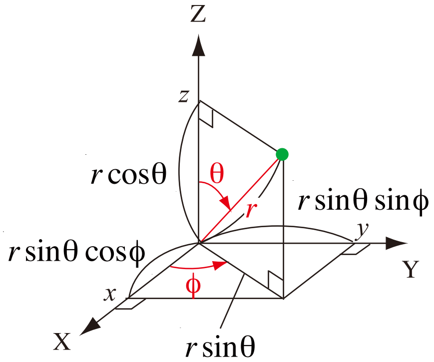
P4

1. $x(t)=a\cos(\omega t),\ y(t)=b\sin(\omega t)$ から時間の変数 t を消去すると $\left(\frac{x(t)}{a}\right)^2+\left(\frac{y(t)}{b}\right)^2=(\cos(\omega t))^2+(\sin(\omega t))^2=1$

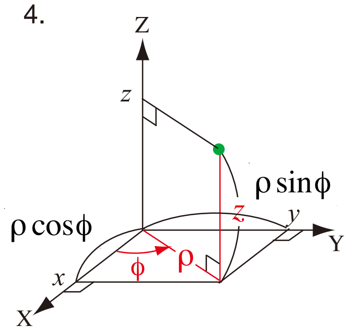
なので、楕円軌道

2. $y=\frac{c}{b}(x-a)$

3.



4.



$x=\rho\cos\phi$

$y=\rho\sin\phi$

$z=z$

P5

1. 内積の定義 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ より $\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x=|\vec{e}_x||\vec{e}_x|\cos 0$

$\vec{e}_x$ は単位ベクトルなので、$|\vec{e}_x|=1$

$\cos 0=1$ より、$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x=1$

2. $\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z$ は互いに間の角度が 90° なので、$\cos 90^\circ=0$ となり、$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y=\cdots=0$

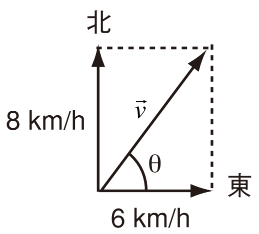
3. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos 0=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$ より、 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}$

4. $\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z\\ \overrightarrow{\mathrm{OP}'}=x'\vec{e}_x+y'\vec{e}_y+z'\vec{e}_z\end{cases}$ なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}'}=(x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z)\cdot(x'\vec{e}_x+y'\vec{e}_y+z'\vec{e}_z)=xx'\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x+yy'\vec{e}_y\cdot\vec{e}_y+zz'\vec{e}_z\cdot\vec{e}_z+xy'\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y+xz'\vec{e}_x\cdot\vec{e}_z+\cdots$$

と展開できる。ここで、 $\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x=\vec{e}_y\cdot\vec{e}_y=\vec{e}_z\cdot\vec{e}_z=1,\ \vec{e}_x\cdot\vec{e}_y=\vec{e}_x\cdot\vec{e}_z=\cdots=0$ を使えば $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}'}=xx'+yy'+zz'$

5.



図のような速度ベクトルの和となるので、

$$|\vec{v}|=\sqrt{8^2+6^2}=10\ \mathrm{km/h}$$

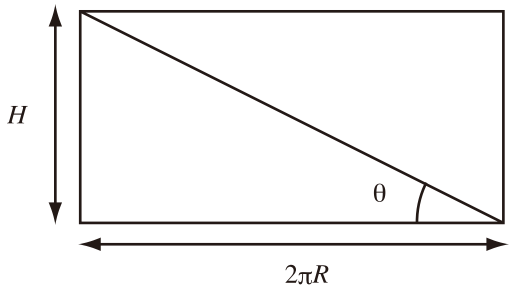
角度は $\tan\theta=\frac{8}{6}$ $\Rightarrow$ $\theta=53.1\cdots$ 度 （角度を求めるには電卓が必要）

6. 川幅＝ $100\times\tan 30^\circ=\frac{100}{\sqrt{3}}=57.7\ \mathrm{m}$

P8

1. 最初の車は米原到着までに $\dfrac{100}{80}=1.25$ 時間かかる。したがって、15 分遅れてスタートする車は、米原まで 1 時間で走ればよい。すなわち、速さは 100 km/ 時 であればよい。

2. 円筒面を切り開いて平面に引き延ばすと、らせん状の曲線は図のように斜めの直線となる。

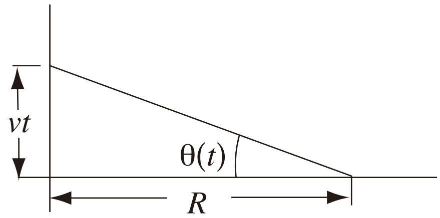


(1) $\sqrt{H^2+(2\pi R)^2}=13.9\ \mathrm{m}$

(2) $\tan\theta=\dfrac{H}{2\pi R}=0.477 \quad \Rightarrow \ \theta=25.5^\circ$（電卓が必要）

(3) $\dfrac{13.9}{3}=4.6$ 秒

3. (1) $\tan\theta(t)=\dfrac{vt}{R}$



(2) 上の結果の両辺を時刻 t で微分すると

$$\frac{d(\tan\theta(t))}{dt}=\frac{v}{R} \qquad \Rightarrow \frac{d(\tan\theta)}{d\theta}\frac{d\theta(t)}{dt}=\frac{v}{R}$$

となり、微分の公式 $\dfrac{d(\tan\theta)}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を使うと

$$\frac{d\theta(t)}{dt}=\frac{v}{R}\cos^2\theta$$

を得る。また、

$$\cos\theta=\frac{R}{\sqrt{R^2+(vt)^2}}$$

なので、

$$\frac{d\theta(t)}{dt}=\frac{Rv}{R^2+(vt)^2}=\frac{R}{vt^2}\frac{1}{1+\left(\dfrac{R}{vt}\right)^2}$$

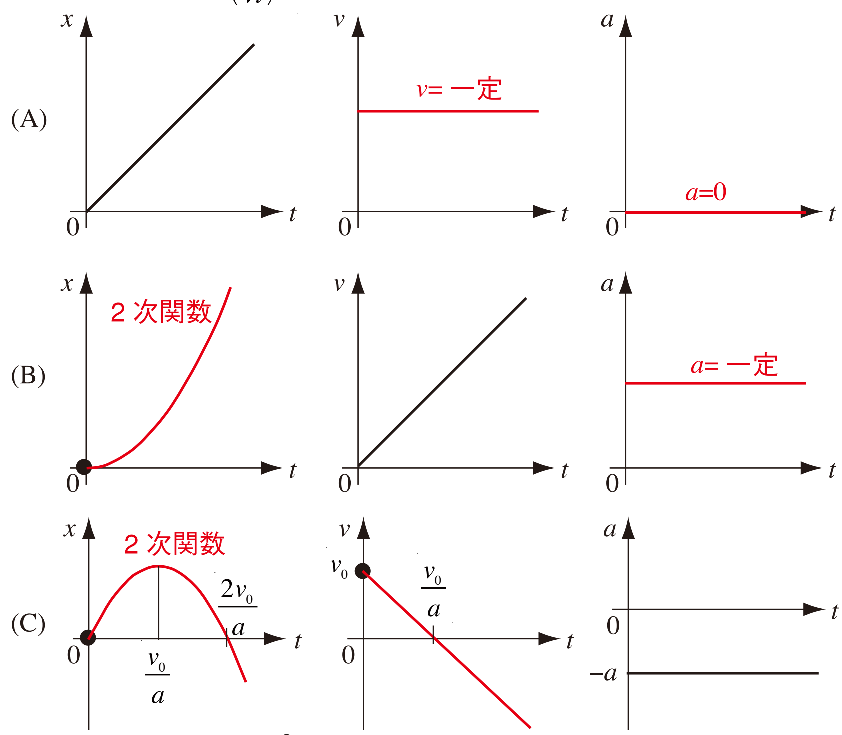
と書くことができる。

(3) 時間が十分に経過すると $vt>>R$ となるので、$\left(\dfrac{R}{vt}\right)^2<<1$ となる。

≒の意味

したがって、上の結果 $\dfrac{d\theta(t)}{dt}=\dfrac{R}{vt^2}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{R}{vt}\right)^2}$ において、2 つめの分母は $1+\left(\dfrac{R}{vt}\right)^2\simeq 1$ と近似することができる。

P10 1.



P10　2.　(1)　$v_0 - at = 0$　より　$t = \dfrac{100}{5} = 20$ 秒

(2) t=0 で v=100 m/s なので、$-5\ \mathrm{m/s^2}$ の加速度運動をすると時刻 t までに進む距離は

$$100 \times t - \frac{1}{2} \times 5 \times t^2$$

となる。上の結果 t=20 秒を代入すると

$$100 \times 20 - \frac{1}{2} \times 5 \times 20^2 = 1000\ \mathrm{m}$$

つまり、停止までに 1 km 進むことになる。したがって、0.8 km の飛行場には着陸できない。

P11　3.　(1)　$v = \dfrac{2\pi R}{T}$　より　$v = \dfrac{2 \times 3.14 \times 3.84 \times 10^8}{27.3 \times 24 \times 60 \times 60} = 1022\ [\mathrm{m/s}]$

(2)　$a = \dfrac{v^2}{R}$　より　$a = \dfrac{(1022)^2}{3.84 \times 10^8} = 2.72 \times 10^{-3}\ [\mathrm{m/s^2}]$

4. 時刻 t=0 での走者の位置を $x(0) = 0$ として，$x(t) \le L$ の範囲だけを考える。

(1) (a) グラフから $v(t) = V$ であることが分かる。速度と位置の関係は $v(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ であるから，時刻 t の位置は $\dfrac{dx(t)}{dt} = V$ の関係を満たす。このことから，時刻 t の位置を求めるために，両辺を時刻 0〜t の範囲で積分をする。すなわち

$$\int_0^t \frac{dx(t)}{dt} dt = \int_0^t V\ dt$$

を計算してみる。右辺は $V \times t$ で，左辺は置換積分を用いることで，

$$\int_{x(0)}^{x(t)} dx = V \times t$$

となる。したがって，

$$x(t) - x(0) = V \times t$$

であることが分かる。また，$x(0) = 0$ であるから

$$x(t) = V \times t$$

となる。

(b) グラフから

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = V\left(1 - \frac{x(t)}{L}\right)$$

であることが分かる。この両辺をそのまま時刻 0〜t の範囲で積分をすると

$$\int_0^t \frac{dx(t)}{dt} dt = \int_0^t V\left(1 - \frac{x(t)}{L}\right) dt$$

となる。左辺は上と同様に置換積分を適用することで積分を実行できるが，右辺は $x(t)$ の関数形が分かっていないので，具体的に積分を行うことはできない。このような場合は，

$$\frac{1}{1 - \dfrac{x(t)}{L}} \frac{dx(t)}{dt} = V$$

と書き直して積分してみると

$$\int_0^t \frac{1}{1 - \dfrac{x(t)}{L}} \frac{dx(t)}{dt} dt = \int_0^t V\ dt$$

となり，右辺は $V \times t$ で，左辺はに置換積分を適用すると

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{1}{1 - \dfrac{x}{L}} dx = V \times t$$

となることが分かる。積分公式　$\displaystyle\int \frac{dx}{ax + 1} = \frac{1}{a} \log_e |ax + 1|$　を用いると

P11　4.　(1) つづき

$$\left[-L\log_e\left|1-\frac{x}{L}\right|\right]_{x(0)}^{x(t)}=V\times t$$

となり , $x(0)=0$ であることから

$$x(t)=L\left(1-e^{-\frac{Vt}{L}}\right)$$

と表すことができる。

(c) グラフから

$$v(t)=\frac{dx(t)}{dt}=V\left(1-\frac{x(t)}{L}\right)^2$$

なので , (b) と同様に

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x(t)}{L}\right)^2}\frac{dx(t)}{dt}=V$$

と書き直して両辺を時刻 0～t の範囲で積分をする。すなわち

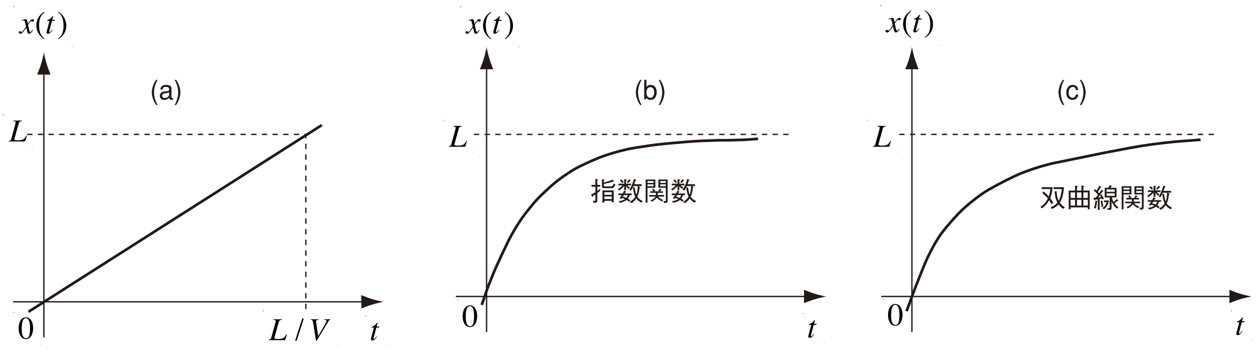
$$\int_0^t\frac{1}{\left(1-\frac{x(t)}{L}\right)^2}\frac{dx(t)}{dt}dt=\int_{x(0)}^{x(t)}\frac{1}{\left(1-\frac{x}{L}\right)^2}dx=\int_0^t V\ dt=V\times t$$

となり , 積分公式 $\int\frac{dx}{(ax+1)^2}=-\frac{1}{a}\frac{1}{ax+1}$ を用いると

$$x(t)=\frac{Vt}{1+\frac{Vt}{L}}$$

となることが分かる。

(2)

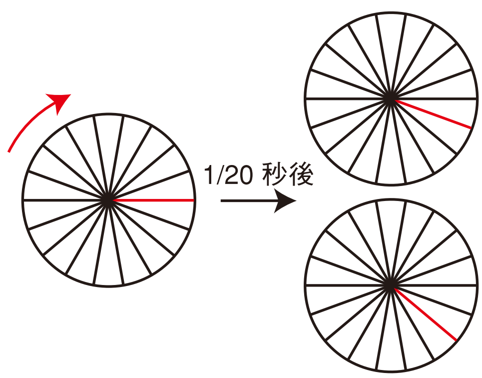


(3)　(b)　$x(t)=L\left(1-e^{-\frac{Vt}{L}}\right)$　より　$t=-\frac{L}{V}\log_e\left(1-\frac{x}{L}\right)$　したがって　$x=L$　とすると　$t=\infty$

(c)　$x(t)=\frac{Vt}{1+\frac{Vt}{L}}$　より　$t=\frac{1}{V}\frac{x}{1-\frac{x}{L}}$　したがって　$x=L$　とすると　$t=\infty$

