 2.3 \times 10^{26} = 3.68 \times 10^7 \text{ [C]}$$

である。この大きさの 2 組の電荷が腕の距離 (50cm) に離れているとき、電荷に働く力の大きさは

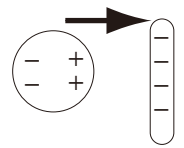
$$9 \times 10^9 \times \frac{(3.68 \times 10^7)^2}{(0.5)^2} = 4.88 \times 10^{25} \text{ [N]}$$

となる。一方、地球の質量は 6×10^{24} kg なので、これだけの質量の物体が地表にあれば、物体に働く力の大きさは

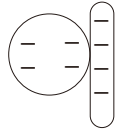
$$6 \times 10^{24} \times 9.8 = 5.9 \times 10^{25} \text{ [N]}$$

となる。

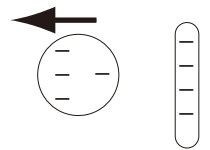
P85 2. [最初] たとえば、ゴムが負の電荷を持っているとする。(ゴムが正の電荷を持つ場合は、以下の議論の正負を逆にすればよい) 金属球内の電子(負の電荷)はゴムに帯電している負の電荷からの斥力を受ける。電子は金属中を自由に移動することができるので、ゴムから遠い所へ押しやられることになる。一方、金属中の正の電荷は動くことができないため、金属球のゴムに近い部分は正の電荷、遠い部分は負の電荷を帯びることになる。金属球内の正と負の電荷の大きさは同じであるが、正の電荷はゴムに近く、負の電荷はゴムから遠い。そのため、正の電荷がゴムの電荷から受ける引力が、負の電荷がゴムの電荷から受ける斥力を上回ることになる。したがって、金属球はゴムに引き寄せられる。



[接触] 電子同士には斥力が働くので、電子が自由に動けるかぎりにおいては、できるだけ広い範囲に広がって分布する。金属球とゴムが接触すると、電子が存在できる領域が金属球へと広がることになる。さらに、ゴムに近い金属球の部分は正の電荷を持っているので、ゴム内の電子を引きつけることになる。この結果、ゴムの余剰電荷が金属球へと移動する。



[反発] ゴムの余剰電子が金属球に移動したため、金属球とゴムともに負の電荷を持つことになり、両者間には斥力が働く。



3. 電気力の大きさ $F_{\text{電}} = 9 \times 10^9 \times \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{(5.3 \times 10^{-11})^2} = 8.2 \times 10^{-8} \text{ [N]}$

重力の大きさ $F_{\text{重}} = 6.7 \times 10^{-11} \times \frac{9.1 \times 10^{-31} \times 1.6 \times 10^{-27}}{(5.3 \times 10^{-11})^2} = 3.5 \times 10^{-47} \text{ [N]}$

$$\Rightarrow \frac{F_{\text{電}}}{F_{\text{重}}} = \frac{9 \times 10^9 \times (1.6 \times 10^{-19})^2}{6.7 \times 10^{-11} \times 9.1 \times 10^{-31} \times 1.6 \times 10^{-27}} = 2.4 \times 10^{39} \quad (\text{圧倒的に電気値力が大きい})$$

4. 右図のように座標を設定し、電荷に 1,2,3 の番号を付ける。

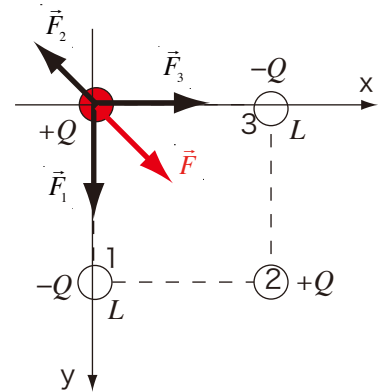
左上の電荷と 1,2,3 の電荷の間には、それぞれ、引力、斥力、引力が働く。左上の電荷が 1,2,3 の電荷から受ける力を成分で表すと

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{L^2} (0, +1), \quad \vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{2L^2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad \vec{F}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{L^2} (1, 0)$$

となる。したがって、これら 3 つの力の合力は

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{L^2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} + 1, -\frac{\sqrt{2}}{4} + 1 \right)$$

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{L^2} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right)$$



5. q_3 の位置を x ($0 < x < 2$) とすると、 q_3 に働く力 F は

$$F = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{(2-x)^2} - \frac{q_2}{x^2} \right) \quad (1)$$

と表すことができる。 $q_1 = +24\mu\text{C}$, $q_2 = +6\mu\text{C}$ を代入して $F = 0$ となるための条件を考えると

$$\frac{24}{(2-x)^2} - \frac{6}{x^2} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow (3x-2)(x+2) = 0$$

となる。したがって、 $x = \frac{2}{3}$, -2 となるが、 $x = -2$ の場合は式 (1) が成り立たないので不適切である。

P85 6.(1) 右図のように、電荷に番号を付けておく。

電荷 2, 3, 6 と点 A の距離は s

電荷 1, 5, 7 と点 A の距離は $\sqrt{2} \times s$

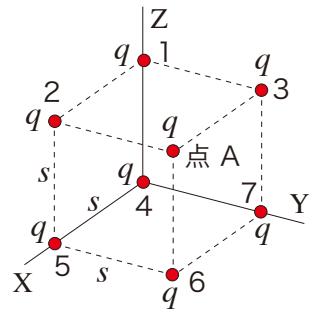
電荷 4 と点 A の距離は $\sqrt{3} \times s$

である。また、電荷はすべて同符号なので、各電荷間に働く電気力は斥力である。

点 A に置かれた電荷が電荷 1~7 から受ける力を成分で表すと

$$\vec{F}_2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 s^2} (0, 1, 0), \quad \vec{F}_3 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 s^2} (1, 0, 0), \quad \vec{F}_6 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 s^2} (0, 0, 1),$$

$$\vec{F}_1 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 2s^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \quad \vec{F}_5 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 2s^2} \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad \vec{F}_7 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 2s^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad \vec{F}_4 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 3s^2} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$



(2) 合力は

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_7 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 s^2} \times \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{9} \right) \times (1, 1, 1) \quad (\text{立方体の対角線の方})$$

$$|\vec{F}| = 3.29 \times \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 s^2}$$

7. 右図のように、左の棒に幅 dt の微小部分を座標 t の

位置に考え、左の棒に幅 ds の微小部分を座標 s の

位置に考える。それぞれの微小部分の位置は

$$-a \leq t \leq a, \quad b-a \leq s \leq b+a$$

の範囲である。また、2つの棒の長さは $2a$ で、

電荷は Q なので、単位長さあたりの電荷密度は

$$\rho = \frac{Q}{2a} \quad [\text{C/m}]$$

となる。

左の棒の微小部分の電荷が、右の棒の微小部分の電荷から受ける力の大きさは、両者間の距離が $s-t$ であるから

$$dF = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\rho \times dt) \times (\rho \times ds)}{(s-t)^2}$$

と表すことができる (クーロンの法則)。したがって、棒全体に働く力は t と s について積分すればよい。

$$\begin{aligned} F &= \frac{\rho^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{b-a}^{b+a} \int_{-a}^a \frac{1}{(s-t)^2} dt ds = \frac{\rho^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{b-a}^{b+a} \left[-\frac{1}{t-s} \right]_{-a}^a ds = \frac{\rho^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{b-a}^{b+a} \left[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right] ds \\ &= \frac{\rho^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\log_e |s-a| - \log_e |s+a| \right]_{b-a}^{b+a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{2a} \right)^2 \log_e \frac{b^2}{(b+2a)(b-2a)} \end{aligned}$$

8. まず、半円上の全電荷量を求める。右図のように、微小部分 (長さ $R \times \Delta\theta$)

を考えると、その部分の電荷量は

$$\lambda(\theta) \times R \times \Delta\theta = \lambda_0 R \cos\theta \times \Delta\theta$$

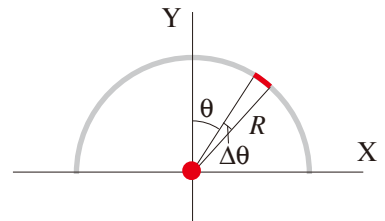
となる。したがって、半円全体の電荷量は

$$Q = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \lambda_0 R \cos\theta d\theta = \lambda_0 R [\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\lambda_0 R$$

となり、 $Q = 12\mu\text{C}$, $R = 0.6 \text{ m}$ なので

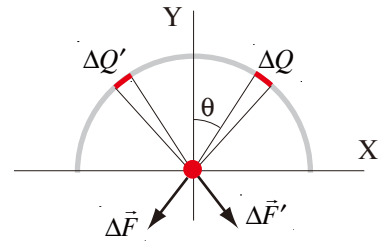
$$\lambda_0 = \frac{Q}{2R} = \frac{12 \times 10^{-6}}{2 \times 0.6} = 1 \times 10^{-5} \quad [\text{C/m}]$$

であることが分かる。



P85 8. つづき

右図のように、微小部分の電荷 ΔQ と、Y 軸について対称な位置の電荷 $\Delta Q'$ を考える。原点の電荷は、それぞれの微小電荷から $\Delta \vec{F}$ と $\Delta \vec{F}'$ の力を受ける。この両者を合計すると Y 軸の負の向きの成分だけとなる。半円上には、このような電荷の対が必ずあるので、原点の電荷が半円の電荷から受ける力の合計は Y 成分のみを持つことが分かる。



微小電荷 ΔQ から原点の電荷 q が受ける力は

$$\Delta \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta Q \times q}{R^2} (-\sin\theta, -\cos\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0 q}{R} (-\sin\theta \cos\theta \times \Delta\theta, -\cos^2\theta \times \Delta\theta)$$

であるから、Y 成分のみを積分で合計すると

$$\begin{aligned} F_y &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0 q}{R} (-\cos^2\theta) d\theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0 q}{R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0 q}{R} \times \frac{\pi}{2} \\ &= -9 \times 10^9 \times \frac{1 \times 10^{-5} \times 3 \times 10^{-6}}{0.6} \times \frac{\pi}{2} = -0.71 \text{ [N]} \end{aligned}$$

となり、合力は $\vec{F} = (0, -0.71 \text{ [N]})$

P90 1. 陽子：電場は上向き

$$E = \frac{mg}{e} = \frac{1.7 \times 10^{-27} \times 9.8}{1.6 \times 10^{-19}} = 1.0 \times 10^{-7} \text{ [N/C]}$$

電子：電場は下向き

$$E = \frac{mg}{e} = \frac{9.1 \times 10^{-31} \times 9.8}{1.6 \times 10^{-19}} = 5.6 \times 10^{-11} \text{ [N/C]}$$

2. 左向きを正として

$$E = 9 \times 10^9 \times \left[\frac{4.7 \times 10^{-6}}{(1.5)^2} + \frac{9.0 \times 10^{-6}}{(1.5)^2} \right] = 5.5 \times 10^4 \text{ [N/C]}$$

3. □ $-4.7 \mu\text{C}$ の電荷と $+9.0 \mu\text{C}$ の電荷の間の位置では電場は

つねに左向きとなるので、電場がゼロとなることはない。

□ $+9.0 \mu\text{C}$ の電荷の右側の位置においては、 $+9.0 \mu\text{C}$ の電荷が作る

電場が右向き、 $-4.7 \mu\text{C}$ の電荷が作る電場が左向きとなっているが、

つねに $+9.0 \mu\text{C}$ の電荷が作る電場の方が大きいので、電場の合計がゼロとなることはない。

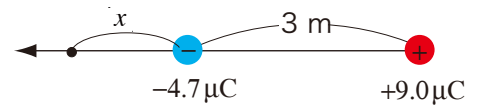
□ $-4.7 \mu\text{C}$ の電荷から左へ x の位置での電場は、左向きを正として、

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{9 \times 10^{-6}}{(3+x)^2} - \frac{4.7 \times 10^{-6}}{x^2} \right]$$

となる。したがって、電場がゼロとなるためには

$$9 \times x^2 = 4.7 \times (x+3)^2 \Rightarrow 3x \pm \sqrt{4.7} \times (x+3)$$

であればよい。 $\sqrt{4.7} = 2.17$ を用いて、 $x = 7.8$ を得る。 ($x = -1.3$ は不適当)



4. $+q$ あるいは $-q$ の電荷が作る電場の大きさは $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{y^2 + a^2}$ である。 2つの電場を合計

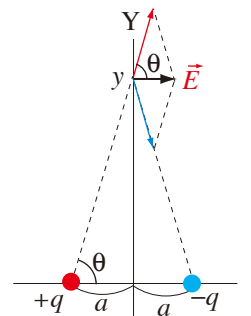
すると、y 軸と垂直な方向となり、その大きさは $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{y^2 + a^2} \times \cos\theta \times 2$ となる。

また、 $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{y^2 + a^2}}$ なので、 $E = \frac{qa}{2\pi\epsilon_0} [y^2 + a^2]^{-3/2}$ と書ける。 $y \gg a$ の場合、

近似式 $(1+\delta)^\alpha \approx 1 + \alpha \times \delta$ ($\delta \ll 1$) を用いると

$$E = \frac{qa}{2\pi\epsilon_0} [y^2 + a^2]^{-3/2} = \frac{qa}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{y^3} \left[1 + \left(\frac{a}{y} \right)^2 \right]^{-3/2} \approx \frac{qa}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{y^3} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{a}{y} \right)^2 \right)$$