5. (1) 車輪が止まって見えるのは , フィルムの隣り合ったコマで車輪が同じ画像として写っている場合である。隣り合ったコマの間の時間は 1/20 秒であるから , この時間の間に車輪が回転して , スポークが同じ位置に撮影されればよい。したがって ,1/20 秒間に車輪が角度

$$\frac{2\pi}{18}\ \text{[rad]},\ 2\times\frac{2\pi}{18}\ \text{[rad]},\ \cdots$$



だけ回転すればよい。車輪が滑らずに回転していたとすると , 車輪外周の回転の速さは馬車の速さと同じであると考えられる。

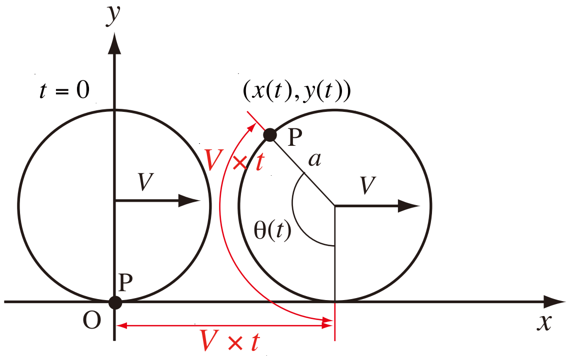
よって , 馬車の速さは

$$0.75\times\frac{2\pi/18}{1/20}=5.24\text{[m/s]},\ \ 10.47\ \text{[m/s]},\ 15.7\ \text{[m/s]},\ \cdots$$

P11　5.　(2)　(1) と同様に考えると

$$v = R \times \frac{\frac{2\pi}{N}}{\frac{1}{M}} = \frac{2\pi MR}{N}$$ 　およびその整数倍

6. (1)



t 秒間に円板の中心が $V \times t$ だけ進んだとき，円板の外周にある点も $V \times t$ だけ移動している。したがって，円板は

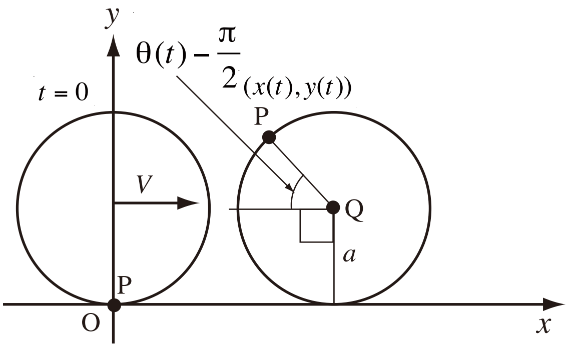
$$\theta(t) = \frac{V \times t}{a} \ [\mathrm{rad}]$$

だけ回転したことになる。よって角速度（単位時間あたりの回転角度）は

$$\omega = \frac{\frac{V \times t}{a}}{t} = \frac{V}{a} \quad [\mathrm{rad/s}]$$

となる。

(2)



左図のような場合を考えると，時刻 t の円板の中心 Q の座標は

$$(V \times t,\ a)$$

で，　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$　は

$$\left(-a\cos\left(\theta(t) - \frac{\pi}{2}\right), a\sin\left(\theta(t) - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$= \left(-a\sin\theta(t), -a\cos\theta(t)\right)$$

なので，点 P の位置ベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x(t), y(t)) = \left(Vt - a\sin\theta(t),\ a - a\cos\theta(t)\right)$$

となる。

(3) 速度ベクトルと位置ベクトルには

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}\right)$$

の関係があるので，(2) の結果を t で微分すると

$$\vec{v}(t) = \left(V - a\cos(\theta(t)) \times \frac{d\theta(t)}{dt},\ a\sin(\theta(t)) \times \frac{d\theta(t)}{dt}\right) = \left(V - a\omega\cos(\theta(t)),\ a\omega\sin(\theta(t))\right)$$

を得る。ここで，角速度と角度の関係

$$\omega = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

を用いた。

(4) 加速度ベクトルと速度ベクトルには

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \left(\frac{dv_x(t)}{dt}, \frac{dv_y(t)}{dt}\right)$$

の関係があるので，(3) の結果を t で微分すると．

$$\vec{a}(t) = \left(a\omega^2\sin(\theta(t)),\ a\omega^2\cos(\theta(t))\right)$$

を得る。

(5) 点 P から円板の中心 Q へ向かうベクトルは

$$\overrightarrow{PQ} = \left(a\sin(\theta(t)),\ a\cos(\theta(t))\right)$$

なので，加速度ベクトル　$\vec{a}(t)$　は $\overrightarrow{PQ}$ と同じ向きであることが分かる。

P11　6.　(6)　点 P が円板の最下点にくる場合 $\theta(t)=0,\ 2\pi,\ 4\pi,\cdots$ を考えると , (3) の結果を用いて

$$\vec{v}(t)=(V-a\omega,\ 0)$$

であることが分かる。ここで , (1) の結果から角速度は $\omega=\dfrac{V}{a}$ であるから $\vec{v}(t)=(0,\ 0)$ となる。

(7)　点 P が円板の最上点にくる場合 $\theta(t)=\pi,\ 3\pi,\ 5\pi,\cdots$ を考えると , (3) の結果を用いて

$$\vec{v}(t)=(V+a\omega,\ 0)$$

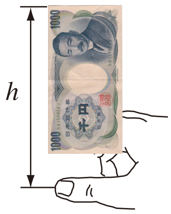
であることが分かる。ここで , (1) の結果から角速度は $\omega=\dfrac{V}{a}$ であるから $\vec{v}(t)=(2V,\ 0)$ となる。

P13　1. a) 紙幣が 7.5 cm 落下するのにかかる時間 t は

$$0.075=\frac{1}{2}\mathrm{g}t^2$$

より t=0.12 秒

b)

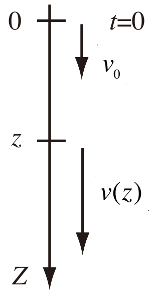


$\dfrac{1}{5}$ 秒間に紙幣が落下する距離 h は

$$h=\frac{1}{2}\mathrm{g}\times\left(\frac{1}{5}\right)^2=0.2\ \mathrm{m}$$

なので、紙幣の上端から 20 cm（紙幣の下端から 5 cm）の位置にすればよい。

2. a)



流れ出る水の一部あるいは水滴あるいは H_2O 分子に注目して、時刻 $t=0$ に速度で落下を始めたとすると、時刻 t での位置は

$$z=\frac{1}{2}\mathrm{g}t^2+v_0t$$

で、速度は

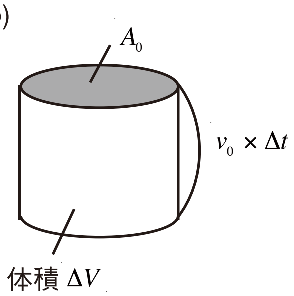
$$v(z)=\mathrm{g}t+v_0$$

となる。これらの式から t を消去すると

$$\begin{aligned}z&=\frac{1}{2}\mathrm{g}\left(\frac{v(z)-v_0}{\mathrm{g}}\right)^2+v_0\left(\frac{v(z)-v_0}{\mathrm{g}}\right)\\&=\frac{1}{2\mathrm{g}}(v(z)^2-2v(z)v_0+v_0{}^2)+\frac{1}{\mathrm{g}}(v_0v(z)-v_0{}^2)\\&=\frac{1}{2\mathrm{g}}(v(z)^2-v_0{}^2)\end{aligned}$$

なので　$v(z)=\sqrt{v_0{}^2+2\mathrm{g}z}$　を得る。

b)



時間 Δt の間に蛇口から流れ出る水の体積は、図のように

$$\Delta V=A_0\times v_0\times\Delta t$$

である。したがって、単位時間あたり

$$\frac{\Delta V}{\Delta t}=A_0\times v_0$$

の水が流れ出している。

c) 距離 z の位置を単位時間あたりに通過する水の量は、b) と同様に考えて

$$\frac{\Delta V}{\Delta t}=A(z)\times v(z)$$

となる。ところで、水はどこかになくなることはないので、蛇口から単位時間に流れ出た水は、z の位置を単位時間に通過することになる。したがって

$$A(z)\times v(z)=A_0\times v_0$$

となり、位置 z での水の流れの断面積は

$$A(z)=\frac{A_0v_0}{\sqrt{v_0{}^2+2\mathrm{g}z}}$$

となることが分かる。

P13 3. a) 標的 ● は時刻 $t=0$ に（$\ell, \ell\tan\theta$）から落下を始めるので，時刻 t の位置は

$$x_{●}(t)=\ell, \quad y_{●}(t)=\ell\tan\theta-\frac{1}{2}gt^2$$

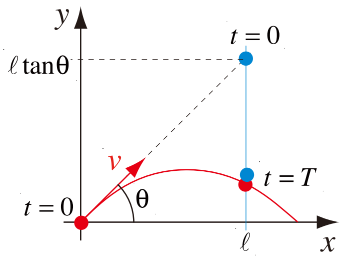
と書ける。また，物体の位置は

$$x_{●}(t)=v\cos\theta\times t, \quad y_{●}(t)=v\sin\theta\times t-\frac{1}{2}gt^2$$

となる。物体 ● の水平方向の位置が ℓ となる時刻は $T=\dfrac{\ell}{v\cos\theta}$ となり，物体 ● の垂直方向の位置は

$$y_{●}(T)=\ell\tan\theta-\frac{1}{2}g\left(\frac{\ell}{v\cos\theta}\right)^2$$

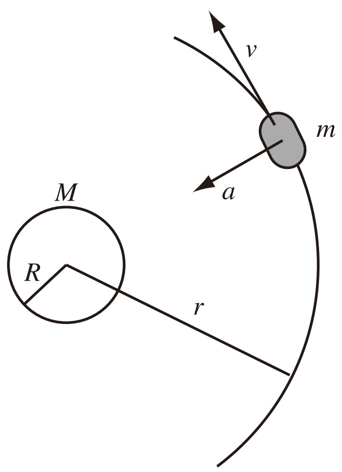
となる。この位置は時刻 T の標的 ● の位置と一致している。したがって，物体 ● と標的 ● は衝突する。



b) $y_{●}(T)=y_{●}(T)>0$ となるための条件を考えると

$$\ell\tan\theta-\frac{1}{2}g\left(\frac{\ell}{v\cos\theta}\right)^2>0 \quad\longrightarrow\quad v>\sqrt{\frac{g\ell}{\sin 2\theta}}$$

P17



P16 の月の運動と同じ議論が人工衛星についても成立するので、人工衛星が地球を一周するのにかかる時間 T'（周期）は

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{gR^2}}$$

と表すことができる。したがって、軌道半径を求めると

$$r=\sqrt[3]{\frac{T'^2gR^2}{(2\pi)^2}}$$

となる。人工衛星が静止衛星であるためには、人工衛星の周期 T' は地球の自転周期 T（1 日）と等しくなければならない。よって、数値を代入すると

$$r=\sqrt[3]{\frac{(24\times60^2)^2\times10\times(6.3\times10^6)^2}{(2\times3.14)^2}}=\sqrt[3]{75\times10^{21}}=4.2\times10^7\ \mathrm{m}$$

となる。

P22 1.

$$F=k\frac{qQ}{r^2}=9\times10^9\times\frac{(1.6\times10^{-19})^2}{(0.53\times10^{-10})^2}=8.2\times10^{-8}\ \mathrm{N}$$

2. 重力は $G\dfrac{m^2}{r^2}$ で、電気力は $k\dfrac{e^2}{r^2}$ なので、これらの力の比は

$$\frac{\text{重力}}{\text{電気力}}=\frac{G}{k}\left(\frac{m}{e}\right)^2=\frac{6.7\times10^{-11}}{9\times10^9}\left(\frac{9.1\times10^{-31}}{1.6\times10^{-19}}\right)^2=2.4\times10^{-43}$$

となる。電子間に働く重力は電気力に比べて極めて小さい。

P22 3.　図 3.1: 5 kg　図 3.2: 10 kg　図 3.3: 5 kg　図 3.4: $5\times\sin 30^\circ = 2.5$ kg

図3.1の場合と図3.3の場合について各部分に働いている力を矢印で示すと下図のようになっている。これらの図において同じ色の矢印は「作用・反作用の関係」となっていて、同じ大きさで逆向きである。（ただし、図3.3の場合については左右の同じ色の矢印は別の力を示している。）一般に、色違いの力の間に関係はない。これらの力について、各部分を順に考えることで検討してみる。

[図3.1の場合]　最初に、「おもり」には２種類の力　が働いている。この２つの力は「無関係」なので、一般には様々な大きさの関係であってよい。ただし、この問題の場合、すべての部分は静止しているので「おもり」も静止している。したがって、「おもり」に働く力のベクトル和はゼロとなっていなければならない。したがって、「「地球」が「おもり」におよぼす力」(黒矢印)と「「ひもA」が「おもり」におよぼす力」(緑矢印)の大きさが同じ(向きは逆)であることが分かる。つぎに、「「ひもA」が「おもり」におよぼす力」と「「おもり」が「ひもA」におよぼす力」は作用・反作用の法則によって同じ大きさである。さらに、「ひもA」は静止しているので、「「はかり」が「ひもA」におよぼす力」も同じ大きさでなければならない。

以上の考察を繰り返すとの, 「はかり」の両端は「おもりに働く重力」と同じ大きさの力で引っ張られていることが分かる。

[図3.3の場合]　滑車がはたす役割は少々考察が必要である。この件についてはもう少し先に進んでから詳細に検討しよう。この段階では「質量が無視できるひもの張力は一定である」ことを信じることにしよう。このことから、図中の力　と力　や　は同じ大きさとなる。滑車以外については図3.1の場合と同じ議論によって「はかり」の両端は「おもりに働く重力」と同じ大きさの力で引っ張られていることが分かる。

図 3.1 の場合、はかりの目盛は 5kg を示す。上の考察によって、はかりの両端は図 3.1 の場合でも図 3.3 の場合でも、両端は同じように引っ張られていることが分かる。したがって、図 3.3 の場合もはかりの目盛は 5kg を示していることになる。

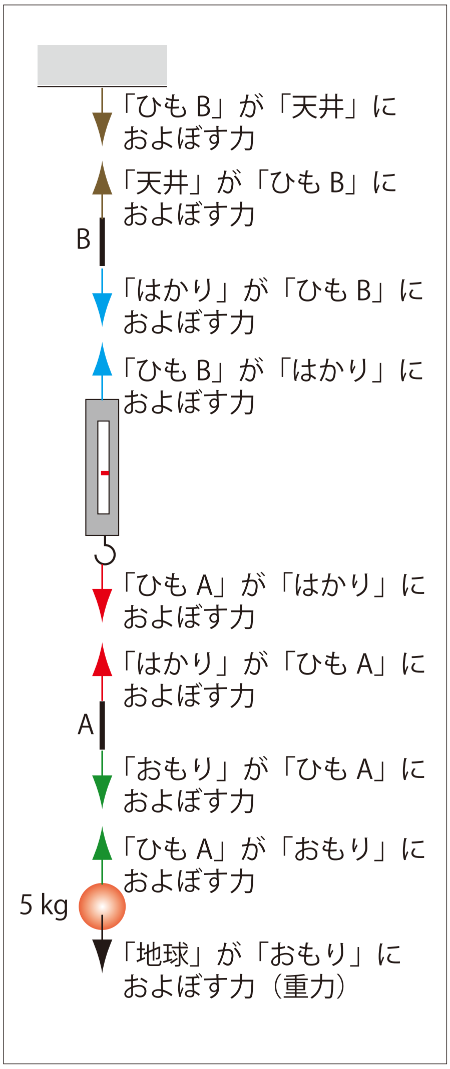


図3.1

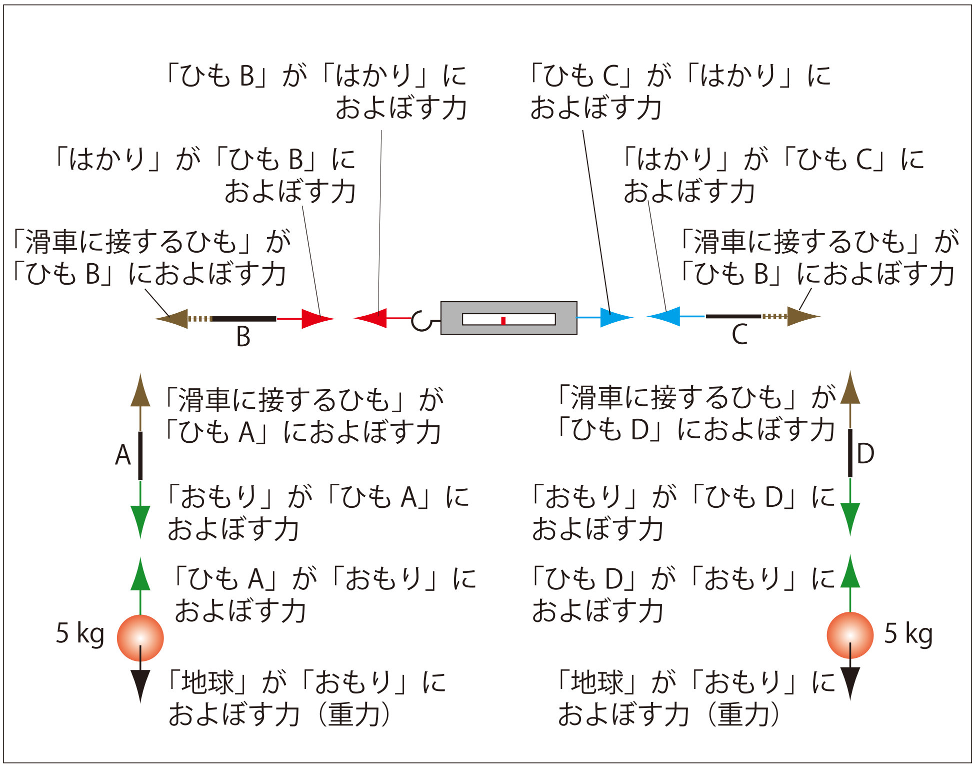
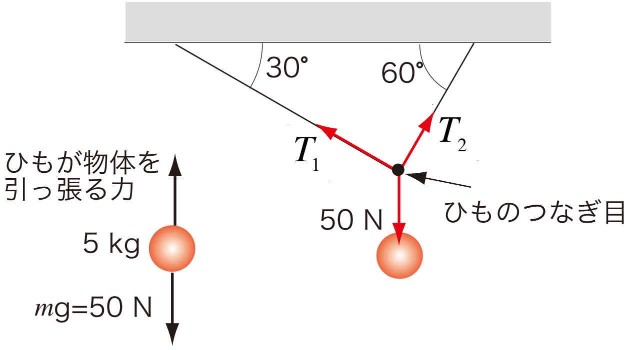
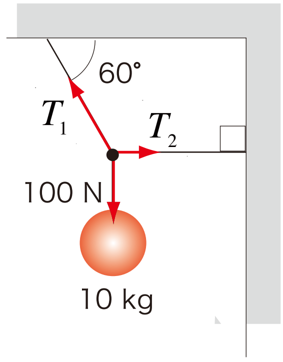


図3.3

P22 4.





ひものつなぎ目について力のつり合いを考えると

水平方向　$T_1 \cos 30^\circ = T_2 \cos 60^\circ$

垂直方向　$T_1 \sin 30^\circ + T_2 \sin 60^\circ = 50$

これより

$T_1 = 25$ [N]　$T_2 = 43.3$ [N]

ひものつなぎ目について力のつり合いを考えると

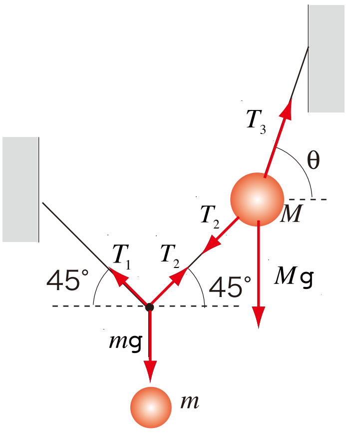
水平方向　$T_1 \cos 60^\circ = T_2$

垂直方向　$T_1 \sin 60^\circ = 100$

これより

$T_1 = 115.5$ [N]　$T_2 = 57.7$ [N]

P22 5.



ひもの両端で、張力の大きさは同じで向きが逆となることに注意する。
図中の　T_2 がその例である。

ひものつなぎ目について力のつり合いを考えると

水平方向　$T_1 \cos 45^\circ = T_2 \cos 45^\circ$　(1)

垂直方向　$T_1 \sin 45^\circ + T_2 \sin 45^\circ = mg$　(2)

質量 M の物体について力のつり合いを考えると

水平方向　$T_2 \cos 45^\circ = T_3 \cos\theta$　(3)

垂直方向　$T_2 \sin 45^\circ + Mg = T_3 \sin\theta$　(4)

(3) と (4) から

$$\tan\theta = \frac{T_3 \sin\theta}{T_3 \cos\theta} = \frac{T_2 \sin 45^\circ + Mg}{T_2 \cos 45^\circ} \quad (5)$$

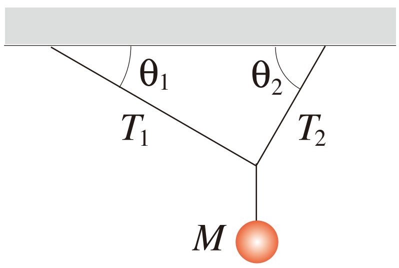
(1) と (2) から

$$T_1 = T_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} mg$$

これらを (5) に代入すると

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}mg + Mg}{\frac{1}{2}mg} = 1 + 2\frac{M}{m}$$

P22 6.



ひものつなぎ目について力のつり合いを考えると

水平方向　$T_1 \cos\theta_1 = T_2 \cos\theta_2$　(1)

垂直方向　$T_1 \sin\theta_1 + T_2 \sin\theta_2 = Mg$　(2)

(1) から

$$T_2 = \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} T_1$$

(2) に代入して

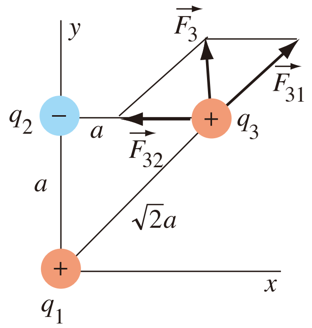
$$T_1 \left(\sin\theta_1 + \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} \sin\theta_2 \right) = Mg$$

三角関数についての関係　$\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2 = \sin(\theta_1 + \theta_2)$　を用いると

$$T_1 = \frac{\cos\theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} Mg \qquad T_2 = \frac{\cos\theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} Mg$$

問 4 の結果と比較してみよ

P22 7.



クーロンの法則から

$$\left|\vec{F}_{31}\right| = 9\times10^9 \times \frac{(5\times10^{-6})\times(5\times10^{-6})}{(\sqrt{2}\times0.1)^2} = 11.25\ [\mathrm{N}] \qquad \left|\vec{F}_{32}\right| = 9\times10^9 \times \frac{(5\times10^{-6})\times(2\times10^{-6})}{(0.1)^2} = 9\ [\mathrm{N}]$$

力ベクトルを成分表示で書くと

$$\vec{F}_{31} = \left(\left|\vec{F}_{31}\right|\cos45^\circ,\ \left|\vec{F}_{31}\right|\sin45^\circ\right) = (7.95\ ,\ 7.95)$$

$$\vec{F}_{32} = \left(-\left|\vec{F}_{32}\right|,\ 0\right) = (-9\ ,\ 0)$$

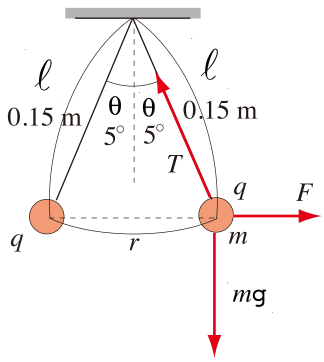
したがって、$+q_3$ が受ける力の合計は

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = (-1.05\ ,\ 7.95)$$

その力の大きさは

$$\left|\vec{F}_3\right| = \sqrt{1.05^2 + 7.95^2} = 8.02\ [\mathrm{N}]$$

P22 8.



物体に働く力は、電気力、重力、張力である。これらの力のつり合いの条件は

水平方向　$T\sin\theta = F$　　　垂直方向　$T\cos\theta = mg$

である。したがって

$$F = mg\tan\theta \qquad (1)$$

電気力の大きさは

$$F = k\frac{q^2}{r^2} \qquad (2)$$

なので、(1) と (2) から

$$q = \pm r \times \sqrt{\frac{mg}{k}\tan\theta}$$

を得る。また、$r = 2\ell\sin\theta$ なので

$$q = \pm2\ell\sin\theta \times \sqrt{\frac{mg}{k}\tan\theta} = \pm2\times0.15\times0.0871\times\sqrt{\frac{0.3}{9\times10^9}\times0.0875} = \pm4.5\times10^{-8}\ [\mathrm{C}]$$

P22 9.

力は X 方向だけので、分子２に働く力の X 成分のみをまとめると

・分子２の $+q$ には分子１の $+q$ から $+k\dfrac{q^2}{r^2}$　　・分子２の $+q$ には分子１の $-q$ から $-k\dfrac{q^2}{(r-d)^2}$

・分子２の $-q$ には分子１の $-q$ から $+k\dfrac{q^2}{r^2}$　　・分子２の $-q$ には分子１の $+q$ から $-k\dfrac{q^2}{(r+d)^2}$

の４つの力が働く。したがって、力の合計は

$$kq^2\left[\frac{2}{r^2} - \frac{1}{(r-d)^2} - \frac{1}{(r+d)^2}\right]$$

となる。ここで

$$\frac{1}{(r-d)^2} + \frac{1}{(r+d)^2} = \frac{2(r^2+d^2)}{(r^2-d^2)^2} = 2\left(\frac{1}{r^2} + \frac{d^2}{r^4}\right)\left[1 - \left(\frac{d}{r}\right)^2\right]^{-2}$$

と変形して、$r >> d$ の近似を使うと

$$\frac{1}{(r-d)^2} + \frac{1}{(r+d)^2} \cong 2\left(\frac{1}{r^2} + \frac{d^2}{r^4}\right)\left[1 + 2\left(\frac{d}{r}\right)^2\right] = \frac{2}{r^2} + 4\frac{d^2}{r^4} + 2\frac{d^2}{r^4} + 4\frac{d^4}{r^6}$$

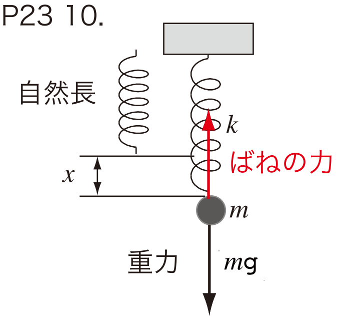
したがって、力の合計は

$$kq^2\left[\frac{2}{r^2} - \frac{1}{(r-d)^2} - \frac{1}{(r+d)^2}\right] \cong kq^2\left[\frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2} - 4\frac{d^2}{r^4} - 2\frac{d^2}{r^4} - 4\frac{d^4}{r^6}\right] = -6k\frac{(qd)^2}{r^4} - 4k\frac{q^2d^4}{r^6}$$

となる。ここで、$\dfrac{d^4}{r^6}$ は $\dfrac{d^2}{r^4}$ に比べて十分に小さいので、分子間力は

$$-6k\frac{(qd)^2}{r^4}$$

P23 10.



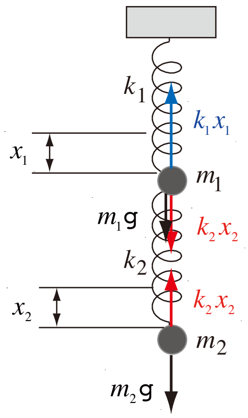
バネが伸びていないときの長さを「自然長」という。この長さに対して重りが x だけ降下しているとすると、バネの伸びは x となる。
図のように、伸びたバネにはもとへ戻る向きに力が発生するので、重りには上向きの力が働くことになる。この力と重りに働く重力がつり合うので

$$kx = mg$$

となり、バネの伸びは

$$x = \frac{mg}{k}$$

P23 11.



それぞれのバネが x_1 と x_2 だけ伸びているものとする。
重り m_2 に働く力はバネ k_2 が自然長へ戻ろうとする向きの力と重力である。
したがって、力のつり合いの条件から

$$x_2 = \frac{m_2 g}{k_2}$$

重り m_1 に働く力は重力とバネk_1と k_2 からの力がある。これらの力のつり合いの条件は

$$k_1x_1 = k_2x_2 + m_1 g$$

なので

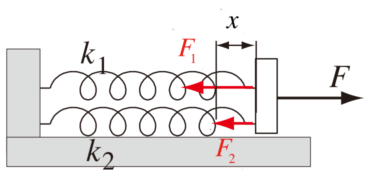
$$x_1 = \frac{k_2}{k_1}x_2 + \frac{m_1 g}{k_1} = \frac{(m_1 + m_2)g}{k_1}$$

であることが分かる。この結果は、バネ k_1 に重り m_1 と m_2 がぶら下がっていると考えると納得できるものである。
以上の結果から、重り m_2 は２本のバネが自然長であるときの位置から

$$x_1 + x_2 = \frac{m_2 g}{k_2} + \frac{(m_1 + m_2)g}{k_1} = \frac{m_1 g}{k_1} + \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)m_2 g$$

だけ降下していることが分かる。

P23 12.