となり、最初の項 (最も大きな項) は $\frac{1}{y^3}$ に比例している。



P90 5. a) 陽子は $e = +1.6 \times 10^{-19}$ [C] の電荷を持ち、質量が $m = 1.7 \times 10^{-27}$ [kg] の粒子である。それを $E = 640$ [N/C] の電場のなかに置くと、電場の向きに大きさ $F = eE$ の力が働く。したがって、運動方程式 $F = ma$ から加速度は

$$a = \frac{F}{m} = \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 640}{1.7 \times 10^{-27}} = 6.0 \times 10^{10} \text{ [m/s}^2\text{]}$$

b) 最初静止していた陽子が加速度 a で加速され、時間 t [s] 経過すると、陽子の速さは $v = at$ となる。したがって

$$t = \frac{v}{a} = \frac{1.2 \times 10^6}{6.0 \times 10^{10}} = 2.0 \times 10^{-5} \text{ [s]}$$

c) 最初静止していた陽子が加速度 a で加速され、時間 t [s] 経過すると、陽子の移動距離は $x = \frac{1}{2} at^2$ となる。したがって

$$x = \frac{1}{2} \times 6.0 \times 10^{10} \times (2.0 \times 10^{-5})^2 = 12 \text{ [m]}$$

d) 質量 m , 速さ v の物体が持つ運動エネルギーは $\frac{1}{2} mv^2$ なので、

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \times 1.7 \times 10^{-27} \times (1.2 \times 10^6)^2 = 1.2 \times 10^{-15} \text{ [J]}$$

あるいは、力 F を受けながら距離 x だけ物体が移動すると、物体は $F \times x$ だけの仕事をされ、この仕事が運動エネルギーとなるので

$$F \times x = eE \times x = 1.6 \times 10^{-19} \times 640 \times 12 = 1.2 \times 10^{-15} \text{ [J]}$$

6. 電子は減速されるので、電子に働く力は速度と逆向きである。また、電子は負の電荷を持つので電場の向きは力の向きと逆である。したがって、電場の向きは電子の速度の向きである。電子に働く力の大きさは $F = eE$ で、電子が距離 x だけ進んで停止したとすると、その間に電子が力からされた仕事は、力の向きと移動方向が逆向きなので、 $-F \times x$ となる。最初、電子が持っていた運動エネルギーは $\frac{1}{2} mv^2$ なので、エネルギー保存則によって

$$\frac{1}{2} mv^2 - F \times x = 0$$

が成立する。したがって

$$E = \frac{\frac{1}{2} mv^2}{ex} = \frac{1.6 \times 10^{-17}}{1.6 \times 10^{-19} \times 0.1} = 1000 \text{ [N/C]}$$

7. 電子には電場と逆向き（下向き）に大きさ eE の力が働く。電場の領域に入射した時刻を $t=0$ となると、 t 秒後の電子の位置は

$$x(t) = (v \cos \theta) \times t, \quad y(t) = (v \sin \theta) \times t - \frac{1}{2} \frac{eE}{m} t^2$$

となる。したがって、 $y=0$ となる時刻は

$$t = \frac{2mv \sin \theta}{eE}$$

である。よって、この時間に電子が移動した水平距離は

$$d = x(t) = \frac{2mv^2 \sin \theta \cos \theta}{eE} = \frac{mv^2}{eE} \sin 2\theta$$

となる。

a) $d=2$ mm となるような入射角度を求めればよいので

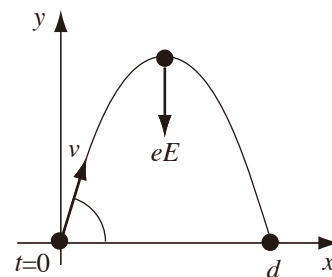
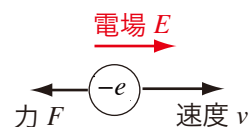
$$\sin 2\theta = \frac{eEd}{mv^2} = \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 0.4 \times 2 \times 10^{-3}}{9.1 \times 10^{-31} \times (2 \times 10^4)^2} = 0.3516$$

グラフから角度を読み取ると $\theta = 10^\circ, 80^\circ$

b)

$$t = \frac{2mv \sin \theta}{eE} = \frac{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 2 \times 10^4 \times \sin 10^\circ}{1.6 \times 10^{-19} \times 0.4} = 9.8 \times 10^{-8} \text{ [s]}$$

$$t = \frac{2mv \sin \theta}{eE} = \frac{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 2 \times 10^4 \times \sin 80^\circ}{1.6 \times 10^{-19} \times 0.4} = 5.6 \times 10^{-7} \text{ [s]}$$



P90 8. a) $\Delta E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q}{x^2 + a^2}$

b) $\Delta E_x = \Delta E \cos\theta = \Delta E \times \frac{x}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q \times x}{[x^2 + a^2]^{3/2}}$

d) 輪が作る電場の合計 = $\sum_{\text{輪}} \Delta E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{[x^2 + a^2]^{3/2}} \sum_{\text{輪}} \Delta q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{[x^2 + a^2]^{3/2}}$
輪の電荷総量

c) 図4の Δq と、中心に対して対称な位置にある微小電荷を考えると、 ΔE_x は同じで、 ΔE_{\perp} は反対方向を向くこの2つの電荷がつくる電場を合計すると、x方向の電場だけが残ることになる。

輪全体について同様な電荷の組をとることができるので、x方向の電場だけが残ることになる。

9. a) 幅 dr の輪の面積は $2\pi r \times dr$ なので、輪の部分が持つ電荷は $dq = \sigma \times 2\pi r \times dr$

8.c)の結果を用いて、 $Q = dq$ とすると $dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{[x^2 + r^2]^{3/2}} = \frac{2\pi\sigma r \times dr}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{[x^2 + r^2]^{3/2}}$

b) 円板全体が作る電場を求めるためには、a)の結果を r について積分すればよい。

$$E = \int_0^R \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{x}{[x^2 + r^2]^{3/2}} r dr \quad (r^2 = t \text{ とおくと } 2r \times dr = dt \text{ なので})$$

$$= \int_0^{R^2} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{x}{[x^2 + t]^{3/2}} \frac{dt}{2} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} x \left[\frac{1}{1-3/2} (t+x^2)^{-1/2} \right]_0^{R^2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right]$$

c) b)の結果を用いて $x=0$ とすると、円板表面では $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

b)の結果は $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \left(1 + \left(\frac{R}{x} \right)^2 \right)^{-1/2} \right]$ と書けるので、近似式 $(1+\delta)^\alpha \approx 1 + \alpha \times \delta$ ($\delta \ll 1$)を用いると、

$x \gg R$ の場合、

$$E \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{x} \right)^2 \right) \right] = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \left(\frac{R}{x} \right)^2 = \frac{\pi R^2 \sigma}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

であることが分かる。 $\pi R^2 \sigma$ は円板が持つ全電荷量なので、円板を点電荷と考えたときの電場と一致している。

P95 1. 右図のように、円板を垂直に貫通する円筒（円の部分の面積 S 、円板の裏表に同じ長さ）を考える。

図では円筒を強調して描いてあるが、円筒の長さは十分に短いものとする。

円板には一様な電荷が分布しており、その電荷が円板表面付近に作る電場は円板表面と垂直である。（円板に十分接近すれば、電荷は無限に広がっていると考えることができる。このような場合、電場は表面に対して垂直である。P89参照）

円筒表面を閉曲面としてガウスの法則を適用すると、閉曲面内に含まれる電荷は $\sigma \times S$ なので、

$$\iint_{\text{閉曲面}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

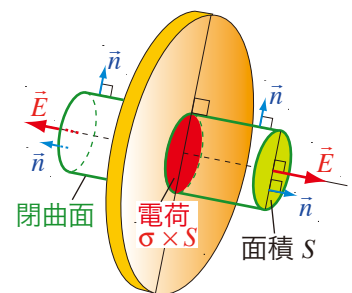
となる。円筒表面についての面積分は、2つの円の部分と側面に分けて計算することができる。

$$\iint_{\text{閉曲面}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\text{上円}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\text{側面}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\text{下円}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$

2つの円の部分については、電場と法線ベクトルが同じ向きなので $\vec{E} \cdot \vec{n} = E$ となる。側面については電場と法線ベクトルは垂直なので $\vec{E} \cdot \vec{n} = 0$ となる。したがって

$$\iint_{\text{閉曲面}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = 2E \times S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad E = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

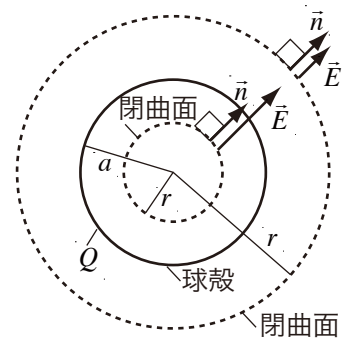
この結果はP90 9.c)の $x=0$ の場合について求めた電場と一致している。



P95 2. 電荷は球殻の部分に一樣に分布しているのも、もし電場ができるなら

球の中心から放射状でなければならない。そうでなければ、球の位置を回転させれば、電場が異なってしまうことになるが、電荷は一樣なので、球を回転させても電場は同じ結果でなければならない。

ガウスの法則の閉曲面を、右図の点線のように中心が球殻と同じである球面とする。このとき、球面上の電場の向きは、球殻の電荷が正（負）であれば、外向き（内向き）となる。また、法線ベクトルは常に外向きである。球殻の外の電場を求める場合、閉曲面内部に球殻の電荷がすべて含まれるので、



$$r > a \text{ の場合} \quad \iint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \iint E dS = E \iint dS = E \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

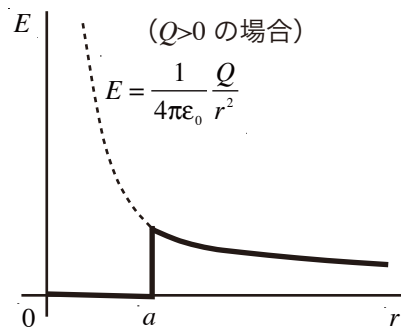
電場は

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

となり、点電荷の場合と同じであることが分かる。球殻の内の電場を求める場合、閉曲面内部の電荷はゼロなので、

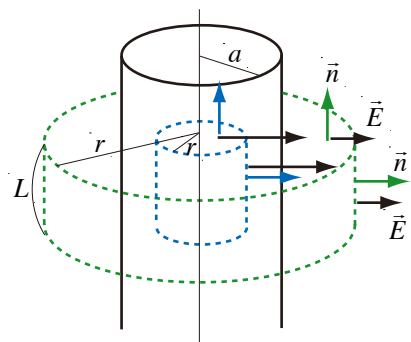
$$r < a \text{ の場合} \quad \iint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \iint E dS = E \iint dS = E \times 4\pi r^2 = 0$$

で、電場もゼロとなる。



3. 電荷は円筒の側面に一樣に分布して、円筒が十分に長ければ（端を考えなければ）、電場は円筒の側面に垂直な方向に放射状のものとなる。

ガウスの法則の閉曲面を、右図の点線のように電荷が分布している円筒と中心軸を同じとする円筒表面（高さ L）とする。円筒の外の電場を求める場合、閉曲面内部に含まれる電荷は $\lambda \times L$ なので、



$$r > a \text{ の場合} \quad \iint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

となる。円筒表面についての面積分は、上と下の円板についての積分と側面についての積分の2つ部分に分けて計算すればよい。すなわち、

$$\iint_{\text{top}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\text{bottom}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\text{side}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

と分解できる。ここで、上下の円板の面に関しては、法線ベクトルと電場が互いに直交しており $\vec{E} \cdot \vec{n} = 0$ である。したがって、この2つの部分の面積分はゼロとなる。側面については、法線ベクトルと電場が同じ方向となっており、

$$\iint_{\text{side}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \iint E dS = E \iint dS = E \times 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

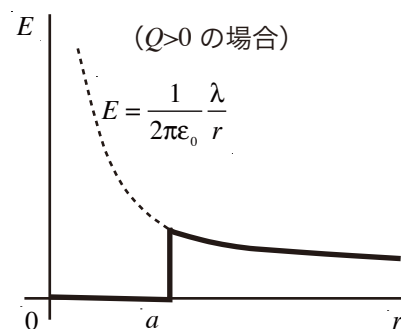
となることが分かる。したがって、円筒の外の電場は

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

となる。球殻の内の電場を求める場合、閉曲面内部の電荷はゼロなので、

$$r < a \text{ の場合} \quad \iint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = 0$$

となり、同様の議論によって、円筒内部の電場はゼロとなることが分かる。



P95 4. 球外部の電場については、問2とまったく同じ議論が成り立つ。

したがって、

$$r > a \text{ の場合} \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

である。球内部については、問2では球殻の部分にだけ電荷が分布していたのに対して、ここでは、球の内部にも一様に電荷が分布している。したがって、球内部の閉曲面についてのガウスの法則において、閉曲面内に含まれる電荷はゼロではない。半径 a の球全体に電荷 Q が一様に分布しているので、半径 r の球（閉曲面）内部に含まれる電荷は

$$\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \times \frac{3}{4}\pi r^3$$

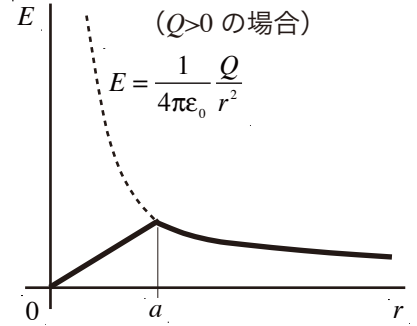
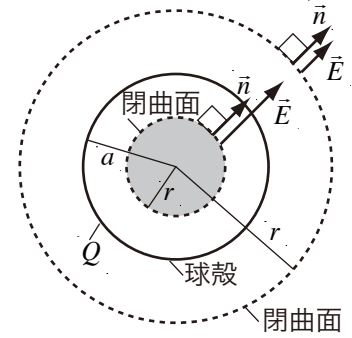
となる。したがって、ガウスの法則は

$$r < a \text{ の場合} \quad \iint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \iint E dS = E \iint dS = E \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{a}\right)^3$$