２つのバネは同じだけ伸び縮みする。バネの端に力 F が働いて、x だけバネが伸びているとする。それぞれのバネに発生する力の大きさは

$$F_1 = k_1 x \qquad F_2 = k_2 x$$

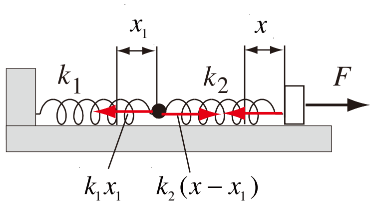
と表すことができる。したがって、バネの端での力のつり合いは

$$F = F_1 + F_2 = (k_1 + k_2)x$$

となり、バネは

$$x = \frac{F}{k_1 + k_2}$$

だけ伸びていることが分かる。以上のことからバネ定数 $k_1 + k_2$ の１本のバネに相当する。



バネの右端が x だけ伸び、k_1 のバネが x_1 だけ伸びているとすると、k_2 のバネは $x - x_1$ だけ伸びていることになる。
したがって、バネの右端での力のつり合いは

$$F = k_2(x - x_1)$$

で、バネのつなぎ目での力のつり合いは

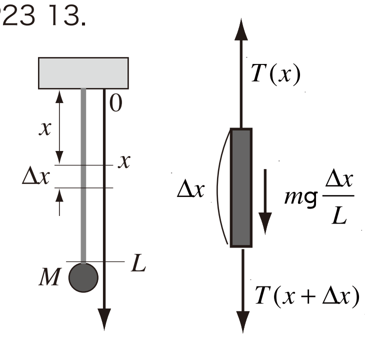
$$k_1x_1 = k_2(x - x_1)$$

となる。これらの関係から F と x の関係を求めると

$$x = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}F$$

であることが分かる。以上のことからバネ定数 $\dfrac{k_1k_2}{k_1 + k_2}$ の１本のバネに相当する。

P23 13.



(1) 上端からxの位置で、微小長さ Δx のひもの部分を考える。この部分がひもの上の部分によって引っ張られる力$T(x)$、ひもの下の部分によって引っ張られる力 $T(x+\Delta x)$、および、ひもの Δx の部分に働く重力がつり合うことになる。ひもの長さあたりの密度は m/L なので、Δx の部分に働く重力は

$$m\mathrm{g}\frac{\Delta x}{L}$$

となる。したがって、力のつり合いの条件は

$$T(x)=T(x+\Delta x)+\frac{m\mathrm{g}}{L}\Delta x \qquad (1)$$

であることが分かる。

(2) 式 (1) を変形すると

$$\frac{T(x+\Delta x)-T(x)}{\Delta x}=-\frac{m\mathrm{g}}{L}$$

となる。　　　　の極限をとると、微分の定義から

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{T(x+\Delta x)-T(x)}{\Delta x}=\frac{dT(x)}{dx}$$

となるので、ひもの位置に対する張力の変化を与える微分方程式

$$\frac{dT(x)}{dx}=-\frac{m\mathrm{g}}{L} \qquad (2)$$

を得ることができる。

(3) 式 (2) の両辺を$x\sim L$ の範囲で積分すると

$$\int_x^L\frac{dT(x)}{dx}dx=\int_x^L-\frac{m\mathrm{g}}{L}dx \longrightarrow T(L)-T(x)=-\frac{m\mathrm{g}}{L}(L-x)$$

となり、位置 x での張力は

$$T(x)=T(L)+m\mathrm{g}-\frac{m\mathrm{g}}{L}x$$

と表すことができる。ここで、ひもの下端には重りが付けられていて、そこでの張力は $T(L)=M\mathrm{g}$ となっている。したがって、張力は

$$T(x)=(M+m)\mathrm{g}-\frac{m\mathrm{g}}{L}x \qquad (3)$$

となる。この結果から、ひも上端 $x=0$ の位置では

$$T(0)=(M+m)\mathrm{g}$$

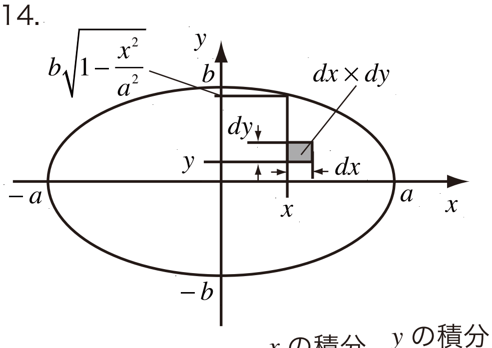
であることが分かる。この結果は、重りとひもに働く重力の合計が張力となっていると理解できる。

(4) 式 (3) において、ひもの質量を$m=0$ とすると、

$$T(x)=M\mathrm{g}$$

となって、張力は場所によらず一定となる。

P23 14.



x 方向の長さが a、y 方向の長さが b の楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

である。したがって、楕円内部の点の座標は、x 座標が x であるとき、y 座標は

$$-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\leqq y\leqq b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

の範囲となる。座標が (x,y) の付近で、微小面積 $dx\times dy$ を考えると、楕円の面積は、この微小面積を楕円内部について足し合わせたもの、すなわち、積分したものとなる。よって

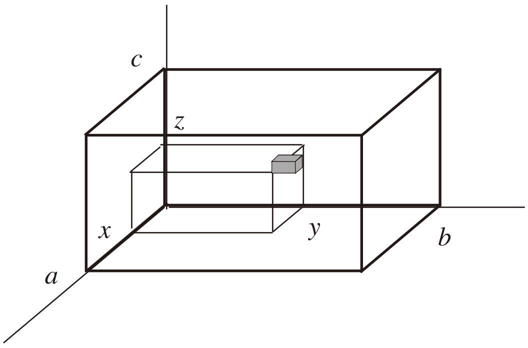
x の積分　y の積分

$$S=\int_{-a}^{a}\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}dxdy=\int_{-a}^{a}\left[y\right]_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}dx=\int_{-a}^{a}2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx$$

となることが分かる。x についての積分は $x=a\sin\theta$ と置換積分を行う。

$$\frac{dx}{d\theta}=a\cos\theta \qquad \begin{array}{c|cc} x & -a & a \\ \hline \theta & -\pi/2 & \pi/2 \end{array} \longrightarrow S=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}2b\cos\theta\times a\cos\theta\, d\theta=2ab\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\pi ab$$

P23 15.



図のように、辺の長さがそれぞれ a, b, c の直方体について考える。直方体内部に微小体積 $dx \times dy \times dz$ をとり、この体積を足し合わせる（積分する）と直方体の体積を求めることができる。

$$V = \int_0^a \int_0^b \int_0^c dxdydz = \int_0^a \int_0^b \left[z\right]_0^c dxdy = c\int_0^a \left[y\right]_0^b dx = abc$$

P23 16.

P20 〜 P21 の球の体積の計算において、$r=R$ として、r についての積分を行わない。　$S = 4\pi R^2$

P23 17.

P20 の質量m の物体が球外にある場合とほとんど同じであるが、r の積分範囲が球殻の内径 a から外径 b までになることと、 $z < a$ であることに注意する。

$$f = G\frac{mM}{V}\int_a^b \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{z - r\cos\theta}{\left[(z - r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2\right]^{3/2}} r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$$

θ についての積分は

$$I = \int_0^\pi \frac{z - r\cos\theta}{\left[(z - r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2\right]^{3/2}} \sin\theta d\theta \quad = \frac{1}{4rz^2}\int_{(z-r)^2}^{(z+r)^2} \left[(z^2 - r^2)t^{-3/2} + t^{-1/2}\right] dt$$

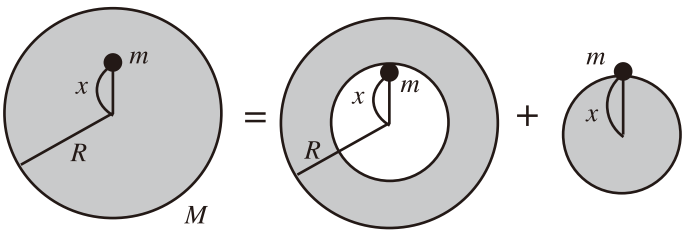
$$= \frac{1}{4rz^2}\left[-2(z^2 - r^2)\left\{\frac{1}{|z+r|} - \frac{1}{|z-r|}\right\} + 2\left\{|z+r| - |z-r|\right\}\right]$$

ここで、 $z < a$ なので

$$I = \frac{1}{4rz^2}\left[-2(z^2 - r^2)\left\{\frac{1}{z+r} + \frac{1}{z-r}\right\} + 2\left\{(z+r) + (z-r)\right\}\right] \quad = \frac{1}{4rz^2}\left[-2(z-r) - 2(z+r) + 2\left\{(z+r) + (z-r)\right\}\right] = 0$$

したがって、 $f = 0$ となる。

P23 18.



図のように、m が受ける重力は球殻の部分からの力と、半径 x の球からの力の合計であると考えられる。

□ 球殻の部分からの重力は、問 17 の結果からゼロであることが分かる。

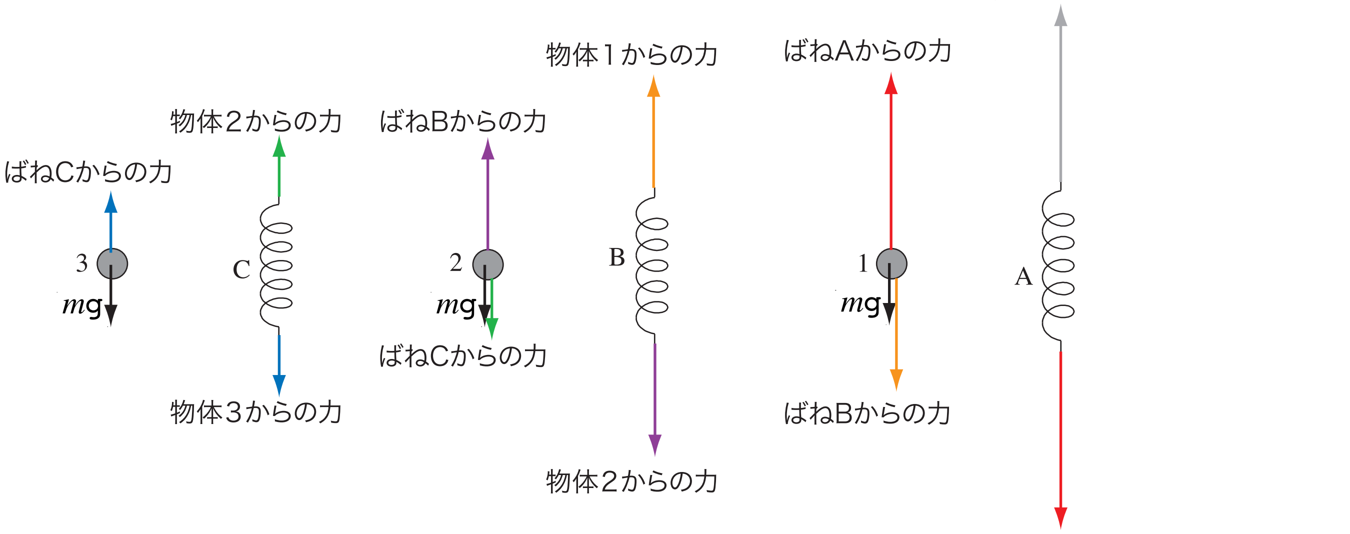
□ 半径 x の球の質量は

$$\frac{\frac{4\pi}{3}x^3}{\frac{4\pi}{3}R^3} \times M = M\left(\frac{x}{R}\right)^3$$

なので、質量 m の物体が受ける重力は

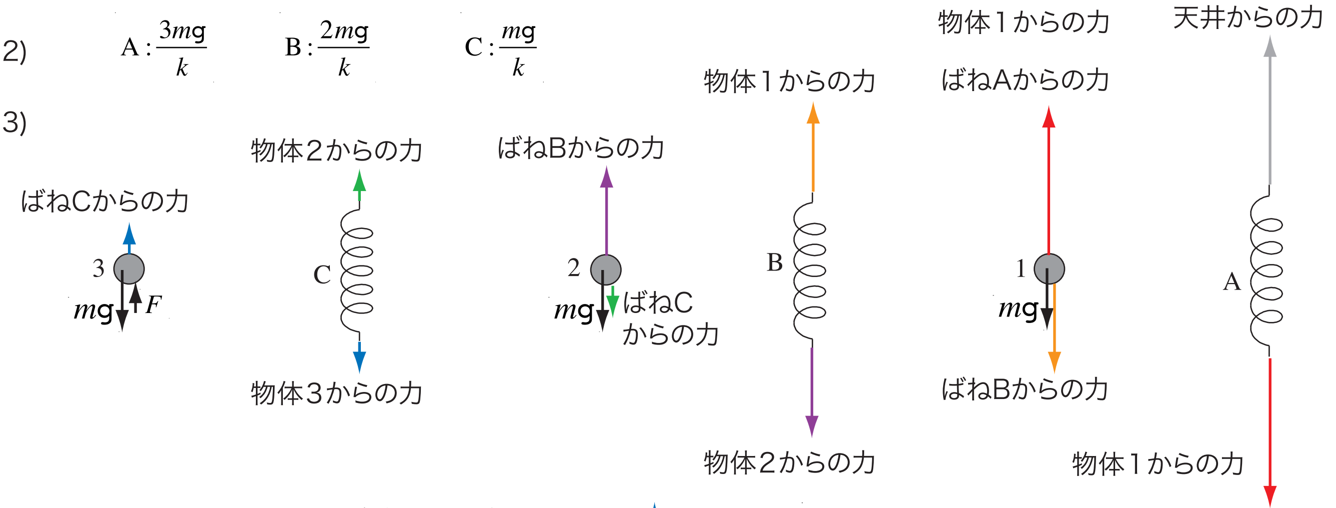
$$G\frac{M\left(\frac{x}{R}\right)^3 \times m}{x^2} = G\frac{Mm}{R^3}x$$

P28 1. 1) 同じ色の矢印は作用・反作用の関係にある。



2) $A:\dfrac{3mg}{k}$ $B:\dfrac{2mg}{k}$ $C:\dfrac{mg}{k}$

3)



4) 物体3に働く力のつり合いの条件から, ばねCからの力 ↑の大きさは $mg-F$ であることが分かる。したがって, ばねCは $mg-F$の力で引っ張られ, ばねBは $2mg-F$ の力で引っ張れ, ばねAは $3mg-F$ の力で引っ張れることが分かる。このことから, それぞれのばねが「縮む」ための条件は

$$A:3mg-F<0 \qquad B:2mg-F<0 \qquad C:mg-F<0$$

となる。つまり, すべてのばねが縮むためには $3mg-F<0$ の条件が成立すればよい。

5) それぞれのばねの「伸び」は

$$A:\frac{3mg-F}{k} \qquad B:\frac{2mg-F}{k} \qquad C:\frac{mg-F}{k}$$

であるから(伸びが負の値となる場合は, ばねが縮んでいることを意味する), 全体の伸びは $\dfrac{6mg-3F}{k}$ となる。3つのばね全体の長さが自然長の3倍である場合, 伸びの合計はゼロとなっている。したがって $F=2mg$ であればよい。

P28 2. 2) 問1)の結果から, 1つの動滑車には図1のような力が働くと考えればよい。したがって, おもりの重力とつり合わせるためには, 図2から $4T=4mg$であればよい。

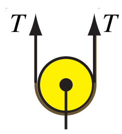


図1

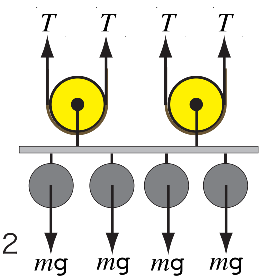


図2

3)図3の状態から図4の状態へとおもりの位置が x だけ上がったとする。図中の記号を使うと, 図3の場合について「ひも」の長さは

$$L=a+3b+c+4\smile$$

と書ける。また, 図4の場合は

$$L=a'+3b'+c+\ell+4\smile$$

となる。図3と図4の長さには $a'=a-x$ および $b'=b-x$ の関係があるので, Lの式に代入して整理すると $\ell=4x$ であることが分かる。

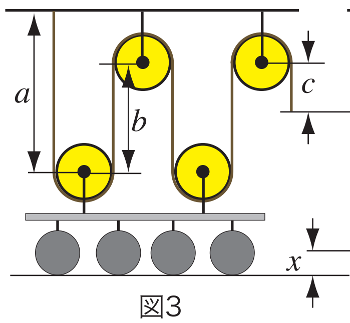


図3

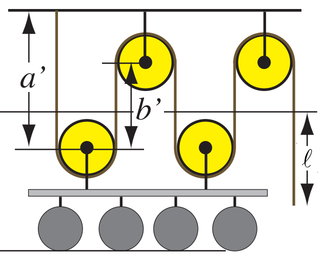


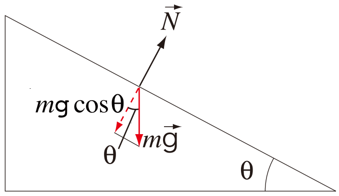
図4

P29 3.1) $m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}=N\sin\theta$ $\qquad$ $m\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}=N\cos\theta-mg$

2) 直線の方程式は $y=-\tan\theta\times x+h$ で、 $\tan\theta\times x(t)+y(t)=h$ となるので、両辺を t で 2 回微分すると

$$\tan\theta\times\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{d^2y(t)}{dt^2}=0$$

3) $\left(\dfrac{N}{m}\sin\theta\right)\times\tan\theta+\left(\dfrac{N}{m}\cos\theta-g\right)=0$ となるので $\dfrac{N}{m}\left(\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}+\cos\theta\right)=g$



よって $N=mg\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}\right)=mg\cos\theta$

重力 mg の斜面と垂直な成分が垂直抗力 N とつり合っている。

4) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}=g(\cos^2\theta-1)=-g\sin^2\theta$ より $y(t)=h-\dfrac{1}{2}g\sin^2\theta\times t^2$ となり

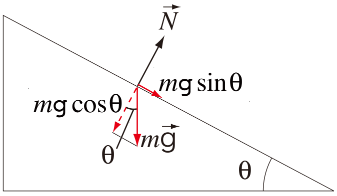
$y(t)=0$ となる時刻は $t=\dfrac{1}{\sin\theta}\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

5) $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}=g\sin\theta\cos\theta$ より $v_x(t)=g\sin\theta\cos\theta\times t\ =\cos\theta\sqrt{2gh}$

$\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}=-g\sin^2\theta$ より $v_y(t)=-g\sin^2\theta\times t\ =-\sin\theta\sqrt{2gh}$

よって $v=\sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2}=\sqrt{2gh}$

P29 4.



斜面と垂直な方向については、垂直抗力 N と重力の成分 $mg\cos\theta$ がつり合っている。したがって、斜面方向の運動は重力の成分 $mg\sin\theta$ によって起こる。

運動方程式は $m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}=mg\sin\theta$ となるので

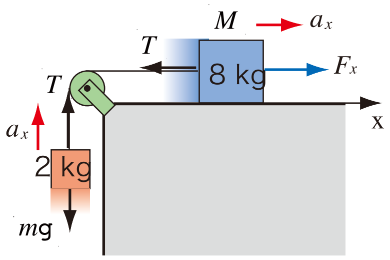
$$v(t)=g\sin\theta\times t \qquad x(t)=\frac{1}{2}g\sin\theta\times t^2$$

となる。

斜面の下に到達する時刻は $x(t)=\dfrac{h}{\sin\theta}$ の条件から $t=\dfrac{1}{\sin\theta}\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ となり、そのときの速度は

$$g\sin\theta\times\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{2gh}$$

P29 5.



1) m=2kg の物体の運動方程式は、上向きを正として

$$ma_x=T-mg \qquad (1)$$

M=8kg の物体の運動方程式は、右向きを正として

$$Ma_x=F_x-T \qquad (2)$$

となる。ここで、P23 問 13 で調べたように、ひもの質量が無視できるときは、張力 T はひものすべての場所で同じである。また、両物体はひもでつながっているので、加速度（速度も）は同じ大きさとなる。（なぜか？）

式 (1) と (2) から張力 T を消去すると

$$(M+m)a_x=F_x-mg$$

となり、$a_x>0$ であるためには、$F_x>mg$ であることが必要であることが分かる。

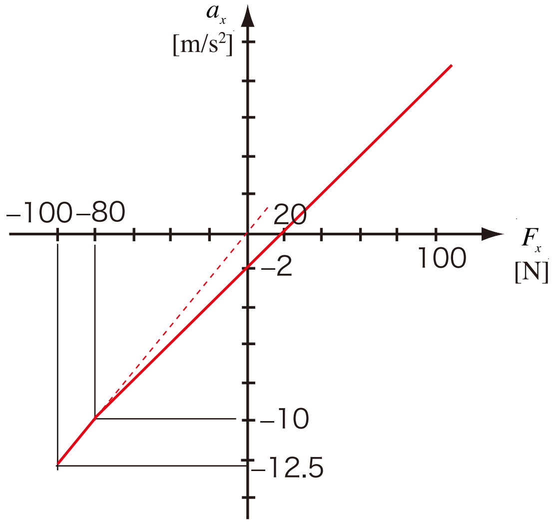
P29 5.　2) 運動方程式 (1) と (2) からa_x　を消去すると

$$M(T-mg)=m(F_x-T) \quad \rightarrow \quad T=\frac{m}{m+M}(F_x+Mg) \qquad (3)$$

よって、T=0 となるためには、$F_x=-Mg$ であればよい。

T=0 となると、m は自由落下することになり、m は加速度 g で運動する。このとき、M は加速度 g で左へ運動する。M の加速度が左向きにさらに大きくなると、ひもはたるんで、m は自由落下をする。

したがって、$F_x \leqq -Mg$ のとき T=0 となる。



3) T>0 の場合（$F_x > -Mg$ ）、式 (1) より

$$a_x=\frac{1}{m}T-g$$

である。これに式 (3) を代入すると

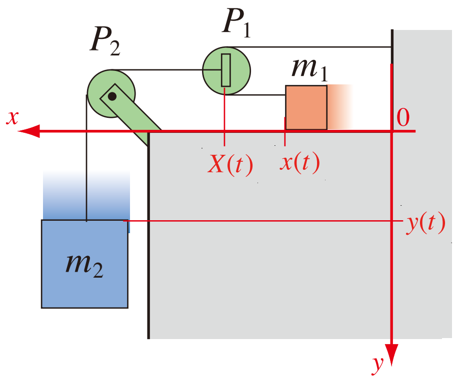
$$a_x=\frac{1}{m+M}F_x-\frac{m}{m+M}g=\frac{1}{10}F_x-2$$

であることが分かる。

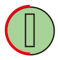
T=0 の場合（$F_x \leqq -Mg$ ）、力 F_x　は M の運動のみに関係することになるので

$$a_x=\frac{1}{M}F_x=\frac{1}{8}F_x$$

P29 6.



1) 図のように座標を設定する。壁を原点として、m_1 の位置を$x(t)$ 、動滑車の中心の位置を $X(t)$とする。このとき、動滑車に巻き付いているひもの長さは

$$X(t)+(X(t)-x(t))+$$  ＝ 一定

なので、両辺の時間微分をとると、

$$2\frac{d^2X(t)}{dt^2}=\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

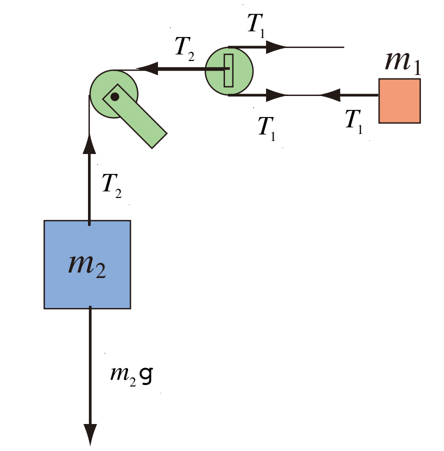
という関係を得る。ここで，m_1 の加速度を a_1、 m_2の加速度を a_2 とすると、

$$a_1=\frac{d^2x(t)}{dt^2} \qquad a_2=\frac{d^2y(t)}{dt^2}=\frac{d^2X(t)}{dt^2}$$

の関係がある。したがって

$$a_1=2a_2$$

となる。



2) 3) 物体と滑車に働く力は左図のようになる。したがって、運動方程式は

$$m_1: \quad m_1a_1=T_1$$
$$m_2: \quad m_2a_2=m_2g-T_2$$

となり、滑車の質量は無視できるので

$$T_2=2T_1$$

の関係がある。

これらの関係と 1) の結果を用いると

$$T_1=\frac{2m_1m_2}{4m_1+m_2}g, \quad T_2=\frac{4m_1m_2}{4m_1+m_2}g$$

$$a_1=\frac{2m_2}{4m_1+m_2}g, \quad a_2=\frac{m_2}{4m_1+m_2}g$$

P29 7. 1) h=3 m として、 $h=\frac{1}{2}gt^2,\ v=gt$ であるから $v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\times10\times3}=7.746$ m/s

2) 減速の加速度の大きさをa 、停止するまでにかかる時間を t とすると

$$v-at=0 \qquad vt-\frac{1}{2}at^2=h=0.6$$

なので、

$$a=\frac{v^2}{2h}=\frac{7.746^2}{2\times0.6}$$

となる。胴体の質量を m=40 kg とすると、運動方程式から

$$F=ma=40\times\frac{7.746^2}{2\times0.6}=2000\ \mathrm{N}$$

の力が胴体に働く必要があることが分かる。胴体には重力も働いているので、足が胴体に及ぼす力は

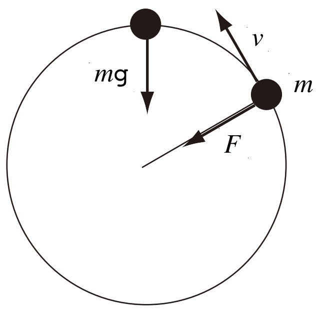
$$2000+40\times10=2400\ \mathrm{N}$$

となる。

3) 2) より $t=\frac{v}{a}=\frac{2\times0.6}{7.7}=0.16$ 秒

4) 足の半径を 10 cm として、断面の半分が筋肉だとすると $3\times10^5\times\pi\times(0.1)^2\times\frac{1}{2}=4712$ N

P30 8.



質量 m の物体が一定の速さ v で半径 r の円軌道をまわるためには、中心方向の力

$$F=m\frac{v^2}{r}$$

が働く必要がある。円の最上点において

$$mg>m\frac{v^2}{r}$$

となっていると、物体は円運動に必要な力以上に下向きに引かれることになるので、落下してしまう。したがって

$$\frac{v^2}{r}>g$$

の条件が満たされていればよい。ここで $v=\frac{2\pi r}{T}$ の関係を用いると

$$\frac{1}{T}>\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{r}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10}{0.5}}=0.7\ \ 1/\mathrm{s}$$

となり、１秒間で 0.7 回転以上であればよい。

P30 9. １） $\frac{30000\times300000\times10^3\times2\times\pi}{250\times10^3}=\frac{9\times10^9\times2\times\pi}{250}=2.26\times10^8$ 年　　２億 2600 万年

２） 天の川銀河の質量を M 、太陽の質量を m とすると、太陽が速さ v で半径 r の円運動をするためには

$$m\frac{v^2}{r}=G\frac{mM}{r^2}$$

が成立するので、

$$M=\frac{rv^2}{G}=\frac{3\times10^4\times3\times10^8\times365\times24\times60\times60\times(250\times10^3)^2}{6.673\times10^{-11}}=2.66\times10^{41}\ \mathrm{kg}$$

３） $\frac{2.66\times10^{41}}{2\times10^{30}}=1.33\times10^{11}$ 個　　1330 億個

P30 10. １）３つの球はすべて同じ加速度a で動く。したがって $9[\mathrm{N}]-3\times0.2\times g=3\times0.2\times a \ \rightarrow\ a=5\ \mathrm{m/s^2}$

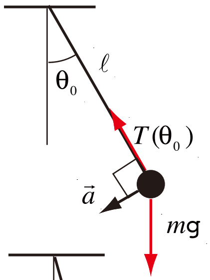
２）C についての運動方程式 $0.2a=S_{BC}-0.2\times g\ \rightarrow\ S_{BC}=3$ [N]

B についての運動方程式 $0.2a=S_{AB}-S_{BC}-0.2\times g\ \rightarrow\ S_{AB}=6$ [N]

A についての運動方程式 $0.2a=F-S_{AB}-0.2\times g\ \rightarrow\ F=9$ [N]

３）手で持っているひもの張力が 9[N] となり最も大きいので、手と A の間のひもが最初に切れる。

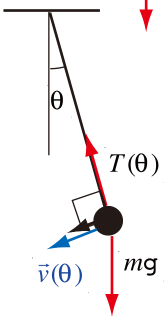
P30 11.



1）ひもが伸び縮みしないと、ひもの方向に物体は動かないので、ひもの方向の力の総和はゼロとなっている。したがって、

$$T(\theta_0) = mg\cos\theta_0$$

2）合力はひもに対して垂直な向きとなり、ひもに対して垂直な向きの加速度で動き始める。



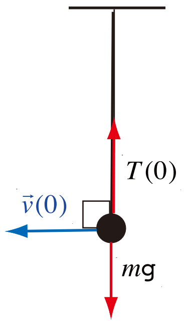
3）物体はゼロでない速度 $v(\theta)$ を持って運動している。この瞬間、物体は速度 $v(\theta)$ で半径の円運動をしているので、中心方向を向いた力 $m\dfrac{v(\theta)^2}{\ell}$ が働いている。したがって、ひもの張力は

$$T(\theta) = mg\cos\theta + m\frac{v(\theta)^2}{\ell}$$

となる。また、ひもに対して垂直な向きには重力による力

$$mg\sin\theta$$

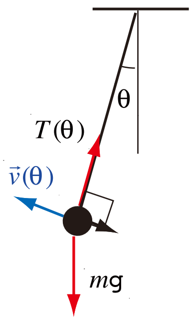
が働いており、さらに加速を続けることになる。加速度は θ_0 のときよりも小さくなっている。



4）物体は最大の速度 $v(0)$ で水平方向に運動している。3）と同様にひもの方向の力の合計は $m\dfrac{v(0)^2}{\ell}$ となるので、張力は

$$T(0) = mg + m\frac{v(0)^2}{\ell}$$

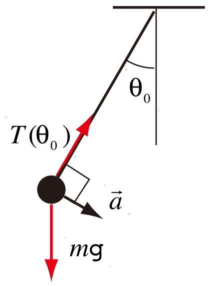
となる。また、ひもと垂直な向きの力はゼロなので、加速度もゼロである。



5）物体は最下点を通過したのち、減速運動をする。張力の大きさは3）と同じであるが、ひもと垂直な向きに生じる加速度と速度が逆向きとなる。

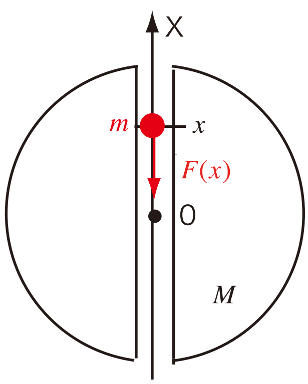
6）C における力の様子は 1）と同様である。

7）C において物体は一瞬停止する。物体に働く力の合計はひもと垂直な向きだけである。物体は再び最下点に向かって加速度運動を開始する。



P30 12.