と書ける。このことから、球内部の電場は

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^3}$$

であることが分かる。



5. 円筒外部の電場については、問3とまったく同じ議論が成り立つ。

したがって、

$$r > a \text{ の場合} \quad E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

である。円筒内部については、問3では円筒表面にだけ電荷が分布していたのに対して、ここでは、円筒の内部にも一様に電荷が分布している。したがって、円筒内部の閉曲面についてのガウスの法則において、閉曲面内に含まれる電荷はゼロではない。円筒全体に電荷が一様に分布しているので、半径 r の円筒（閉曲面）内部に含まれる電荷は

$$\frac{\lambda L}{\pi a^2 L} \times \pi r^2 L$$

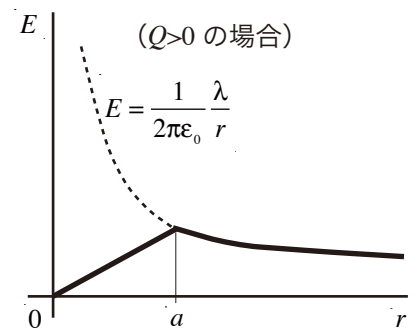
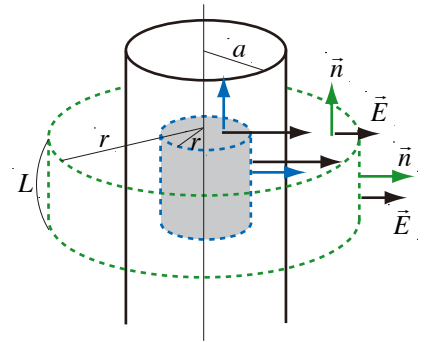
となる。したがって、ガウスの法則は

$$r < a \text{ の場合} \quad \iint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E \times 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{a}\right)^2$$

と書ける。このことから、円筒内部の電場は

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^2}$$

であることが分かる。



P95 6. 電気力においてガウスの法則が成り立つ理由は、力の大きさが $\frac{1}{r^2}$ となっているからである。つまり、逆2乗法則にしたがう力が働く場合は電気力のガウスの法則と同様な関係が成り立つことになる。重力と電気力には、それぞれ

$$\text{重力: } F = G \frac{mM}{r^2} \qquad \text{電気力: } F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2}$$

という逆2乗法則がある。したがって、

$$G \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad Q \rightarrow M, \quad q \rightarrow m$$

などの対応関係があるとして、電気力についてのガウスの法則を書き直すと、重力についてのガウスの法則を得ることができる。また、電場 E は1クーロンの電荷に働く力で、重力加速度 g は1kgの質量に働く力なので

$$E \rightarrow g$$

の対応があると考えることができる。したがって、問4の $r > a$ の場合と同様な考察を行えば

$$g \times 4\pi r^2 = M \times 4\pi G$$

より、 $g = G \frac{M}{r^2}$ となる。

7. a) ガウスの法則から (問4参照)、球内での電場の大きさは

$$E(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3}$$

となる。分布している電荷は正なので、電場は外向きである。したがって、電子に働く力は、原子の中心から離れる向きを正の向きとして

$$F(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3}$$

となり、電子が中心からずれると元へ戻そうとする向きの力が働くことが分かる。

b) a) の結果から、バネ定数 k のバネが x だけ伸びたときの力 $F = -k \times x$ と比較すると

$$k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^3}$$

c) 電子の運動方程式 (半径方向) は

$$ma = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^3} \times r$$

と書くことができる。この運動方程式は電子が単振動をすることを表している。P33-35を参考にすると

$$\text{振動数 } f = \frac{1}{\text{周期}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m R^3}}$$

となる。

d) c) の結果から

$$R = \left[\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m (2\pi f)^2} \right]^{1/3} = \left[\frac{9 \times 10^9 \times (1.6 \times 10^{-19})^2}{9.1 \times 10^{-31} \times (2\pi \times 2.47 \times 10^{15})^2} \right]^{1/3} = [1.05 \times 10^{-30}]^{1/3} \\ \approx 1 \times 10^{-10} [\text{m}] = 1 [\text{\AA}]$$

これは、実際の水素原子の大きさとほぼ一致している。

$$\iint_{\text{立方体}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS + \dots + \iint_{S_6} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS$$

のように6つの部分に分けて考えることができる。

ところで、 S_1 と S_2 についての計算結果は、 S_3 と S_4 の結果、 S_5 と S_6 の結果に等しいはずなので

$$\iint_{\text{立方体}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS = 3 \left[\iint_{S_1} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS \right]$$

のようにまとめることができる。原点に $+Q$ の電荷が置かれているとき、電場ベクトルは

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{ただし} \quad \vec{r} = (x, y, z), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

と表すことができる。ここで、 $\frac{\vec{r}}{r}$ は電場の向きを表す単位ベクトルである。電荷は原点だけに置かれているので、電場は原点から放射状に広がる向きとなっている。また、 S_1 と S_2 の面について、法線ベクトル \vec{n} と位置ベクトル \vec{r} は

$$S_1: \begin{cases} \vec{n} = (0, 0, 1) \\ \vec{r} = (x, y, a) \end{cases} \quad S_2: \begin{cases} \vec{n} = (0, 0, -1) \\ \vec{r} = (x, y, -a) \end{cases}$$

である。したがって、立方体表面についての面積分は

$$\iint_{\text{立方体}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS = 3 \left[\iint_{S_1} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \vec{r} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \vec{r} \cdot \vec{n} dS \right]$$

となる。ここで、位置ベクトルと法線ベクトルの内積は、面 S_1, S_2 ともに $\vec{r} \cdot \vec{n} = a$ である。さらに、積分範囲も面 S_1, S_2 ともに $x-y$ 平面と平行な正方形で、 $-a \leq x \leq a, -a \leq y \leq a$ である。したがって、立方体表面についての面積分はさらにまとめることができ

$$\iint_{\text{立方体}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS = 6 \times \frac{Qa}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_1} \frac{1}{r^3} dS$$

となる。直交座標系を用いて計算を行うので、微小面積は $dS = dx \times dy$ である。したがって、具体的な計算は

$$\iint_{\text{立方体}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS = \frac{3Qa}{2\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{1}{[x^2 + y^2 + a^2]^{3/2}} dx dy$$

を実行すればよいことになる。 x についての積分は

$$\int_{-a}^a \frac{1}{[x^2 + y^2 + a^2]^{3/2}} dx \underset{c^2 = y^2 + a^2 \text{ において}}{=} \int_{-a}^a \frac{1}{[x^2 + c^2]^{3/2}} dx \underset{x = c \tan \theta \text{ において}}{=} \int_{-\tan^{-1} \frac{a}{c}}^{\tan^{-1} \frac{a}{c}} \frac{1}{[c^2 \tan^2 \theta + c^2]^{3/2}} \frac{c}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{c^2} \int_{-\tan^{-1} \frac{a}{c}}^{\tan^{-1} \frac{a}{c}} \cos \theta d\theta = \frac{1}{c^2} [\sin \theta]_{-\tan^{-1} \frac{a}{c}}^{\tan^{-1} \frac{a}{c}} = \frac{2}{c^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{2}{y^2 + a^2} \frac{a}{\sqrt{y^2 + 2a^2}}$$

となる。よって、

$$\iint_{\text{立方体}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS = \frac{3Qa^2}{\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{1}{y^2 + a^2} \frac{1}{\sqrt{y^2 + 2a^2}} dy$$

と書ける。さらに、 y についての積分は

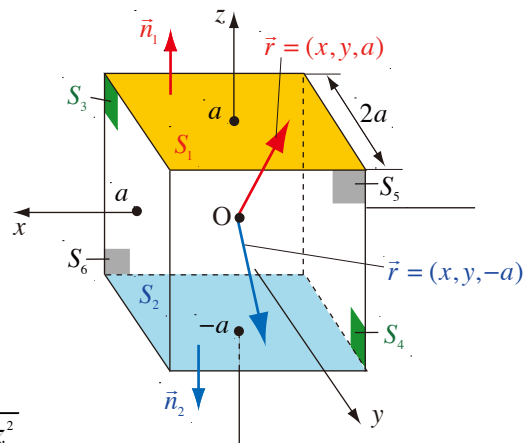
$$\int_{-a}^a \frac{1}{y^2 + a^2} \frac{1}{\sqrt{y^2 + 2a^2}} dy \underset{y = a \tan \theta \text{ において}}{=} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{a^2 \tan^2 \theta + 1} \frac{1}{\sqrt{a^2 \tan^2 \theta + 2a^2}} \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{1}{a^2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \theta + 2}} d\theta = \frac{1}{a^2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos \theta}{\sqrt{2 - \sin^2 \theta}} d\theta$$

$$\underset{\sin \theta = \sqrt{2} \sin \phi \text{ において}}{=} \frac{1}{a^2} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{\cos \theta}{\sqrt{2 - 2 \sin^2 \phi}} \frac{\sqrt{2} \cos \phi}{\cos \theta} d\phi = \frac{1}{a^2} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} d\phi = \frac{1}{a^2} \frac{\pi}{3}$$

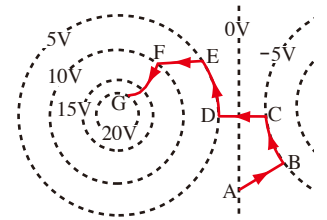
となる。この結果から、立方体表面についての面積分は

$$\iint_{\text{立方体}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS = \frac{3Qa^2}{\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{a^2} \frac{\pi}{3} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

となることが分かる。これは、ガウスの法則と一致する結果である。



P99 1. $3.2 \times 10^{-19} [\text{C}] \times 50 [\text{V}] = 1.6 \times 10^{-17} [\text{J}]$



2. (1) 正の電荷が低い電位の場所から高い電位の場所へ移動する場合, 正の電荷は位置エネルギーの小さい所から大きいところへ移動しているのので, 外部からエネルギー (仕事) を与える必要がある。

C→D および F→G で $2[C] \times 10[\text{V}] = 20[\text{J}]$

(2) 電位が同じ位置を移動するときは位置エネルギーの変化はない。

B→C および D→E

(3) 正の電荷が高い電位の場所から低い電位の場所へ移動する場合, 正の電荷は位置エネルギーの大きい所から小さいところへ移動しているのので, 電荷を運んでいる人は仕事をされる (仕事が負) ことになる。

A→B

3. (1) 正の電荷 $+q$ が電位の高い所から低い所へ移動すると位置エネルギーが減少し, そのエネルギーは電荷の運動エネルギーへと変換される。電位差を $V[\text{V}]$, 電荷の質量を $m[\text{kg}]$, 加速後の電荷の速さを $v[\text{m/s}]$ とすると, エネルギー保存則から

$$\frac{1}{2} mv^2 = q \times V$$

となる。したがって, 加速された陽子の速さは

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 120}{1.7 \times 10^{-27}}} = 1.5 \times 10^5 [\text{m/s}]$$

(2) 電子は負の電荷を持つので, 電位の低い所から高い所へ移動するときに加速される。

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 120}{9.1 \times 10^{-31}}} = 6.5 \times 10^6 [\text{m/s}]$$

P102 2. P90 問 9 の結果から, 円板の中心から距離 x の場所での電場は

$$E(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right]$$

である。したがって, $V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ を用いると, 距離 x の場所の電位と無限遠方の電位の差は

$$V(x) - V(\infty) = \int_x^\infty E(x) dx = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_x^\infty \left[1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right] dx = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[x - \sqrt{R^2 + x^2} \right]_x^\infty = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{R^2 + x^2} - x \right]$$

となる。無限遠方を電位の基準 $V(\infty) = 0$ とすると 補足) ∞ の極限

$$V(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{R^2 + x^2} - x \right]$$

と表すことができる。円板から十分に離れた場所の電位について考えてみると ($x \gg R$),

$$V(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x \left[\sqrt{1 + \left(\frac{R}{x}\right)^2} - 1 \right] \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{x}\right)^2 - 1 \right] = \frac{\pi R^2 \sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x}$$

のように近似することができる。ここで, 近似式 $(1 + \delta)^\alpha \approx 1 + \alpha \times \delta$ を用いた。円板全体の電荷は

$$Q = \pi R^2 \sigma$$

なので, この結果は

$$V(x) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x}$$

と表すことができる。これは, 点電荷 Q から距離 x 離れた場所での電位を表している。

補足) ∞ の極限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{R^2 + x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - (R^2 + x^2)}{x + \sqrt{R^2 + x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-R^2}{x + \sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{-R^2}{\infty} = 0$$

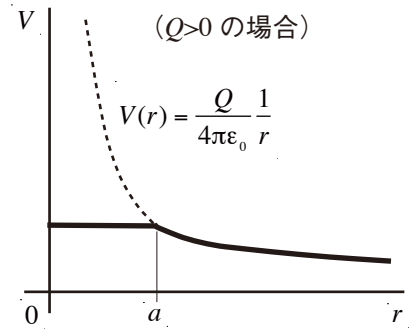
P102 3.2) P95の結果から, 電場は $r > a : E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, $r < a : E(r) = 0$ である。

これを用いると

$$V(r) - V(\infty) = \int_r^\infty E(x) dx = \begin{cases} r > a : & \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2} dx = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \\ r < a : & \int_a^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2} dx + \int_r^a 0 dx = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \end{cases}$$

となる。無限遠方を電位の基準 $V(\infty) = 0$ とすると

$$r > a : V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad r < a : V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$



3) P95の結果から, 電場は $r > a : E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$, $r < a : E(r) = 0$ である。

これを用いて

$$V(r) - V(\infty) = \int_r^\infty E(x) dx = \begin{cases} r > a : & \int_r^\infty \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} dx = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} [\log_e \infty - \log_e r] \\ r < a : & \int_a^\infty \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} dx + \int_r^a 0 dx = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} [\log_e \infty - \log_e a] \end{cases}$$

となる。無限遠方を電位の基準 $V(\infty) = 0$ とすると, すべての場所の電位は無限大の大きさとなる。

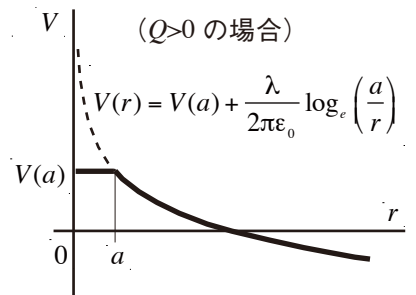
これでは実用に供せないので, 円筒表面での電位 $V(a)$ との差を調べると

$$V(r) - V(a) = \int_r^a E(x) dx = \begin{cases} r > a : & \int_r^a \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} dx = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} [\log_e a - \log_e r] \\ r < a : & \int_r^a 0 dx = 0 \end{cases}$$

となり,

$$r > a : V(r) = V(a) + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log_e \left(\frac{a}{r} \right), \quad r < a : V(r) = V(a)$$

であることが分かる。



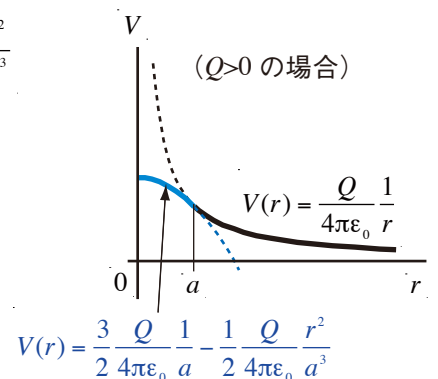
4) P95の結果から, 電場は $r > a : E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, $r < a : E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} r$ である。

これを用いると

$$V(r) - V(\infty) = \int_r^\infty E(x) dx = \begin{cases} r > a : & \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2} dx = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \\ r < a : & \int_a^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2} dx + \int_r^a \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} x dx = \frac{3}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} r^2 \end{cases}$$

となる。無限遠方を電位の基準 $V(\infty) = 0$ とすると

$$r > a : V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad r < a : V(r) = \frac{3}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} r^2$$



P102 3.

5) P95 の結果から, 電場は $r > a$: $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$, $r < a$: $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^2}$ である。

これを用いると

$$V(r) - V(\infty) = \int_r^\infty E(x) dx = \begin{cases} r > a : & \int_r^\infty \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} dx = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} [\log_e \infty - \log_e r] \\ r < a : & \int_a^\infty \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} dx + \int_r^a \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{x}{a^2} dx = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} [\log_e \infty - \log_e a] + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \end{cases}$$

となる。無限遠方を電位の基準 $V(\infty) = 0$ とすると, すべての場所の電位は無限大の大きさとなる。

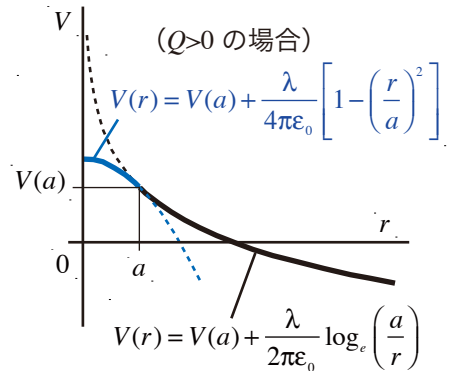
これでは実用に供せないので, 円筒表面での電位 $V(a)$ との差を調べると

$$V(r) - V(a) = \int_r^a E(x) dx = \begin{cases} r > a : & \int_r^a \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} dx = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} [\log_e a - \log_e r] \\ r < a : & \int_r^a \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{x}{a^2} dx = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \end{cases}$$

となり,

$$r > a : V(r) = V(a) + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log_e \left(\frac{a}{r} \right), \quad r < a : V(r) = V(a) + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]$$

であることが分かる。



4.1) 2) 電荷 $+Q$ が \vec{r} の位置に作る電場を $\vec{E}_+(\vec{r})$, 電荷 $-Q$ が \vec{r} の位置に作る電場を $\vec{E}_-(\vec{r})$ と書くと, 2つの電荷が \vec{r} の位置に作る電場は

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_+(\vec{r}) + \vec{E}_-(\vec{r})$$

である。点 P における電位は, 無限遠方を基準として

$$V_p = \int_p^\infty \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_p^\infty \vec{E}_+(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_p^\infty \vec{E}_-(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

によって求めることができる。積分 $\int_p^\infty \vec{E}_+(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ は電荷 $+Q$ だけによる電位を表している。具体的には

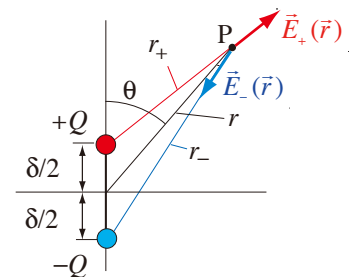
$$\int_p^\infty \vec{E}_+(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_+}$$

となる (P110-111 を参照のこと)。同様に, $\int_p^\infty \vec{E}_-(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ は電荷 $-Q$ だけによる電位で

$$\int_p^\infty \vec{E}_-(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_-}$$

である。したがって,

$$V_p = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$



3) 近似式 $(1 + \Delta)^\alpha \approx 1 + \alpha \times \Delta$ を用いて, δ^2 以上の項を無視すると

$$\frac{1}{r_+} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{\delta}{r} \cos\theta + \frac{1}{4} \left(\frac{\delta}{r} \right)^2 \right]^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\delta}{r} \cos\theta - \frac{1}{8} \left(\frac{\delta}{r} \right)^2 \right] \approx \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \frac{\delta}{r^2} \cos\theta$$

$$\frac{1}{r_-} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{\delta}{r} \cos\theta + \frac{1}{4} \left(\frac{\delta}{r} \right)^2 \right]^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{r} \cos\theta - \frac{1}{8} \left(\frac{\delta}{r} \right)^2 \right] \approx \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \frac{\delta}{r^2} \cos\theta$$

と近似することができる。この結果を用いると

$$V_p = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2} \frac{\delta}{r^2} \cos\theta - \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \frac{\delta}{r^2} \cos\theta \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta}{r^2} \cos\theta$$

P107 1. 1) 閉曲面 A によって切り取られる金属板の面積を S とすると,

$$\iint \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds = (E_1(\infty) + E_2(\infty)) \times S = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) \times S}{\epsilon_0}$$

$E_1(\infty) = E_2(\infty)$ なので

$$E_1(\infty) = E_2(\infty) = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0}$$

2) 閉曲面 B の面のうち金属板と平行な面の面積を S とすると

$$\iint \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds = E_1(\infty) \times S - E_1 \times S = 0$$

よって $E_1 = E_1(\infty)$ 。同様に閉曲面 C について考えると $E_2 = E_2(\infty)$

3) 金属内部の電場はゼロなので, 閉曲面 D について

$$\iint \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds = E_1 \times S = \frac{\sigma_1'' \times S}{\epsilon_0}$$

よって $E_1 = \frac{\sigma_1''}{\epsilon_0}$ 。同様に閉曲面 E について考えると $E_2 = \frac{\sigma_2''}{\epsilon_0}$ となる。

1) と 2) の結果から $E_1 = E_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0}$ であるから, $\sigma_1'' = \sigma_2'' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ であることが分かる。

4) 以上の結果から

$$\sigma_1' = \sigma_1 - \sigma_1'' = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad \sigma_2' = \sigma_2 - \sigma_2'' = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}$$

であることが分かる。また, 閉曲面 F については

$$\iint \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds = E_3 \times S = \frac{\sigma_1' \times S}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad E_3 = \frac{\sigma_1'}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0}$$

閉曲面 G については

$$\iint \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds = -E_3 \times S = \frac{\sigma_2' \times S}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad E_3 = \frac{\sigma_2'}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0}$$

2. P95 の問題 3, 5 と同様にして, 2つの円筒の間の電場の大きさは

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{Lr} \quad (b > r > a)$$

である。その他の領域では電場はゼロとなる。2つの円筒間の電位差は

$$V_a - V_b = V = \int_a^b \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{Lr} \, dr = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \log_e \left(\frac{b}{a} \right)$$

となる。コンデンサーの電気容量は $C = \frac{Q}{V}$ なので, $C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\log_e \left(\frac{b}{a} \right)}$

3. P93 の問題 2, 4 と同様にして, 2つの球の間の電場の大きさは

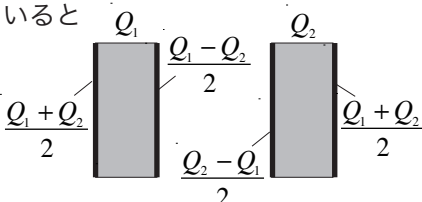
$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (b > r > a)$$

である。その他の領域では電場はゼロとなる。2つの球の間の電位差は

$$V_a - V_b = V = \int_a^b \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \, dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

となる。コンデンサーの電気容量は $C = \frac{Q}{V}$ なので, $C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$

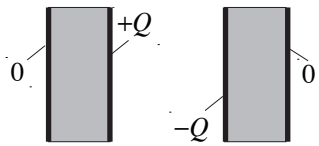
この問題の結果から, 2枚の金属板がそれぞれ Q_1 と Q_2 の電荷を持っていると



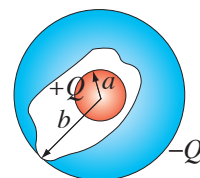
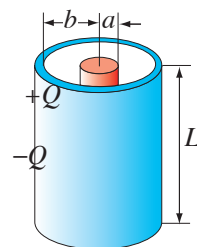
のように配置されることが分かる。コンデンサーのように,

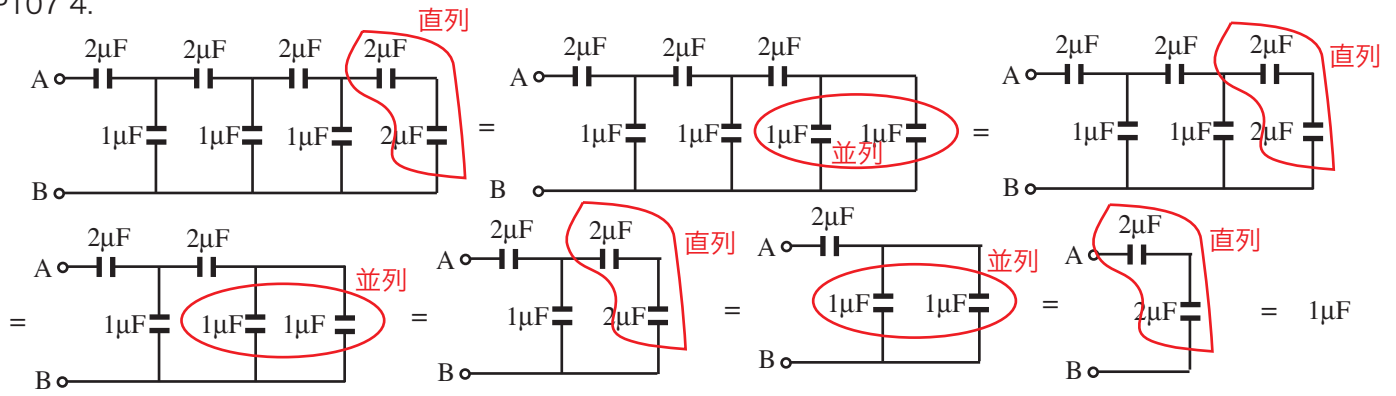
$$Q_1 = +Q, Q_2 = -Q$$

の場合,

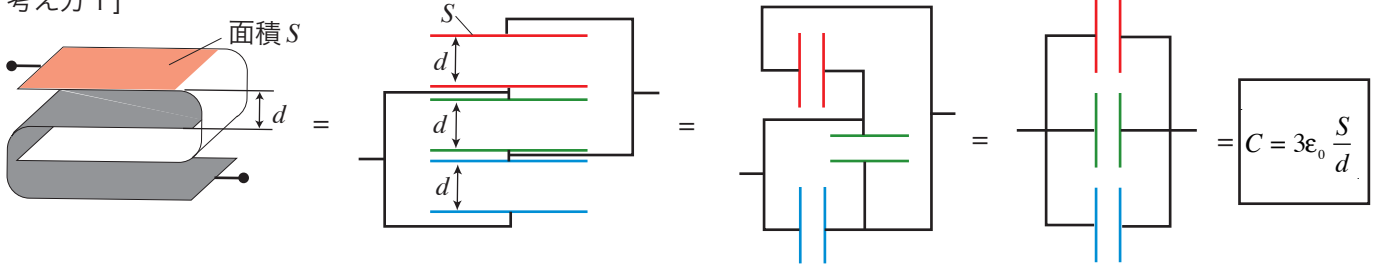


のように, 金属板が面している側に電荷が貼り付いて分布する。また, 電場は金属板の間だけゼロではない値となることも分かる。

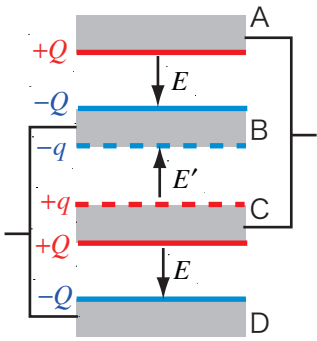




5. [考え方1]