この問題は 1.10 振動を学習してから考えた方が理解しやすい。



P23 の問 18 で調べたように、中心から距離 x の場所に物体があるときに、物体に働く重力は

$$F(x) = G\frac{Mm}{R^3}x$$

となる。図のように座標をとると、運動方程式は

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -G\frac{Mm}{R^3}x(t)$$

となり、バネの運動と同じ式となっている。$t=0$ で $x(0)=R$ の場所から落下させたので

$$x(t) = R\cos\left(\sqrt{\frac{GM}{R^3}}t\right)$$

のようになることが分かる。（運動方程式に代入してみよ）

この振動の周期 T は

$$\sqrt{\frac{GM}{R^3}}T = 2\pi \quad\rightarrow\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

となり、地球の反対側には $\dfrac{T}{2}$ の時間で到達する。$g = G\dfrac{M}{R^2}$ の関係を使うと

$$\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} = \pi\sqrt{\frac{6.3\times10^6}{10}} = 2494 \text{ 秒} \qquad 42\text{分}$$

P32 1. ストークスの法則（P31）$F = 6\pi r\eta v$ 　より , 水の粘性率を1×10^{-3} $\mathrm{N\cdot s/m^2}$ 　とすると

$$F = 6\pi \times 0.5\times 10^{-6} \times 10^{-3} \times 10^{-5} = 9.4\times 10^{-14}\ \mathrm{N}$$

P32 2. 角度について１分とは 1/60 度のことを表す。（６０進法）

$$1\text{ ノット} = \frac{4\times 10^7}{360\times 60^3} = 0.514\ \mathrm{m/s}$$

抵抗力を kv^2 と書くと , 10 ノットの時 , 20000 N となるので

$$2\times 10^4 = k\times(10\times 0.514)^2 \qquad \to k = 7.57\times 10^2\ \mathrm{N\cdot s^2/m^2}$$

であることが分かる。時刻 $t = 0$ において $v_0 = 12$ ノットでエンジンを止めると , 以降は , 抵抗力だけが働くことになる。したがって , 運動方程式は

$$m\frac{dv(t)}{dt} = -k\times v(t)^2$$

となる。$v(t)$ を求めるためには

$$\int_0^t \frac{1}{v(t)^2}\frac{dv(t)}{dt}dt = \int_0^t -\frac{k}{m}dt$$

$$\left[-\frac{1}{v}\right]_{v_0}^{v(t)} \qquad -\frac{k}{m}t$$

とすればよく ,

$$\frac{1}{v(t)} - \frac{1}{v_0} = \frac{k}{m}t$$

となることが分かる。このことから $v(t) = \dfrac{1}{2}v_0$ となるまでの時間は

$$t = \frac{m}{k}\left(\frac{2}{v_0} - \frac{1}{v_0}\right) = \frac{m}{kv_0}$$

であることが分かる。したがって

$$\frac{m}{kv_0} = \frac{300\times 10^3}{7.57\times 10^3\times 12\times 0.514} = 64.3\ \text{秒}$$

となる。移動距離については

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) = \frac{m}{k}\frac{1}{t + \dfrac{m}{v_0 k}}$$

と書けるので ,

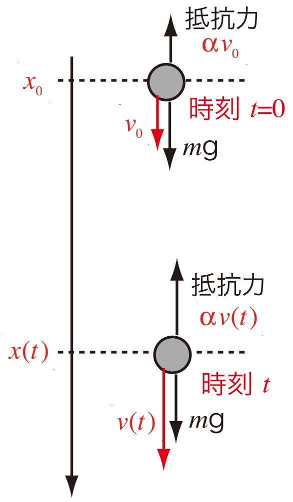
$$\int_0^t \frac{dx(t)}{dt}dt = \int_0^t \frac{m}{k}\frac{1}{t + \dfrac{m}{v_0 k}}dt$$

$$x(t) \qquad \left[\frac{m}{k}\log_e\left(t + \frac{m}{v_0 k}\right)\right]_0^t$$

となり , 　$t = \dfrac{m}{v_0 k}$ 　を用いると

$$x(t) = \frac{m}{k}\left[\log_e\left(\frac{m}{v_0 k} + \frac{m}{v_0 k}\right) - \log_e\left(\frac{m}{v_0 k}\right)\right] = \frac{m}{k}\log_e 2 = \frac{3\times 10^5}{7.57\times 10^2}\times 0.693 = 275\ \mathrm{m}$$

P32 3. 右図のように座標の正の向きを下向きにとる。



物体は，時刻ゼロにおいて速度がv_0で運動を開始するものとする。

$v_0 < 0$ の場合は上向きに投げ上げられることを意味する。

時刻 t における速度を$v(t)$ と書くと（$v(t) < 0$ の場合が含まれてもよい），物体に働く抵抗力は $-\alpha v(t)$ と表すことができる。マイナスの符号は，速度の向きと抵抗力の向きが逆であることを意味している。物体は下向きの重力との抵抗力（速度と逆向き）を受けるので，運動方程式は

$$m\frac{dv(t)}{dt} = mg - \alpha v(t) \qquad (1)$$

となる。両辺を$m\left(v(t) - \frac{mg}{\alpha}\right)$で割ると（これで割ると式がきれいに整理できるから）

$$\frac{1}{v(t) - \frac{mg}{\alpha}}\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{\alpha}{m} \qquad (2)$$

と整理することができる。ここで，$v(t) = \frac{mg}{\alpha}$ の場合はこの割り算はできないので，別途考慮する必要がある。

まず，$v(t) \neq \frac{mg}{\alpha}$ として議論を進める。式 (2) の両辺を時刻 t で 0 から t まで積分すると

$$\int_0^t \frac{1}{v(t) - \frac{mg}{\alpha}}\frac{dv(t)}{dt}\,dt = \int_0^t -\frac{\alpha}{m}\,dt \qquad (3)$$

の関係が成立する。式 (3) の左辺の積分は $v = v(t)$ とする置換積分によって実行することができる。

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv(t)}{dt} \qquad \text{より} \qquad dv = \frac{dv(t)}{dt}dt$$

t	0	t
v	v_0	$v(t)$

よって，式 (3) は

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{1}{v - \frac{mg}{\alpha}}\,dv = -\frac{\alpha}{m}t \qquad (4)$$

となる。ここで，積分公式 $\int \frac{1}{x+a}dx = \log_e|x+a|$ を用いると，式 (4) は

$$\left[\log_e\left|v - \frac{mg}{\alpha}\right|\right]_{v_0}^{v(t)} = \log_e\left|v(t) - \frac{mg}{\alpha}\right| - \log_e\left|v_0 - \frac{mg}{\alpha}\right| = \log_e\left(\frac{\left|v(t) - \frac{mg}{\alpha}\right|}{\left|v_0 - \frac{mg}{\alpha}\right|}\right) = -\frac{\alpha}{m}t$$

と計算することができて，

$$\left|v(t) - \frac{mg}{\alpha}\right| = \left|v_0 - \frac{mg}{\alpha}\right| \times e^{-\frac{\alpha}{m}t} \qquad (5)$$

を得る。絶対値記号を外すためには，$v(t) > \frac{mg}{\alpha}$ と $v(t) < \frac{mg}{\alpha}$ の場合分けを考えればよい。

□ $v(t) > \frac{mg}{\alpha}$ の場合

この場合，時刻ゼロの速度についても $v(0) = v_0 > \frac{mg}{\alpha}$ が満たされるはずなので，式 (5) から

$$v(t) - \frac{mg}{\alpha} = \left(v_0 - \frac{mg}{\alpha}\right) \times e^{-\frac{\alpha}{m}t} \qquad \text{となり} \qquad \boxed{v(t) = \frac{mg}{\alpha} + \left(v_0 - \frac{mg}{\alpha}\right) \times e^{-\frac{\alpha}{m}t}}$$

□ $v(t) < \frac{mg}{\alpha}$ の場合

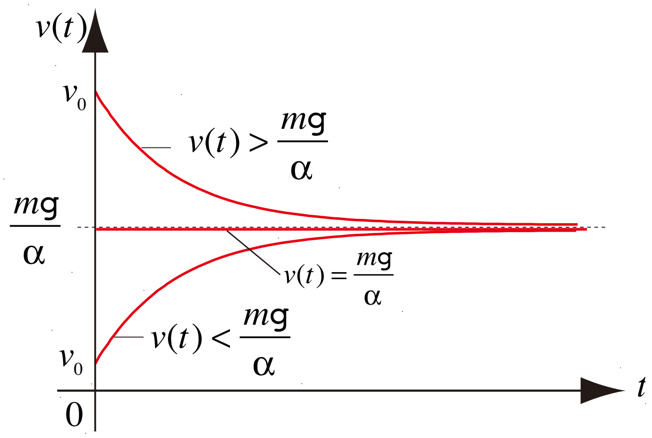
この場合，時刻ゼロの速度についても $v(0) = v_0 < \frac{mg}{\alpha}$ が満たされるはずなので，式 (5) から

$$-\left(v(t) - \frac{mg}{\alpha}\right) = -\left(v_0 - \frac{mg}{\alpha}\right) \times e^{-\frac{\alpha}{m}t} \qquad \text{となり} \qquad \boxed{v(t) = \frac{mg}{\alpha} + \left(v_0 - \frac{mg}{\alpha}\right) \times e^{-\frac{\alpha}{m}t}}$$

□ $v(t) = \frac{mg}{\alpha}$ の場合

この場合，式 (1) から式 (2) への変形ができない。式 (1) の両辺に $v(t) = \frac{mg}{\alpha}$ を代入してみると，式 (1) がみたされていることが分かる。つまり $v_0 = \frac{mg}{\alpha}$ で運動を開始すると，抵抗力を重力がつりあっているので，以降，等速運動を続けることになる。結局，この場合も $\boxed{v(t) = \frac{mg}{\alpha} + \left(v_0 - \frac{mg}{\alpha}\right) \times e^{-\frac{\alpha}{m}t}}$ とまとめることができる。

P32 3. のつづき



P32 4. (1) a: $\frac{\mathrm{N \cdot s}}{\mathrm{m \cdot m}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m \cdot s}}$ b: $\frac{\mathrm{N \cdot s^2}}{\mathrm{m^2 \cdot m^2}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}$

(2) 下向きを正の向きとして $\frac{4\pi}{3}\rho r^3 \frac{dv(t)}{dt} = \frac{4\pi}{3}\rho r^3 g - arv(t) - br^2 v(t)^2$

(3) 一定の速度となった時は，水滴の加速度 $\frac{dv(t)}{dt}$ はゼロなので

$$br^2v^2 + arv - \frac{4\pi}{3}\rho r^3 g = 0$$

となる。したがって

$$v = \frac{-ar + \sqrt{(ar)^2 + \frac{16\pi}{3}\rho r^5 gb}}{2br^2} = \frac{-a + \sqrt{a^2 + \frac{16\pi}{3}\rho r^3 gb}}{2br}$$

(4) (3) の $\sqrt{\ }$ の中に現れた量を計算しておくと

r	a^2	$\frac{16\pi}{3}\rho r^3 gb$
10μm	9×10^{-8}	1.5×10^{-10}
100μm	9×10^{-8}	1.5×10^{-7}
1mm	9×10^{-8}	1.5×10^{-4}

となっている。(3) の結果を用いて v を求めると

r	10μm	100μm	1mm
v	0.014 m/s	1.1 m/s	6.8 m/s

(5) 抵抗力 arv だけを考えた場合，終速度は

$$v = \frac{\frac{4}{3}\pi\rho r^3 g}{ar} = \frac{4\pi\rho r^2 g}{3a}$$

となる。(4) の計算結果を調べてみると，10μm の場合 $a^2 >> \frac{16\pi}{3}\rho r^3 gb$ なので，a 項のみでよさそうである。上の式を用いて終速度を求めると

$$v = \frac{4\pi\times10^3\times\left(10^{-5}\right)^2\times10}{3\times3\times10^{-4}} = 0.014\ \mathrm{m/s}$$

となり，(4) の結果と一致している。

抵抗力が br^2v^2 の場合，終速度は

$$v = \sqrt{\frac{4\pi\rho r g}{3b}}$$

と書ける。1mm の場合を計算してみれば

$$v = \sqrt{\frac{4\pi\times10^3\times10^{-3}\times10}{3\times0.9}} = 6.8\ \mathrm{m/s}$$

となる。これも (4) の結果と一致している。したがって，$a^2 \simeq \frac{16\pi}{3}\rho r^3 gb$ であるような場合，すなわち，r=100μm 程度のときは，両方の抵抗力を考えなければならない。

P32 5. P31 の結果を用いると

$$v(t)=\frac{mg}{\alpha}\left(1-e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right)$$

となる。終速度は $\frac{mg}{\alpha}$ なので

$$\frac{mg}{\alpha}=5\times10^{-2}\ \text{m/s}$$

であることが分かる。したがって，
終速度の 90% に到達する時刻は

$$0.9\times\frac{mg}{\alpha}=\frac{mg}{\alpha}\left(1-e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right)$$

より

$$t=-\frac{m}{\alpha}\log_e(0.1)=-\frac{5\times10^{-2}}{10}\times(-2.3025)=0.012\ 秒$$

P32 6. 抵抗力をαv とすると，終速度は

$$v_0=\frac{mg}{\alpha}=50\ \text{m/s}\quad\rightarrow\frac{\alpha}{m}=\frac{10}{50}=0.2$$

である。

（1）運動方程式は

$$ma(t)=mg-\alpha v(t)$$

なので，$v(t)=30$ となったときの加速度は

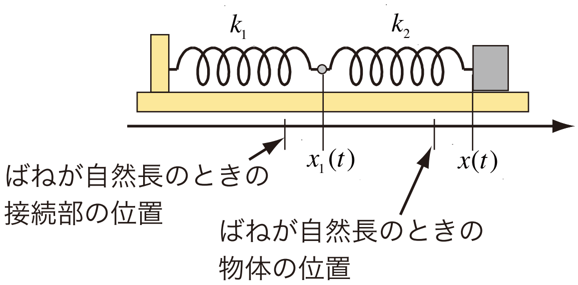
$$g-\frac{\alpha}{m}v(t)=10-0.2\times30=4\ \text{m/s}^2$$

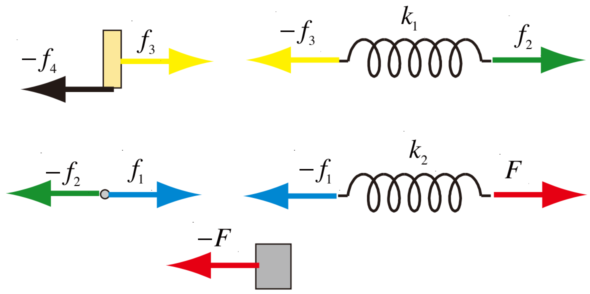
（2） $\alpha v(t)=0.2\times80\times50=800\ \text{N}$

（3） $\alpha v(t)=0.2\times80\times30=480\ \text{N}$

P39 1. P30 問 12（解答例 P18）参照

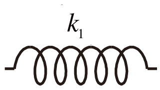
2. (1) 物体の位置が右へずれている場合について以下に説明する。（左へずれている場合について各自考えてみよ。）





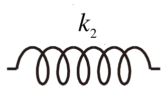
色が同じ矢印は作用・反作用の関係
それぞれの力について記号 F, f_1, f_2, f_3, f_4 を付ける

□  は静止しているので $f_3-f_4=0$

□ 

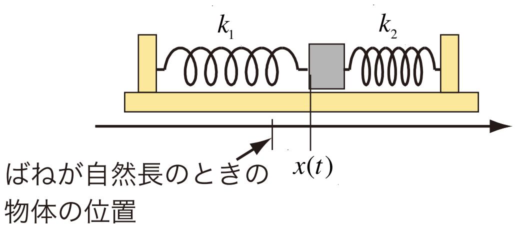
の質量を m_1 とすると，運動方程式は $f_2-f_3=m_1a_1$ と書ける。ここで a_1 はばねの加速度。
問題文に書いていないが（すみません），ばねの質量が無視できる場合（$m_1=0$）は $f_2-f_3=0$ となる。

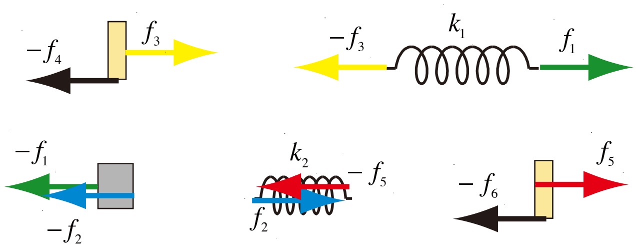
□ ∘ の質量が無視できるとすると，ばね k_1 の議論と同様にして $f_1-f_2=0$ となる。

□ 

の質量が無視できるとすると，ばね k_1 の議論と同様にして $F-f_1=0$ となる。

□ したがって，ばねと接続部の質量が無視できる場合は $F=f_1=f_2=f_3=f_4$

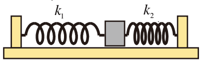




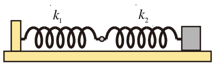
ばねの質量が無視できる場合は，$f_1=f_3=f_4, f_2=f_5=f_6$ となる。物体に働く２つの力は $f_1\neq f_2$

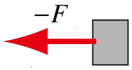
P39 2. (2) ２つの場合について共通に，ばね k_1 の伸びを $x_1(t)$，ばね k_2 の伸びを $x_2(t)$ と書く。
また，ばねが自然長のときを原点として，物体の位置を $x(t)$ とする。

２つのばねの伸びを足したものが，物体の位置の変化となるので $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$



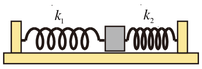
ばね k_1 が $x_1(t)$だけ伸びると，物体の位置は $x_1(t)$だけ右へ移動しているので $x(t)=x_1(t)$。
物体が $x(t)$だけ右へ移動するとばね k_2 は $x(t)$ だけ縮んでいるので $x(t)=-x_2(t)$ 。
したがって $x(t)=x_1(t)=-x_2(t)$ が成り立つ。

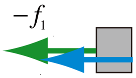
(3) 

物体に働く力は $-F$  で，ばね k_2 が物体におよぼす力なので $-F=-k_2x_2(t)$ となる。
また，これはばね k_1 の力と同じなので $-F=-k_1x_1(t)=-k_2x_2(t)$ となる。
さらに，(2) の結果 $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$ と $k_1x_1(t)=k_2x_2(t)$ を用いると

$$-F=-\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}x(t)$$

であることが分かる。



$-f_1$

$-f_2$

物体は，ばね k_1 から力 $-f_1$ を受け，ばね k_2 から力 $-f_2$ を受ける。それぞれの力は
$-f_1=-k_1x_1(t)$ と $-f_2=k_2x_2(t)$（図の場合は $x_2(t)<0$ であることに注意）なので，
物体が受ける力の合計は

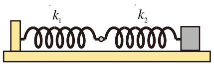
$$-f_1-f_2=-k_1x_1(t)+k_2x_2(t)$$

となる。ここで，$x(t)=x_1(t)$ と $x(t)=-x_2(t)$ を使うと

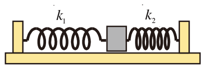
$$-f_1-f_2=-(k_1+k_2)x(t)$$

と表すことができる。

(4) (3) の結果から，運動方程式は



$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}x(t)$$



$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-(k_1+k_2)x(t)$$

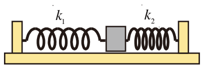
となる。一般に微分方程式

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-c\times x(t) \qquad (\ c \text{ は定数で，} c>0\ )$$

の解は $x(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$ のように表すことができる。すなわち，$x(t)$の２階微分 $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$が $x(t)$ に比例していて，比例定数が負であれば，単振動を表している。

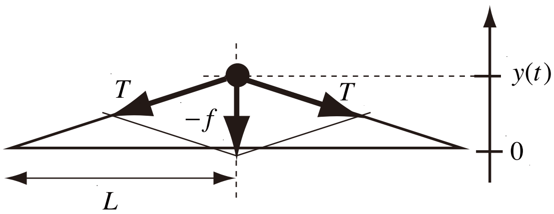
(5) 運動方程式が $m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-k\ x(t)$ である場合の単振動の周期は $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ である。(4) の運動方程式について考えると

$$T=2\pi\sqrt{\frac{(k_1+k_2)m}{k_1k_2}}$$



$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$$

3. (1) 問題文に書いてあるように，物体の位置の変化がわずかである場合は，ゴム糸の張力は変化しないと（近似）する。



左図のように物体が水平の位置からずれると，張力の向きが斜め方向となり，両側のゴムによる張力の合力 $-f$ は物体を水平の位置に戻す向きに働くことが分かる。また，合力は

$$-f=-2\frac{y}{\sqrt{L^2+y^2}}T=-2T\frac{y}{L}\left[1+\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

となることが分かる。

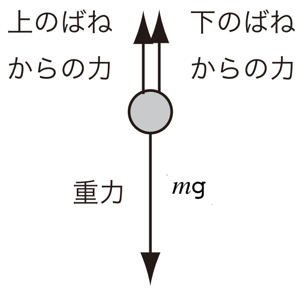
ここで，$L>>y$ なので $\left[1+\left(\frac{y}{L}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\simeq 1$ と近似すると，物体に働く力は $-f\simeq -2T\frac{y}{L}$ となる。

P39 3. (2) 物体の運動方程式は

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} \simeq -\frac{2T}{L}y(t)$$

となるので , 単振動である。周期は $T = 2\pi\sqrt{\frac{mL}{2T}}$

4. (1)

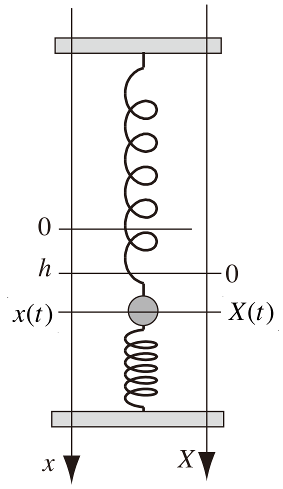


上のばねは h だけ伸びているので , 大きさ $k\times h$ の力を物体におよぼす。
下のばねは h だけ縮んでいるので , 大きさ $k\times h$ の力を物体におよぼす。
すなわち , 2つのばねから合計 $2k\times h$ の大きさで上向きの力が働く。

(2) (1) の状況で , 物体に働く力はつり合っているので ,

$$mg = 2k\times h$$

が成立する。



(3) 右図のように物体の位置が $x(t)$ となったとき , 物体がばねから受ける力は
大きさが $2k\times x(t)$ で上向きとなる。物体には重力も働いているので ,
物体に働く力の合計は（符号を付けて）$mg - 2k\times x(t)$ となる。したがって ,
運動方程式は

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = mg - 2k\times x(t)$$

となる。

(4) 右図のように , 物体のつり合いの位置を原点とするような座標 X を考える。
この座標での物体の位置を $X(t)$ と書くと , もとの座標 $x(t)$ とのあいだには

$$x(t) = X(t) + h$$

の関係が成立する。この関係式の両辺を時刻 t で 2 回微分すると $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d^2X(t)}{dt^2}$ となる。
したがって , (3) の運動方程式は

$$m\frac{d^2X(t)}{dt^2} = mg - 2k\times\left(X(t)+h\right)$$

と書き直すことができる。ところで , (2) の結果から $mg = 2k\times h$ が成り立つので , 運動方程式は

$$m\frac{d^2X(t)}{dt^2} = -2k\times X(t)$$

となり , 物体はつり合いの位置の上下で単振動をすることが分かる。

(5) (4) の X についての運動方程式の解は

$$X(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\times t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\times t\right)$$

と表すことができる。X についての初期条件は

$$X(0) = x_0 \qquad \left.\frac{dX(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

なので , $A = x_0$, $B = 0$ であることが分かる。2つの座標の関係 $x(t) = X(t) + h$ から

$$x(t) = x_0\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\times t\right) + h$$

となる。

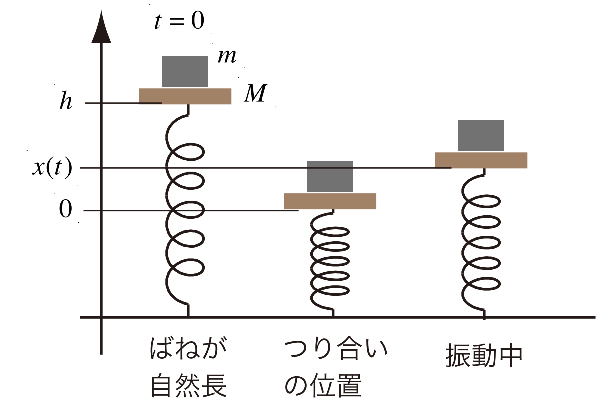
(6) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$

P40 5. (1) $\sin\theta(t)$　(2) $\cos\theta(t)$　(3) $\theta(t)$　(4) 1　(5) $\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$

(6) 0　(7) $-f(t)\times\sin\theta(t)$　(8) $-f(t)\times\cos\theta(t) + mg$　(9) $-f(t)\times\theta(t)$　(10) $-f(t)+mg$

(11) mg　(12) $-\frac{g}{L}$　(13) $2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

P40 6.



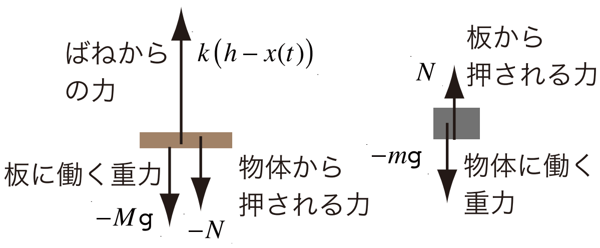
物体 (m) と板 (M) をばねに乗せたとき , ばねが h だけ縮んでつり合ったとすると

$$k\times h=(m+M)\mathrm{g} \qquad (1)$$

が成立する。この位置を座標の原点として , 上向きを正の向きとする。

振動中について , 板の位置がつり合いの位置から $x(t)$ だけ上方あるときを考えると , ばねは $h-x(t)$ だけ縮んでいるので , ばねの力は上向きで ,$k\big(h-x(t)\big)$ の大きさとなる。また , 物体が板から押される力（垂直抗力）を N とすると , 板はその反作用 $-N$ の力を受ける。

以上のことをまとめて , 板と物体に働く力の様子を描くと左図のようになる。



物体と板が離れずに運動しているときは , 同じ加速度 a を持つことになるので , 板と物体の運動方程式は

$$\text{板：}Ma=-M\mathrm{g}+k\big(h-x(t)\big)-N \qquad \text{物体：}\ ma=-m\mathrm{g}+N$$

となる。この２つの式から N を消去（右辺，左辺をそれぞれ足す）すると

$$(M+m)a=-(M+m)\mathrm{g}+k(h-x(t))$$

を得る。これに (1) の条件を使うと

$$(M+m)a=-k\times x(t)$$

となって，単振動であることが分かる。時刻 $t=0$ で $x(0)=h$ から振動を開始すると，

$$x(t)=h\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M+m}}\times t\right)$$

と表すことができる。この振動の周期は

$$T=2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$$

である。また，物体の運動方程式から，垂直抗力を求めると

$$N=m\mathrm{g}+ma=m\mathrm{g}\ -mh\times\frac{k}{M+m}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M+m}}\times t\right)$$

となる。この垂直抗力が最も小さくなるのは , cos( ) が 1 をなる瞬間で $t=0,T,2T,\cdots$ である。したがって，

$$N\geq m\mathrm{g}-mh\times\frac{k}{M+m}=m\mathrm{g}-mh\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

物体が板から離れていないときは，$N\geq 0$ のはずなので，

$$m\mathrm{g}-mh\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\geq 0 \qquad h\leq \mathrm{g}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2=9.8\times\left(\frac{1.2}{2\pi}\right)^2=0.36\ [\mathrm{m}]$$

であればよいことが分かる。

P40 7. P38 の式 (1.10.51) において , $\alpha=0$ とすると , 強制振動の振幅は

$$\frac{1}{\left|\dfrac{k}{m}-\omega_0{}^2\right|}\frac{F}{m}$$

となる。この振幅が $2\mathrm{cm}=2\times10^{-2}\,\mathrm{m}$ で ,

$$\frac{k}{m}=\frac{200}{4}=50,\quad \omega_0=2\pi\times10$$

を用いると

$$F=2\times10^{-2}\times4\times\left|50-(2\pi\times10)^2\right|=311\ [\mathrm{N}]$$

P43 1. (a) $\dfrac{18}{5} = 3.6\ \mathrm{m/s^2}$　　(b) ゼロ

(c) 車内：物体に働いている慣性力とバネの力がつり合っている。
　車外：バネからの力を受けて，物体は加速度運動をしている。

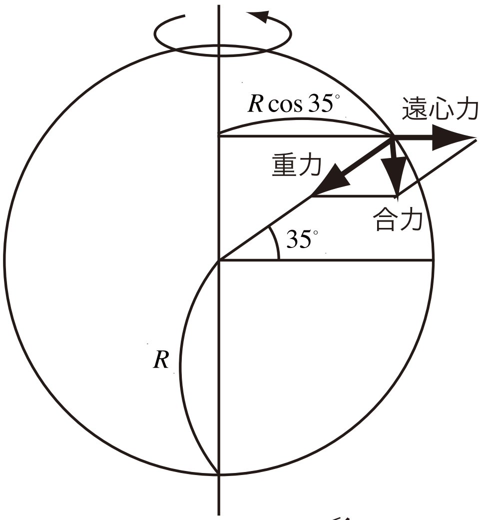
2. 人の質量を m, エレベータの加速度を a, 重力加速度を g とすると

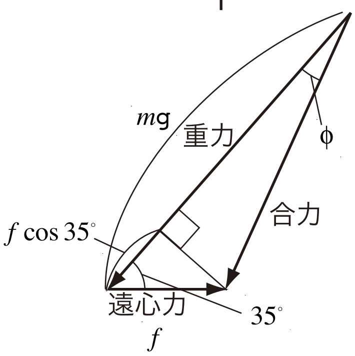
加速中：　$m\mathrm{g} + ma = 591$

減速中：　$m\mathrm{g} - ma = 391$

という関係が成り立つ。 $\mathrm{g}=10\ \mathrm{m/s^2}$ として，これらの連立方程式を解くと (a) m=49.1 kg　(b) $a = 2\ \mathrm{m/s^2}$

3.