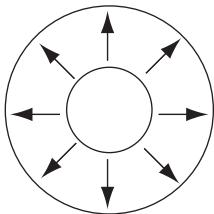


[考え方2] 問1を参考にして考える。問題のコンデンサーは下図のような金属板の集まりと考えることができる。



- 金属板 A の上面と D の下面には電荷はない。金属板 A の下面に電荷 $+Q$ があるとすると、対称性から D の上面の電荷は $-Q$ となる。
- 金属内には電場がないので、B の上面の電荷は $-Q$ 、C の下面の電荷は $+Q$ である。
- C の上面に電荷 $+q$ があるとすると、B の下面の電荷は $-q$ である。
- 対称性から、AB 間の電場の大きさと CD 間の電場の大きさは同じで、これを E とする。また、CB 間の電場の大きさを E' とする。
- ガウスの法則により $E \times S = Q/\epsilon_0$ 、 $E' \times S = q/\epsilon_0$ という関係が成立する。
- A と C は同じ電位、B と D は同じ電位である。AC と BD の電位差を V とすると、AB 間、BC 間、CD 間の電位差も V である。したがって、 $V = E \times d = E' \times d$ となる。
- したがって、 $Q = \epsilon_0 S E = \epsilon_0 \frac{S}{d} V$ 、 $q = \epsilon_0 S E' = \epsilon_0 \frac{S}{d} V$ となることが分かる。
- このコンデンサーにたまる電荷は $2Q + q$ なので、電気容量は $\frac{2Q + q}{V} = 3\epsilon_0 \frac{S}{d}$

6. (1)



$$E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2}$$

P95 問2,4
P107 問3 を参照

$$(2) V(x) - V(R) = \int_x^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2} dx = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{R} \right]$$

$$V(R) = 0 \text{ より } V(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{R} \right]$$

(3) 小さい球内部の電場はゼロなので、 $x < r$ の範囲の電位は一定である。 $V(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right]$

(4) $-Q$ 理由：ガウスの法則から、電場がゼロとなるには半径 x ($x > R$) の球内に含まれる電荷の総和はゼロでなければならない。小さい球には $+Q$ の電荷が生じているので、大きい球に $-Q$ の電荷が発生していればよい。

(5) $E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2}$

(6) $V(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x}$ ((2) の結果で $R \rightarrow \infty$ とすればよい)

(7) $\frac{V_{\max}}{E_{\max}} = \frac{4\pi\epsilon_0 r}{1} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = r$ より $r = \frac{9 \times 10^6}{3 \times 10^6} = 3 \text{ [m]}$ 電場が E_{\max} より小さくなればよいので $r > 3 \text{ [m]}$

P108 7. (1) $r < a$ $E(r) = 0$

$a < r < b$ $E(r) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0\ell} \frac{Q_1}{r}$ 外から中心への向き

$b < r < c$ $E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\ell} \frac{Q_2}{r}$ 中心から外への向き

$c < r$ $E(r) = 0$

(3) $V(a) - V(b) = \int_a^b -\frac{1}{2\pi\epsilon_0\ell} \frac{Q_1}{r} dr = -\frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0\ell} \log_e \frac{a}{b} < 0$

(4) $V(b) - V(c) = \int_b^c \frac{1}{2\pi\epsilon_0\ell} \frac{Q_2}{r} dr = \frac{Q_2}{2\pi\epsilon_0\ell} \log_e \frac{c}{b} > 0$

(5) 無限遠方の電位はゼロと定義され、 $r > c$ の領域では電場がゼロなので、 $r > c$ の領域の電位は無限遠方の電位と同じでゼロである。したがって

$$V(r) = 0$$

境界 $r = c$ はどちらの領域に含まれると考えてもよい。(電位は一通りに決まるはずだから) したがって

$$V(c) = 0$$

領域 $c > r > b$ についての電位は

$$V(r) - V(c) = \int_r^c \frac{1}{2\pi\epsilon_0\ell} \frac{Q_2}{r} dr = \frac{Q_2}{2\pi\epsilon_0\ell} \log_e \frac{c}{r}$$

を用いて求めることができ、 $V(c) = 0$ を用いると

$$V(r) = \frac{Q_2}{2\pi\epsilon_0\ell} \log_e \frac{c}{r}$$

を得る。したがって、境界 $r = b$ では

$$V(b) = \frac{Q_2}{2\pi\epsilon_0\ell} \log_e \frac{c}{b}$$

であることが分かる。領域 $b > r > a$ についての電位は

$$V(r) - V(b) = \int_r^b -\frac{1}{2\pi\epsilon_0\ell} \frac{Q_1}{r} dr = -\frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0\ell} \log_e \frac{b}{r}$$

を用いて求めることができ、

$$V(r) = V(b) - \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0\ell} \log_e \frac{b}{r}$$

となり、

$$V(a) = V(b) - \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0\ell} \log_e \frac{b}{a} = \frac{Q_2}{2\pi\epsilon_0\ell} \log_e \frac{c}{b} - \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0\ell} \log_e \frac{b}{a}$$

であることがわかる。最内筒(半径 a)と最外筒(半径 c)は導線で接続されているので、両者の電位は同じで

$$V(a) = \frac{Q_2}{2\pi\epsilon_0\ell} \log_e \frac{c}{b} - \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0\ell} \log_e \frac{b}{a} = V(c) = 0 \quad (1)$$

である。最内筒(半径 a)と中間筒(半径 b)の間には電圧 V の電池が接続されているので、

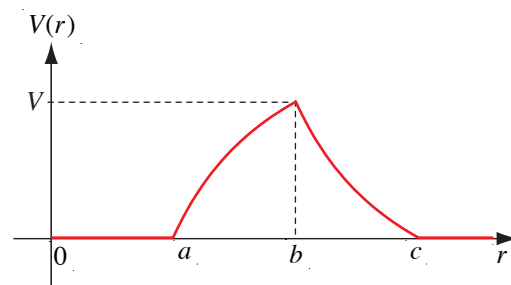
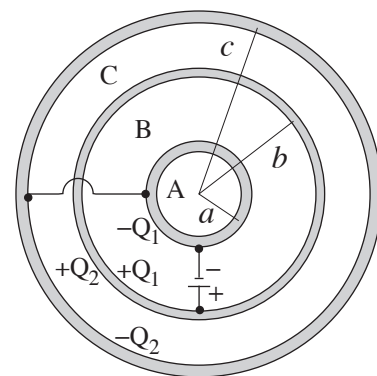
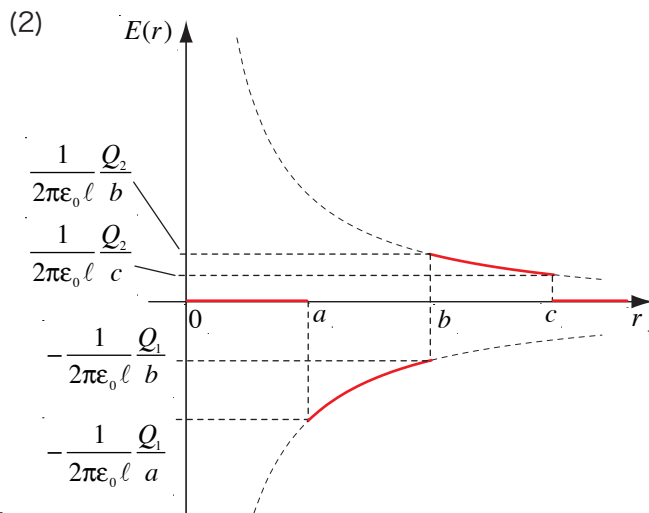
$$V = V(b) - V(a) = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0\ell} \log_e \frac{b}{a} \quad (2)$$

となる。式(1)と(2)から Q_1 と Q_2 を求めることができ

$$Q_1 = \frac{2\pi\epsilon_0\ell V}{\log_e \frac{b}{a}} \quad Q_2 = \frac{2\pi\epsilon_0\ell V}{\log_e \frac{c}{b}}$$

となるので、以上をまとめると

	$r < a$	$a < r < b$	$b < r < c$	$c < r$
$V(r)$	0	$V \frac{\log_e \frac{r}{a}}{\log_e \frac{b}{a}}$	$V \frac{\log_e \frac{c}{r}}{\log_e \frac{c}{b}}$	0



$$C = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = \frac{\frac{2\pi\epsilon_0\ell V}{\log_e \frac{b}{a}} + \frac{2\pi\epsilon_0\ell V}{\log_e \frac{c}{b}}}{V} = 2\pi\epsilon_0\ell \left[\frac{1}{\log_e \frac{b}{a}} + \frac{1}{\log_e \frac{c}{b}} \right]$$

P110

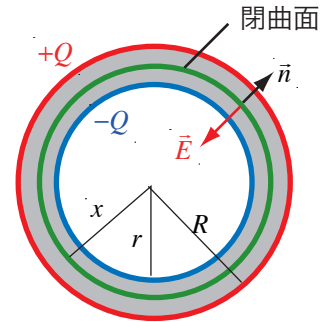
1. (1) 図のように、球体の細胞と中心が同じである半径 x の球面をガウスの法則の閉曲面とする。電場は正電荷から負電荷への向きとなるはずなので、図のように中心への向きとする。このとき、閉曲面内の電荷は $-Q$ なので、ガウスの法則は

$$\iint \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds = -E(x) \times 4\pi x^2 = -Q / (\epsilon_0 \epsilon_r)$$

となる。ここで、 ϵ_r は比誘電率を表し、いまの場合 2 である。したがって、電場の大きさは

$$E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{Q}{x^2}$$

であることが分かる。



- (2) 外から内向き

- (3) 細胞の外 $x > R$ の場合、閉曲面内の電荷は $+Q - Q = 0$ なので、(1) と同様に考えると電場はゼロであることが分かる。また、細胞内 $x < r$ の場合、閉曲面内の電荷はゼロなので、電場のゼロとなる。

(4)
$$V_{\text{外}} - V_{\text{内}} = \int_{\text{外}}^{\text{内}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_R^r -\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{Q}{x^2} dx = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left[\frac{1}{x} \right]_R^r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$$

- (5) $R > r$ であるから、(4) の結果を用いると $V_{\text{外}} - V_{\text{内}} > 0$ であることが分かる。よって、細胞外の電位が高い。

- (6) $V = V_{\text{外}} - V_{\text{内}}$ と書くと、コンデンサー電気容量は、(4) の結果を用いて

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}}$$

(7) 近似式 $\frac{1}{r} = \frac{1}{R - \delta} \approx \frac{1}{R} + \frac{\delta}{R^2}$ を用いると、電気容量は
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}} \approx \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\frac{1}{R} + \frac{\delta}{R^2} - \frac{1}{R}} = \epsilon_0\epsilon_r \frac{4\pi R^2}{\delta}$$

と書くことができる。平らな金属板（面積 S 、間隔 d ）からなるコンデンサーの電気容量は $C = \epsilon_0\epsilon_r \frac{S}{d}$ (P103 参照) である。これと上の近似をした結果と見比べると、面積が球の表面積、間隔が細胞膜の厚さの平らな 2 枚の板からなるコンデンサーの電気容量と同じであることが分かる。

(8)
$$C = 8.9 \times 10^{-12} \times 2 \times \frac{4\pi (10 \times 10^{-6})^2}{4 \times 10^{-9}} = 5.6 \times 10^{-12} \text{ [F]}$$

(9)
$$Q = CV = 5.6 \times 10^{-12} \times 90 \times 10^{-3} = 5.0 \times 10^{-13} \text{ [C]}$$

(10)
$$\frac{5.0 \times 10^{-13}}{\frac{4\pi}{3} (10^{-5})^3 \times 150 \times 6.02 \times 10^{23} \times 1.6 \times 10^{-19}} = 8.3 \times 10^{-6} \quad \text{よって } 8.3 \times 10^{-4} \% \quad (\text{とてもわずかな量})$$

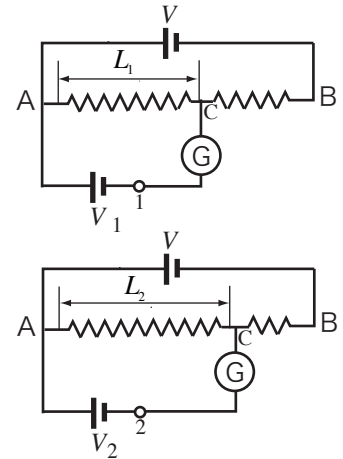
P119 1. $R = \rho \frac{\ell}{S} = 3 \times 10^{-5} \times \frac{25 \times 10^{-2}}{(10^{-2})^2} = 0.075 [\Omega]$

2. $v = \frac{I}{enS} = \frac{1}{(1.6 \times 10^{-19}) \times \left(\frac{9.92}{63.54} \times 10^6 \times 6.02 \times 10^{23} \right) \times (10^{-3})^2} = 6.6 \times 10^{-5} [\text{m/s}]$

3. スイッチの切り替えに対応して回路図を描くと右図のようになる。


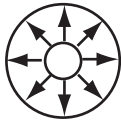
AB間の電気抵抗を R 、この電気抵抗の長さを L とすると、
 スイッチを1に接続したときのAC間の電気抵抗は $R \times \frac{L_1}{L}$ 、
 スイッチを2に接続したときのAC間の電気抵抗は $R \times \frac{L_2}{L}$ となる。
 両方の場合ともに、検流計の針は振れていないので、A1CあるいはA2Cの部分には電流は流れていない。また、AC間の電流は $\frac{V}{R}$ である。
 このことから、スイッチを1に接続したときのAC間の電位差は $V \times \frac{L_1}{L}$ 、
 スイッチを2に接続したときのAC間の電位差は $V \times \frac{L_2}{L}$ となる。これらの電位差は電池の電圧 V_1 と V_2 に等しいので

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V \times \frac{L_1}{L}}{V \times \frac{L_2}{L}} = \frac{L_1}{L_2}$$



4. (1) $R = \rho \frac{\ell}{S}$ を用いて、 $R = \rho \frac{L}{\pi(b^2 - a^2)}$

(2) $R = 3.5 \times 10^5 \times \frac{4 \times 10^{-2}}{\pi((1.2 \times 10^{-2})^2 - (0.5 \times 10^{-2})^2)} = 3.7 \times 10^7 [\Omega]$

- (3) 1.  内向き 2.  外向き 3. $e \times E(r)$ 4. $2\pi rL$ 5. $2\pi rL \times n \times v(r) \times e$

6. 式(1)より $v(r) = \frac{e}{\alpha} E(r)$ なので、式(2)に代入して $I = 2\pi rL \times n \times \frac{e^2}{\alpha} E(r)$ を得る。

したがって $E(r) = \frac{\alpha}{e^2 n 2\pi rL} \times I$

7. $V = \int_a^b E(r) dr = \frac{\alpha}{e^2 n 2\pi L} \int_a^b \frac{1}{r} dr = \frac{\alpha}{e^2 n 2\pi L} \times \log_e \frac{b}{a} \times I$

(4) a) 電子は電場からの力で加速するが、電子が速度を持つと、電子には抵抗力が働く。
 これら2つの力が釣り合うため。

b) どのような半径の円筒を考えても、その円筒の側面を単位時間あたりに通過する電子の個数は同じである。

P121

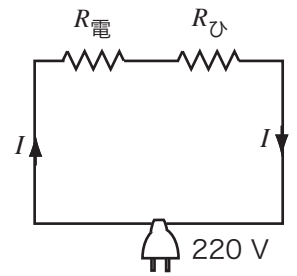
1. 電気抵抗両端の電位差は $500 [\Omega] \times 0.6 [\text{A}] = 300 [\text{V}]$ なので、電力は $300 [\text{V}] \times 0.6 [\text{A}] = 180 [\text{W}]$ 。
 すなわち1秒あたり180 J。

2. (1) 100Vで500Wなので5Aの電流が流れる。したがって、 $\frac{100 [\text{V}]}{5 [\text{A}]} = 20 [\Omega]$

(2) 20Ω の電気抵抗を90Vにつなぐと、 $\frac{90 [\text{V}]}{20 [\Omega]} = 4.5 [\text{A}]$ の電流が流れる。したがって $4.5 [\text{A}] \times 90 [\text{V}] = 405 [\text{W}]$

3. $250 \times 24 \times 30 \times \frac{20}{1000} = 3600$ 円

4. ひげそり機にかかる電圧が 100 V となるようにすればよい。これより大きな電圧となるとひげそり機に流れる電流が大きくなり過ぎて故障するし、小さな電圧だとひげそり機のモーターが十分な速さで回らないので、ひげが剃れない。



回路図で表すと右図のように電球とひげそり機をつなぐことになる。ここで、 $R_{電}$ は電球の電気抵抗、 $R_{ひ}$ はひげそり機の電気抵抗を表している。ひげそり機を 100 V につなぐと 20 W の電力となるので、このとき 0.2 A の電流が流れることになる。したがって、ひげそり機の電気抵抗は

$$R_{ひ} = \frac{100}{0.2} = 500\Omega \quad (1)$$

であることが分かる。このひげそり機と電球を直列にして、220 V のコンセントにつないだとき、電流 I A が流れたとすると

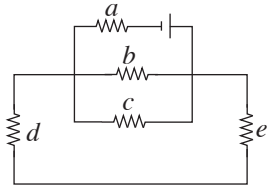
$$(R_{電} + R_{ひ}) I = 220 \quad (2)$$

が成立する。このとき、ひげそり機の電気抵抗の両端には $R_{ひ} I$ の電位差が生じていて、これが 100 V となってほしいので

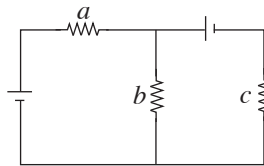
$$R_{ひ} I = 100 \quad (3)$$

が成立する。式 (1)、(2)、(3) から $I = 0.2$ A、 $R_{電} = 600 \Omega$ となることが分かる。600 Ω の電球を 220 V のコンセントにつなぐと 0.37 A の電流が流れる。したがって、 $0.37 \times 220 = 80.7$ W の電力を消費することになる。80.7 W というような細かな数値の電球は売っていないので 220V/80W の電球で我慢することにしよう。

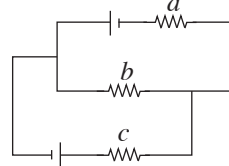
- 5.



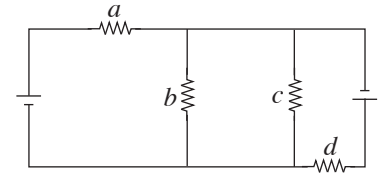
- a: 1.93A \rightarrow 37.2W
- b: 0.57A \leftarrow 3.2W
- c: 1.14A \leftarrow 6.5W
- d: 0.23A \uparrow 0.3W
- e: 0.23A \downarrow 1.1W



- a: 0.14A \rightarrow 0.06W
- b: 0.92A \downarrow 4.23W
- c: 0.77A \uparrow 4.15W

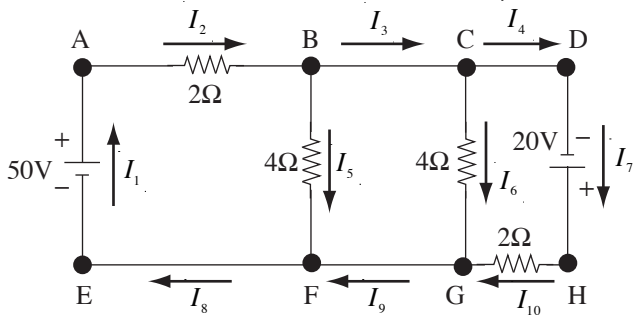


- a: 2.55A \leftarrow 26.01W
- b: 0.91A \rightarrow 16.56W
- c: 1.64A \rightarrow 16.14W



- a: 20A \rightarrow 800W
- b: 2.5A \downarrow 25W
- c: 2.5A \downarrow 25W
- d: 15A \leftarrow 450W

解説



左図のように、つなぎ目の記号、電流の向き、電流の記号を設定したとする。この場合電流の未知数が 10 個存在することになる。

1) 各つなぎ目について電流の出入りが一致するための条件は

$$\begin{aligned} A: I_1 &= I_2 & B: I_2 &= I_3 + I_5 & C: I_3 &= I_4 + I_6 \\ D: I_4 &= I_7 & E: I_1 &= I_8 & F: I_5 &+ I_9 = I_8 \\ G: I_6 &+ I_{10} = I_9 & H: I_7 &= I_{10} \end{aligned}$$

これらの式を整理すると

$$I_1 = I_2 = I_8 \quad I_4 = I_7 = I_{10} \quad I_3 = I_9 \quad (\text{これらの式はあらかじめ成立することが分かるものである})$$

および

$$I_1 = I_3 + I_5 \quad I_3 = I_4 + I_6$$

という独立な 7 つの関係式を得る。未知数は 10 個だから残り 3 つの条件が必要であることが分かる。

2) 回路を一周したときの電位差がゼロとなる条件は

$$\begin{aligned} \text{loop ABFEA: } & -2 \times I_2 - 4 \times I_5 + 0 \times I_8 + 50 = 0 & \longrightarrow & -I_1 - 2I_5 + 25 = 0 \\ \text{loop BCGFB: } & 0 \times I_3 - 4 \times I_6 + 0 \times I_9 + 4 \times I_5 = 0 & \longrightarrow & -I_6 + I_5 = 0 \\ \text{loop CDHGC: } & 0 \times I_4 + 20 - 2 \times I_{10} + 4 \times I_6 = 0 & \longrightarrow & 10 - I_4 + 2I_6 = 0 \end{aligned}$$

という 3 つの独立な式を得ることができて、条件は 10 個そろえることになる。

6. (1) □ 12V で 5W の電球を 100V につなぐとフィラメントが切れる。
 □ 100V で 5W の電球を 9 個直列につなぐと、1 個あたりの電圧 11.1V となり電球は光らない。
 直列と並列をまぜるような接続も可能ではあるが、単純に接続しているであろうと推理して

(a) 直列 (b) 並列

と考えられる。

(2) $W = I \times V, V = I \times R$ より, $R = \frac{V^2}{W}$ であるから (a) $R = \frac{12^2}{5} = 28.8[\Omega]$ (b) $R = \frac{100^2}{5} = 2000[\Omega]$

(3) (a) 全抵抗は $9 \times 28.8[\Omega]$ 。よって, $I = \frac{100}{9 \times 28.8} = 0.39[A]$

(b) 全抵抗は $\frac{1}{9 \times \frac{1}{2000}}[\Omega]$ 。よって, $I = 100 \times 9 \times \frac{1}{2000} = 0.45[A]$

(4) (a) 39 W (b) 45 W

7. (1) 1 個の電気抵抗についての電圧は 4V となる。図 1 から電流を読み取ると 0.5A。電力は $3 \times 4 \times 0.5 = 6[W]$

- (2) ⊗ の電気抵抗は同じなので、電流も同じであると考えられる。
 ⊗ を流れる電流を I とすると、 10Ω の電気抵抗には $2I$ の電流が流れることになる。したがって、電気抵抗 ⊗ の両端の電位差を V とすると、

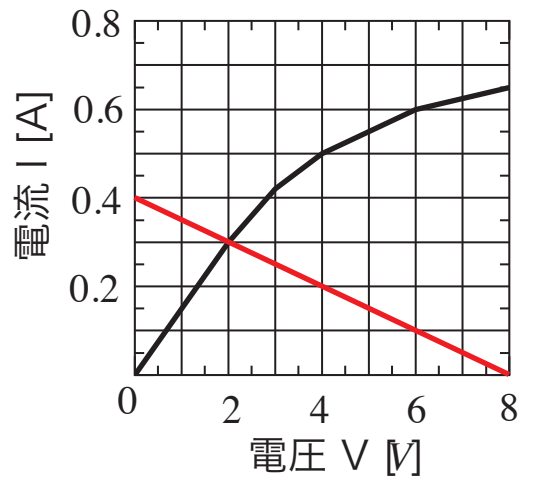
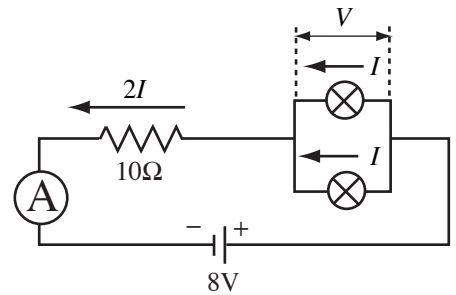
$$8 = V + 10 \times 2I \quad (1)$$

の関係が成立する。図 1 のグラフに式 (1) の直線を描いて、曲線との交点を求めると

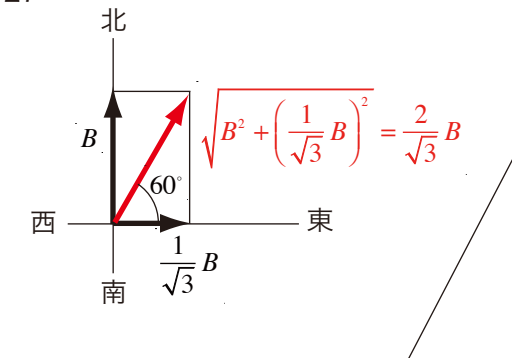
$$I = 0.3[A], \quad V = 2[V]$$

であることが分かる。したがって、電力は

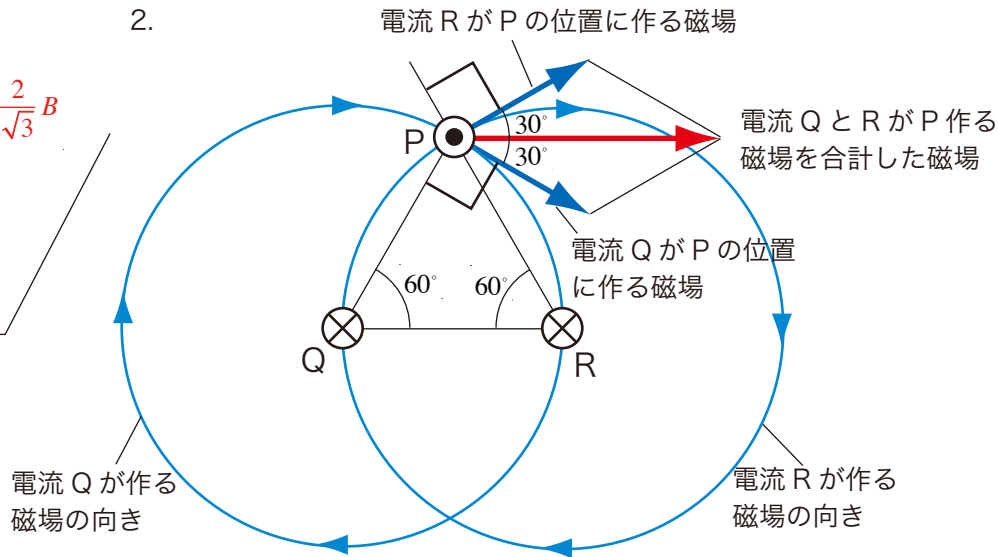
$$(10 \times 2I) \times (2I) + 2 \times I \times V = 4.8[W]$$



1.



2.

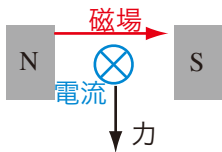


□ 電流 Q あるいは R が P の位置に作る磁場の大きさは $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = 2 \times 10^{-7} \times \frac{2}{0.1} = 4 \times 10^{-6} [\text{T}]$

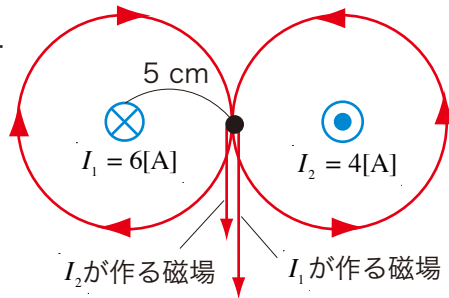
□ P の位置における磁場は、電流 Q と電流 R が作る磁場のベクトル和である。したがって、その大きさは $B_{tot.} = 2 \times \cos 30^\circ \times B = \sqrt{3} \times B = 6.9 \times 10^{-6} [\text{T}]$

□ この磁場から、電流 2A が流れる 1m の導線が受ける力は $F = I \times B_{tot.} \times \ell = 2 \times 6.9 \times 10^{-6} \times 1 = 1.4 \times 10^{-5} [\text{N}]$

3.



5.

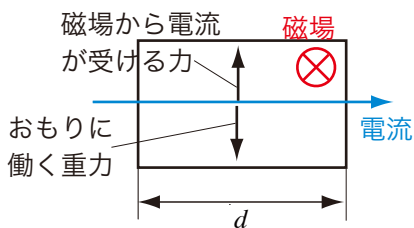


磁場の合計は

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} \\ &= 2 \times 10^{-7} \times \frac{6+4}{5 \times 10^{-2}} \\ &= 4 \times 10^{-5} [\text{T}] \end{aligned}$$

4. $20 \times 3 \times 10^{-5} \times 1 = 6 \times 10^{-4} [\text{N}]$

6. (1) 図3を磁石の面に垂直な方向から見ると

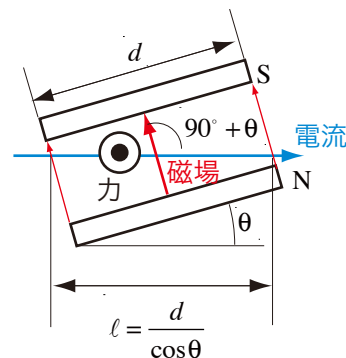


磁場から電流が受ける力の大きさは IBd
 おもりに働く重力の大きさは mg
 したがって、力のつり合いの条件 $IBd = mg$
 から $B = \frac{mg}{Id}$

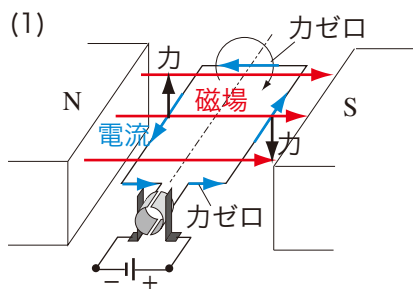
(2) 右図のように図3を上から見て、磁石が電流に対して角度 θ だけ傾いているとする。このとき、電流が磁場から受ける力の大きさは、

$$IBl \sin(90^\circ + \theta) = IBl \cos\theta$$

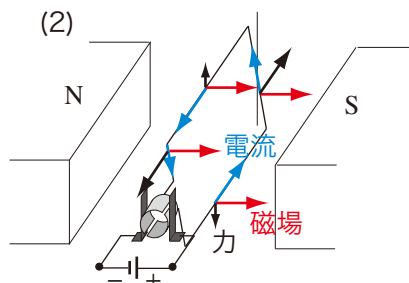
となる。ここで、 l は磁場中にある電流の長さで $l = \frac{d}{\cos\theta}$ である。したがって、力の大きさは磁石の傾きの角度によらず IBd となる。

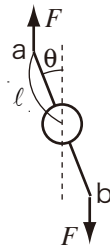
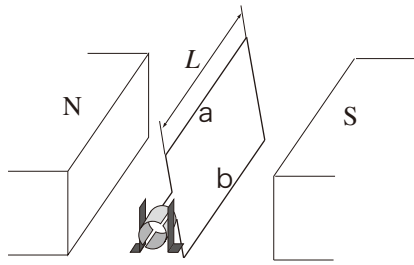


7. (1)



(2)





(2)の結果から、コイルのうち辺 a と b に働く力がコイルを回転させることができる。それぞれの辺には、大きさ

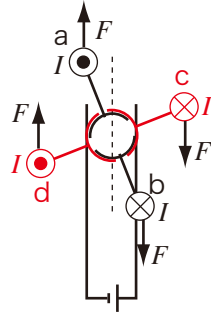
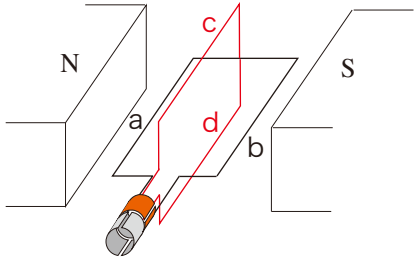
$$F = IB\ell$$

の力が働く。コイルの傾きの角度を図のように θ とすると、コイルを回転させるための力のモーメントは

$$N = 2F\ell \sin\theta$$

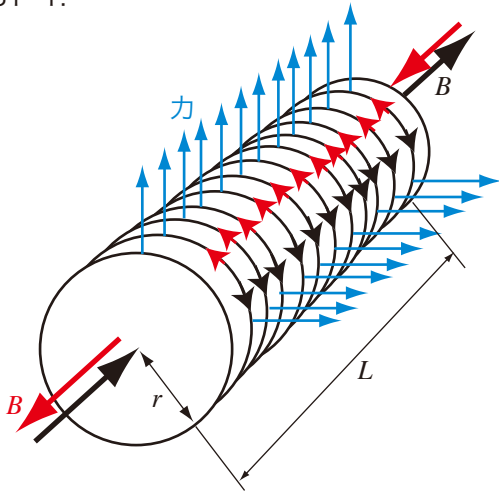
となる。 θ が小さいとき、力のモーメントも小さくなるので、コイルを回転させることが困難となる。

(4)



図のように、黒のコイル部分が磁場と垂直になると、(3)のように力のモーメントが小さくなり回転が困難となる。しかし、その時、赤のコイルは磁場と平行になるので、大きな力のモーメントを生じる。この組み合わせによって、どのような角度においても、力のモーメントを得ることができる。

P131 1.



コイルに流れる電流の向きには2通りがある（左図の \blacktriangledown と \blacktriangleright ）。それぞれの場合について、コイルの内部には \nearrow と \searrow の向きに磁場が発生する。コイルに流れる電流はコイル内に発生した磁場から力を受ける。電流がどちらの向きに流れても、コイルに働く力は外向きとなる。コイル内の磁場は

$$B = 4\pi \times 10^{-7} \times 10 \times 2 \times 10^5 = 2.5[\text{T}]$$

である。コイルの長さを L 、半径を r とすると、コイルには全長 $2\pi r \times 10 \times L$ の電線が巻かれており、それを流れる $2 \times 10^5 [\text{A}]$ の電流は磁場から

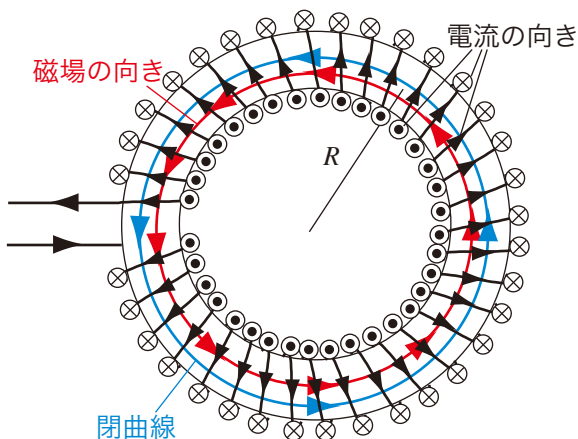
$$F = 2 \times 10^5 \times 2.5 \times 2\pi r \times 10 \times L [\text{N}]$$

の大きさの力を受けることになる。この力がコイルの側面に働くので、圧力は

$$P = \frac{F}{2\pi r L} = 2 \times 10^5 \times 2.5 \times 10 = 5 \times 10^6 [\text{Pa}]$$

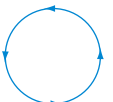
となる。

2.



コイル内にできる磁場は左図の  の方向となる。

コイルの電流の各部分について右ねじの法則にしたがって

磁場の向きを調べればよい。左図の  のように閉曲線を考えると、マクスウェル方程式（その4）

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 NI$$

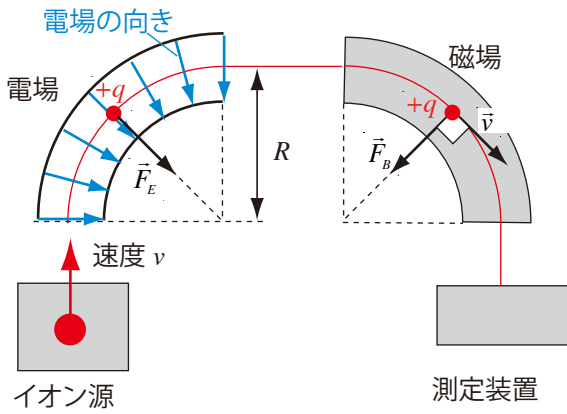
より

$$B \times 2\pi R = \mu_0 NI$$

となり

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R}$$

P135 1.



(1) 電荷 $+q$ が のような円軌道を描くためには、図中の \vec{F}_E の向きに向心力が働く必要がある。電荷は正の符号なので、電場は外から内向きとなる。したがって、外の電極の電位が高い。

(2) 向心力の大きさは $m\frac{v^2}{R}$ で、電気力の大きさは qE なので円軌道を進むための条件は $R = \frac{mv^2}{qE}$

(3) 図に示したように、磁場からの力 \vec{F}_B が働いているはずなので、磁場は \odot の向き。

(4) 向心力の大きさは $m\frac{v^2}{R}$ で、磁場からの力の大きさは qvB なので、円軌道を進むための条件は $R = \frac{mv}{qB}$

(5) (2) と (4) の結果から $R = \frac{mv^2}{qE} = \frac{mv}{qB}$ 。したがって、 $v = \frac{E}{B}$

(6) (4) と (5) の結果から $R = \frac{mv}{qB} = \frac{mE}{qB^2}$ となり、 $\frac{q}{m} = \frac{E}{RB^2}$

P136

2. (1) $m\frac{v^2}{r} = evB$ より $B = \frac{mv}{er}$ (2) \otimes (3) $\frac{2 \times 10^8 - 1 \times 10^7}{10 \times 10^3} = 1.9 \times 10^4$ 回

(4) $\frac{1}{2}mv^2 = 2 \times 10^8 \times 1.6 \times 10^{-19}$ より $v = \sqrt{\frac{4 \times 10^8 \times 1.6 \times 10^{-19}}{1.6 \times 10^{-27}}} = \sqrt{4 \times 10^{16}} = 2 \times 10^8$ [m/s] 光速の 67%

(5) 入射時の陽子の運動エネルギーを $K_0 = 1 \times 10^7 \times 1.6 \times 10^{-19}$ [J]、加速電圧を $V = 1 \times 10^4$ [V] と書くと、加速器を n 回まわったときの陽子の運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}mv^2 = K_0 + eV \times n$$

となる。(1) の結果から、この速さの陽子を周回させるために必要な磁場の大きさは

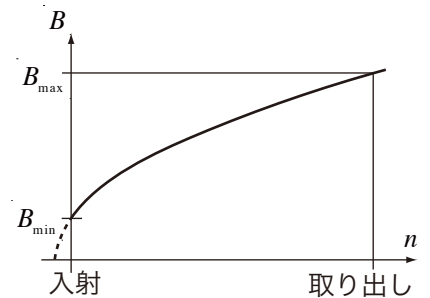
$$B = \sqrt{\frac{2mV}{er^2} \left(\frac{K_0}{eV} + n \right)}$$

である。入射時の磁場は

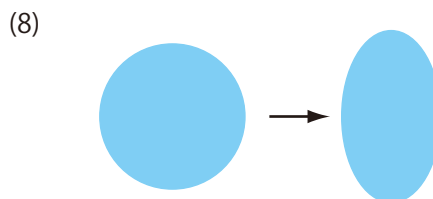
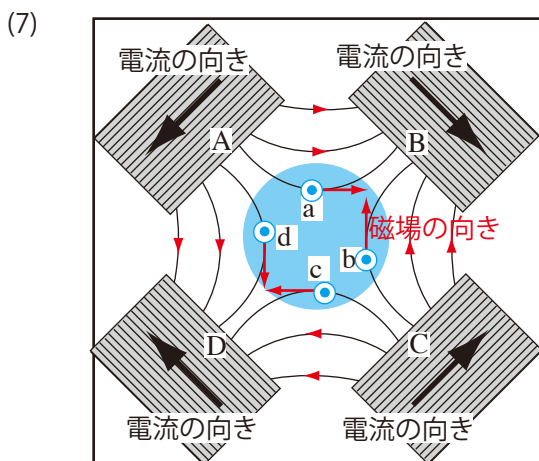
$$B_{\min} = \frac{\sqrt{2mK_0}}{er} = \frac{\sqrt{2 \times 1.6 \times 10^{-27} \times 1 \times 10^7 \times 1.6 \times 10^{-19}}}{1.6 \times 10^{-19} \times 3} = 0.15$$
 [T]

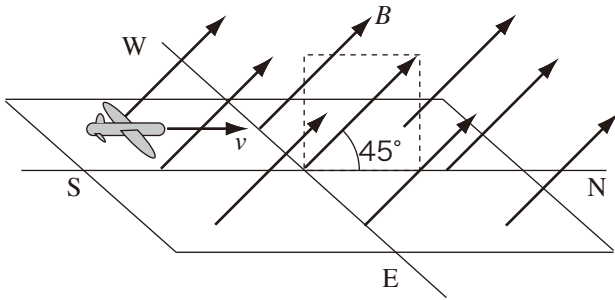
で、取り出しにおける磁場は

$$B_{\max} = \frac{\sqrt{2 \times 1.6 \times 10^{-27} \times 2 \times 10^8 \times 1.6 \times 10^{-19}}}{1.6 \times 10^{-19} \times 3} = 0.67$$
 [T]



(6) N 極 : A, C S 極 : B, D





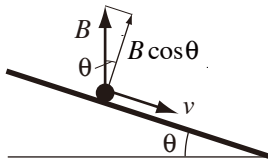
(1) 地磁気の鉛直成分のみが関与するので

$$V = 40 \times 10^{-6} \times \sin 45^\circ \times 70 \times \frac{1000 \times 1000}{60 \times 60} = 0.55 [\text{V}]$$



(2) 電位差は (1) と同じ

2. (1)

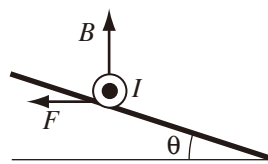


速度と垂直な磁場成分が関与するので

$$V = BvL \cos \theta$$

(2) $I = \frac{V}{R} = \frac{BvL \cos \theta}{R}$

(3)



$$F = IB L = \frac{B^2 L^2 \cos \theta}{R} \times v$$

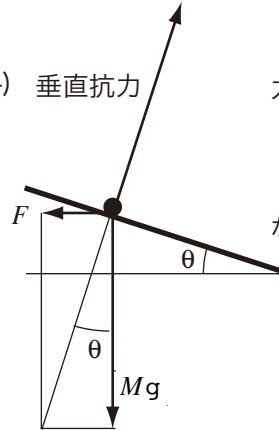
(4) 垂直抗力

力のつり合いの条件は

$$\tan \theta = \frac{F}{Mg} = \frac{B^2 L^2 \cos \theta}{MgR} \times v$$

なので,

$$v = \frac{MgR \sin \theta}{B^2 L^2 \cos^2 \theta}$$



(5) 可動導体棒が 1 秒間に平行導体棒にそって

移動する距離は $v \times 1$ 。したがって,

可動導体棒は鉛直方向に $v \sin \theta$ の高さだけ

下へ移動したことになる。このため、可動導体棒

の位置エネルギーは 1 秒間に $Mg v \sin \theta$ だけ減少

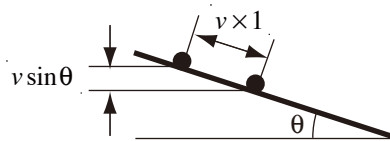
することになる。また、抵抗で消費されるエネルギー

は 1 秒間 (電力) に IV である。以上のことから,

$$\text{位置エネルギーの減少分} \quad Mg v \sin \theta = \frac{M^2 g^2 R \sin^2 \theta}{B^2 L^2 \cos^2 \theta}$$

$$\text{抵抗で消費される電力} \quad IV = \frac{BvL \cos \theta}{R} \times BvL \cos \theta = \frac{B^2 L^2 \cos^2 \theta}{R} \times \left(\frac{MgR \sin \theta}{B^2 L^2 \cos^2 \theta} \right)^2 = \frac{M^2 g^2 R \sin^2 \theta}{B^2 L^2 \cos^2 \theta}$$

となり、両者は等しいことが分かる。



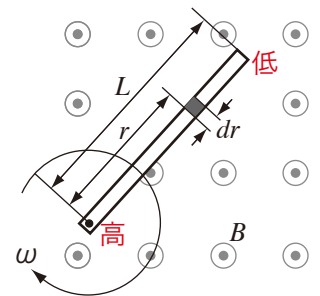
P141 3. (1) $v = r\omega$ (2) $dV = B \times v \times dr = B\omega \times r \times dr$ (3) $V = \int dV = B\omega \int_0^L r dr = \frac{1}{2} B\omega L^2$

4. 3 の結果と 1 の数値を参考にすると,

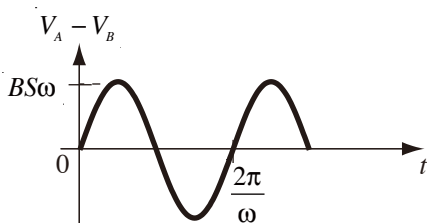
$$\omega = 4\pi \text{ rad/s} \quad L = 1.5 \text{ m} \quad B = 40 \times 10^{-6} \times \sin 45^\circ = 2.8 \times 10^{-5} \text{ T}$$

なので,

$$V = \frac{1}{2} B\omega L^2 = 4 \times 10^{-4} [\text{V}]$$



5. (1) ωt (2) $BS \cos \theta(t)$ (3) $BS\omega \sin(\omega t)$ (4) $\frac{2\pi}{\omega}$ (5) $BS\omega$



P141 6. 円筒のコイル内に生じる磁場は x 軸正の向きで、
大きさは、(P128-129 参照)

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I = 4\pi \times 10^{-7} \times 200 \times 15 = 3.8 \times 10^{-3} \text{ [T]}$$

である。

円形コイルが y 軸正の向きから見て反時計まわりに角速度 ω で回転しているとすると、時刻 t において円形コイルの面と z 軸のなす角度は

$$\theta(t) = \omega t$$

と表すことができる。

円形コイルの半径を r とすると、時刻 t において円形コイルの面を垂直に通過する磁場成分は

$$B \cos\theta(t)$$

なので、磁束は

$$\Phi(t) = \pi r^2 \times B \cos(\omega t)$$

と書ける。したがって、円形コイル 1 周分の電線に誘導される電位差は

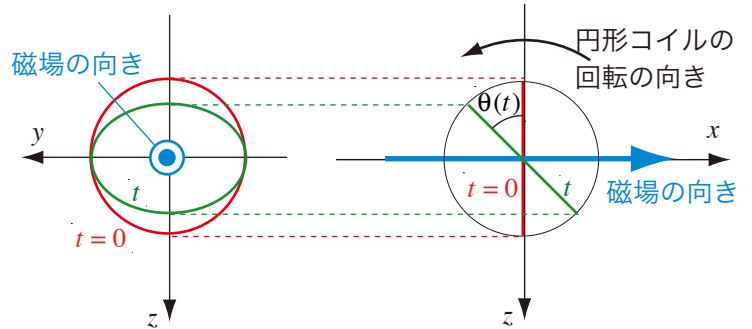
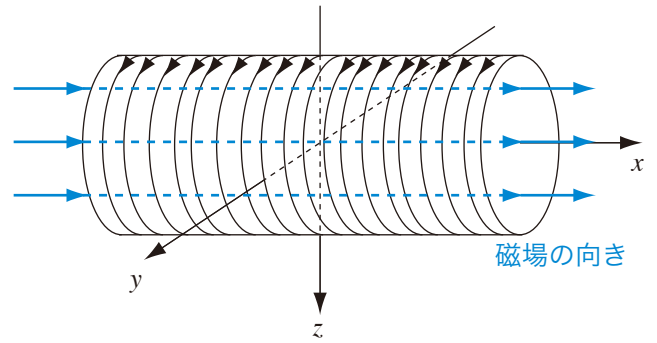
$$V_1(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = \pi r^2 \omega B \sin(\omega t)$$

となる。円形コイルが N 巻きであるとする、1 周分の電位差に相当する電池が N 個直列に接続されていると考えればよい。よって、円形コイル全体に誘導される電位差は

$$V(t) = N \times V_1(t) = N\pi r^2 \omega B \sin(\omega t)$$

となる。具体的な数値を代入すると

$$V(t) = 30 \times \pi \times (0.08)^2 \times 4\pi \times 3.8 \times 10^{-3} \times \sin(4\pi t) = 2.9 \times 10^{-2} \times \sin(12.6 \times t) \text{ [V]}$$



- P144 1. (1) 1. $\frac{1}{2} a(\Delta t)^2$ 2. $\rho \times \Delta h \times \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2$ 3. $\Delta m \times g \times h$ 4. $a \times \Delta t$
 5. $\frac{1}{2} \left(\rho \times \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \times h \right) \times (a \times \Delta t)^2$ 6. $\left(\frac{D}{d}\right)^2$ 7. 100 8. $\sqrt{2gh} \times \left(\frac{d}{D}\right)^2$ 9. 0.002 秒

(2) 右図の 2 点 (●) についてベルヌーイの定理を考えると

$$\rho gh = \frac{1}{2} \rho v^2$$

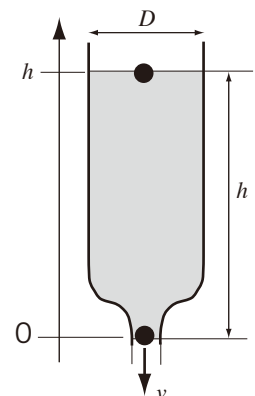
が成立するので

$$v = \sqrt{2gh}$$

(3) $\boxed{3} = \boxed{5}$ の式から

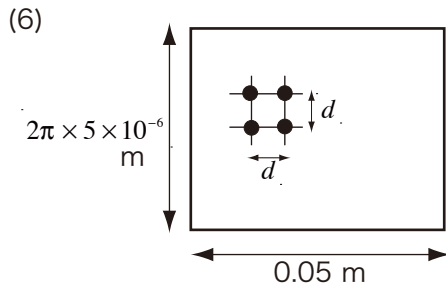
$$\rho \times \frac{1}{2} a(\Delta t)^2 \times \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \times g \times h = \frac{1}{2} \left(\rho \times \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \times h \right) \times (a \times \Delta t)^2$$

となり、整理すると $g = a$



P145 2. (1) $10^5 \Omega$ (2.1) $R = \int_a^b \rho \frac{1}{2\pi r \ell} dr = \frac{\rho}{2\pi \ell} \log_e \frac{b}{a}$ (2.2) 0.76Ω

(3) $r = 0.15 \times \frac{8 \times 10^{-9}}{\pi \times (0.35 \times 10^{-9})^2} = 3.12 \times 10^9 \Omega$ (4) $R_{\text{ま小}} = \frac{1}{\frac{1}{r} \times N} = \frac{r}{N}$ (5) $N = \frac{r}{R_{\text{ま小}}} = 3.12 \times 10^4$ 個



穴の数はとても多いので、 d^2 の面積あたりにひとつの穴がある
と考えると影響はない

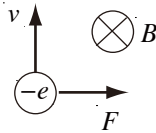
$$N \times d^2 = 2\pi \times 5 \times 10^{-6} \times 0.05$$

$$d = 7.1 \times 10^{-6} \text{ m}$$

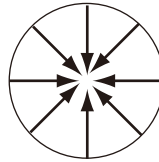
(7) $V_{\text{内}} < V_{\text{外}}$

(8) $\frac{RT}{eN_A} \log_e \frac{155}{4} = \frac{8.31 \times 300}{1.6 \times 10^{-19} \times 6.02 \times 10^{23}} \times 3.66 = 0.095 \text{ V}$

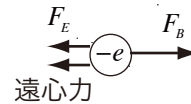
P146 3. (1)



(2)



(3)



(4) $eE(r) + m\omega^2 = e\omega B$

(5) $\omega B - \frac{m\omega^2}{e}$

(6) $2\pi xL$

(7) $2\pi xL$

(8) (7)の式の両辺を r で微分すると

$$\left(\omega B - \frac{m\omega^2}{e} \right) \times 4\pi rL = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(r) \times 2\pi rL$$

となるので

$$\rho(r) = -2\epsilon_0 \left(\omega B - \frac{m\omega^2}{e} \right)$$

のように r に依存していない。

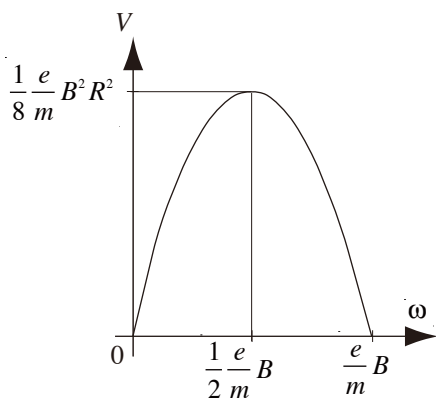
(9)



(10) $V = \int_0^R E(r) dr = \frac{1}{2} \left(\omega B - \frac{m\omega^2}{e} \right) R^2$

(12) $\omega = \frac{e}{m} B$

(11)



(13) 電位差がなければ電場はゼロである。

したがって、電子には電場からの力が働かない。このため、電子に働く力は遠心力と磁場からの力だけとなる。

この2つの力が釣り合う条件は

$$m\omega^2 = e\omega B$$

で、(12)の結果と一致する。