地球の半径を R, 自転の周期を T とすると，北緯 35°の場所での自転の速さは

$$v = \frac{2\pi R\cos 35^\circ}{T}$$

となる。よって，その場所にある質量 m の物体に働く遠心力は

$$f = m\frac{v^2}{R\cos 35^\circ} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R\cos 35^\circ \qquad (1)$$

の大きさとなる。遠心力と重力の向きは，左上図のようになっていて，物体は，これらの力の合力を受けることになる。

　力の関係を拡大して描くと左下図のようになる。合力は地球の中心方向からずれることになるが，このずれの角度は図中に示した角度 ϕ となる。したがって

$$\tan\phi = \frac{f\sin 35^\circ}{m\mathrm{g} - f\cos 35^\circ} \qquad (2)$$

であることが分かる。数値を求めるために

$$T = 24\times 60\times 60\ \mathrm{s},\ \ R = 6.3\times 10^6\ \mathrm{m},\ \ g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$$

$$\cos 35^\circ = 0.819,\ \ \sin 35^\circ = 0.574$$

を用いると，式 (1) から

$$f = m\times 2.73\times 10^{-2}$$

となる。これを式 (2) に代入すると

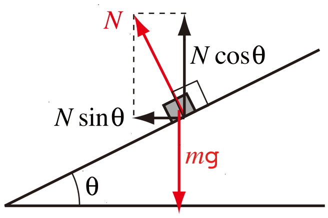
$$\tan\phi = \frac{m\times 2.73\times 10^{-2}\times 0.574}{m\times 9.8 - m\times 2.73\times 10^{-2}\times 0.819} = 0.0016$$

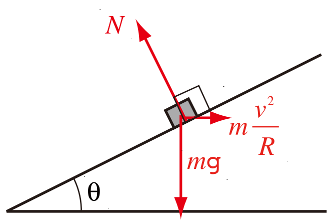
この結果から角度 ϕ はとても小さいことが予想される。角度が十分に小さい場合， $\tan\phi \cong \phi$ という近似が成り立つので，

$$\phi = 0.0016\ \mathrm{rad}$$

となる。関数電卓で正確に計算しても結果は同じである。

4.





[地面に固定された座標系]　物体には重力と斜面からの垂直抗力が働いている。垂直抗力の鉛直方向成分と重力はつり合っているので

$$m\mathrm{g} = N\cos\theta \qquad (1)$$

となる。また，列車が円軌道をまわるために必要な内向きの力（向心力）は垂直抗力の水平成分なので，列車の速さを v, 円軌道の半径を R とすると，列車の運動方程式は

$$m\frac{v^2}{R} = N\sin\theta = m\mathrm{g}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad (2)$$

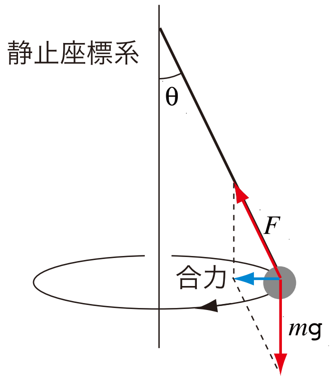
となる。したがって，列車の速さは

$$v = \sqrt{gR\tan\theta} = \sqrt{10\times 400\times 0.1051} = 20.5[\mathrm{m/s}] = 74[\mathrm{km/h}]$$

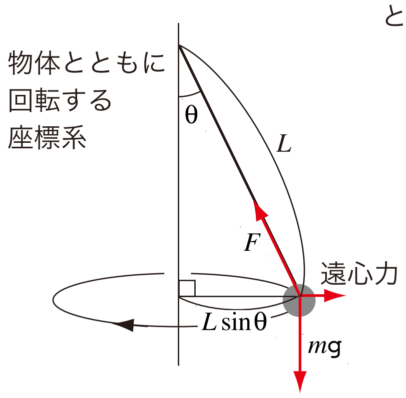
となる。

[列車とともに動く座標系] この場合は，列車に遠心力 $m\dfrac{v^2}{R}$ が働き，重力，垂直抗力遠心力がつり合うことになる。つり合いの条件は式 (1) と (2) と同じである。

P43 5.



静止座標系（地面に立って見ている人）で考えると，物体には重力とひもの張力が働いている。物体は円運動をしているので，円の中心へ向いた力（向心力）が存在することが分かる。したがって，重力と張力のベクトル和（合力）は円の中心方向となる。このように考えると，問４と同様な議論ができる。



物体とともに回転する座標系（物体の上に乗っている人）で考えると，物体には重力，張力のほかに遠心力が働いていることになる。この場合，物体が静止するための条件（力のつり合い）を考えればよい。ひもの長さを L とすると，円軌道の半径は $L\sin\theta$ となる。円運動の周期を T とすると，物体の速さは

$$v = \frac{2\pi L\sin\theta}{T}$$

と書けるので，遠心力の大きさは

$$m\frac{v^2}{L\sin\theta} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 L\sin\theta$$

であることが分かる。したがって，力のつり合いの条件は

水平方向： $F\sin\theta = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 L\sin\theta$

鉛直方向： $F\cos\theta = mg$

鉛直方向のつり合いの条件から，ひもの張力は

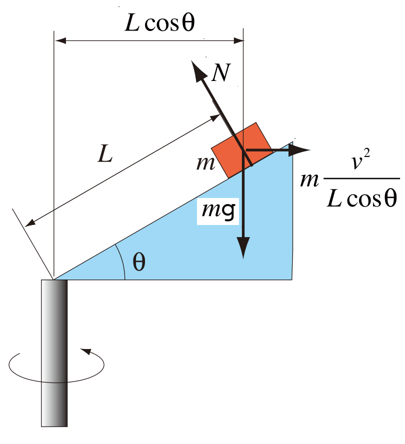
$$F = \frac{mg}{\cos\theta} = \frac{80\times 10}{0.9962} = 803[\mathrm{N}]$$

となる。水平方向のつり合いの条件から，周期を求めることができて

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mL}{F}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}\cos\theta} = 2\pi\sqrt{\frac{10}{10}\times 0.9962} = 6.3\ [\text{秒}]$$

となる。

6.



問５と同様に，物体とともに回転する座標系で考えると，重力，垂直抗力および遠心力のつり合いを考えればよい。軸のまわりを回転する物体の速さを v とすると，力のつり合いの条件は

水平方向： $N\sin\theta = m\frac{v^2}{L\cos\theta}$

鉛直方向： $N\cos\theta = mg$

となる。２つの式を用いて N を消去すると

$$m\frac{v^2}{L\cos\theta} = mg\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

より

$$v = \sqrt{gL\sin\theta}$$

を得る。

7. ヘリウム風船が浮くのは，重力を受けている空気に対する浮力が原因である。空気よりも密度の大きい物は下に落ちて，密度の小さい物は上へ浮くことになる。質量 m の物体に働く重力の大きさは，重力加速度を g として，mg である。
問題としている慣性力は横向きに働く力であるが，すべての物体に共通に働いて，列車の加速度を a とすると，質量 m の物体には ma の慣性力が働くことになる。すなわち，重力加速度 g の記号を列車の加速度a と読み替えれば，あたかも横向きに重力が働いていると考えることができる。このような状況でも，浮力は発生するはずなので，ヘリウム風船は横向きに慣性力が働いている空気の中で浮くことになる。

P43 8.(a) 問 7 と同様で , 空気が溶液に変わったと考えればよい。

(b) 回転の周期は $\dfrac{1}{\dfrac{7\times10^4}{60}}$ [s] なので , 円運動の速さは $v=\dfrac{2\pi\times0.1}{\dfrac{60}{7\times10^4}}=733$ [m/s] となる。

したがって , 質量 m の粒子に働く遠心力 $m\dfrac{v^2}{r}$ と重力 mg の比は

$$\frac{\dfrac{v^2}{r}}{g}=\frac{\dfrac{733^2}{0.1}}{10}=5.4\times10^5$$

P49 1. グラフの線と横軸で囲まれる面積が仕事である。ただし , 符号が付くことに注意。

(a) $\dfrac{1}{2}\times6\times8=24$ J (b) $-\dfrac{1}{2}\times3\times2=-3$ J (c) $-\dfrac{1}{2}\times3\times2=-3$ J

2. 最初 , A 点で物体が持っていた位置エネルギーは $5[\mathrm{kg}]\times10[\mathrm{m/s^2}]\times5[\mathrm{m}]=250[\mathrm{J}]$

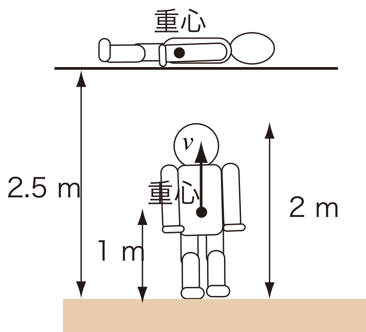
(a) B 点の位置エネルギーは $5[\mathrm{kg}]\times10[\mathrm{m/s^2}]\times3.2[\mathrm{m}]=160[\mathrm{J}]$ 。位置エネルギーの差が運動エネルギーとなるので

$$\frac{1}{2}mv^2=U_A-U_B \qquad v=\sqrt{\frac{2\times(250-160)}{5}}=6\ [\mathrm{m/s}]$$

C 点の位置エネルギーは $5[\mathrm{kg}]\times10[\mathrm{m/s^2}]\times2[\mathrm{m}]=100[\mathrm{J}]$。したがって

$$v=\sqrt{\frac{2\times(250-100)}{5}}=7.7\ [\mathrm{m/s}]$$

(b) A 点と C 点の位置エネルギーの差 150 J

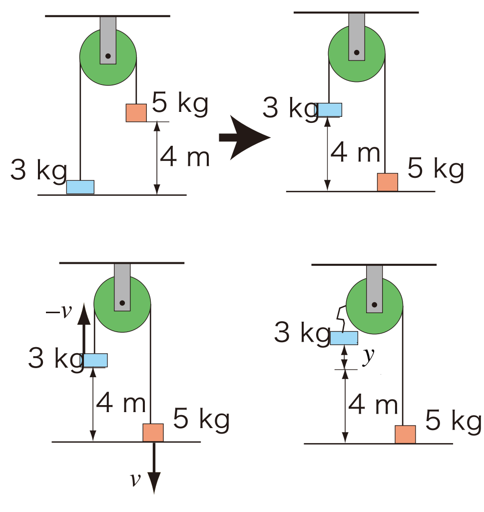


3. 重心については , 次の章で議論するが , 大きさのある物体の運動は , 重心にすべての質量が集まっていると考えればよい。人間の体の重心はへその位置で , ほぼ体の中央である。したがって , 身長 2 m の選手がジャンプする直前の重心の位置は , 地面から 1 m の高さであると考えられる。この重心が高さ 2.5 m まで上昇するのだから

$$\frac{1}{2}mv^2=mg(2.5-1)$$

より

$$v=\sqrt{2\times10\times1.5}=5.5\ [\mathrm{m/s}]$$



4. (a) 5kg の物体の位置エネルギーは $5\times10\times4=200$ J 減って ,

3Kg の物体の位置エネルギーは $3\times10\times4=120$ J 増える。

5Kg の物体が地面に達したときの速度を v とすると ,

そのとき 3Kg の物体は $-v$ の速度を持つことになる。

したがって , エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}\times5\times v^2+\frac{1}{2}\times3\times(-v)^2=200-120$$

が成立するので

$$v=\sqrt{\frac{2\times80}{8}}=\sqrt{20}=4.5\ [\mathrm{m/s}]$$

(b) 5Kg の物体は地面に激突して止まってしまう。このとき , 5Kg の物体が持っていた運動エネルギーは熱エネルギーなどに変換されて外界へと放出される。

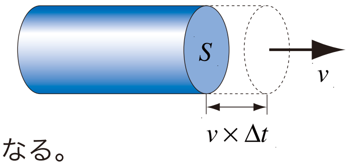
3Kg の物体は 4.5 m/s の速度を持って鉛直方向へと上昇していく。

4 m の位置からさらに y [m] だけ上昇したとすると , エネルギー保存則から

$$\frac{1}{2}\times3\times v^2=3\times g\times y$$

が成立するので , $y=1$ mとなり , 合計 1 m + 4 m = 5 m の高さに到達することが分かる。

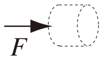
P49 5.  が到達するまで空気  の部分は静止していた。



 が通過すると空気  の部分は押されて  と同じ速さとなる。

したがって，空気  の部分の運動エネルギーは $\frac{1}{2}\Delta m \times v^2$ だけ増加することになる。

ここで，Δm は空気  の部分の質量で $\Delta m = \rho S v \times \Delta t$ と表すことができる。

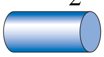
 が空気  の部分を力 F で押しているとすると，この力 F は空気  に対して仕事 $F \times v \times \Delta t$

をすることになる。したがって，エネルギー保存則より

$$F \times v \times \Delta t = \frac{1}{2}\Delta m \times v^2 = \frac{1}{2}\rho S v \times \Delta t \times v^2$$

の関係が成立することになり，空気  は大きさ

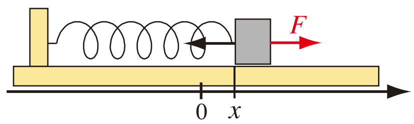
$$F = \frac{1}{2}\rho S \times v^2$$

の力で押されることが分かる。空気は  によって押されるので， は空気が押される力の反作用による力を受けることになる。したがって，空気抵抗による力の大きさは

$$F = \frac{1}{2}\rho S \times v^2$$

であることが分かる。

P50 6. (a) ばねを伸ばすためには，ばねが縮もうとする力に対して反対向きに力を加える（図の赤い矢印）ことになる。外部から加える力 F の大きさが，ばねの力より大きければ，ばねは伸びることになる。



しかし，ばねの力より大きな力を加えると，ばねに取り付けられた物体は加速度運動をすることになり，物体は運動エネルギーを獲得する。つまり，外部から加える力は物体の運動エネルギーだけ余分に仕事をすることになる。したがって，ばねを伸ばすために必要な仕事は，ばねの力と同じ大きさの力がする仕事を求めることになる。力がつり合っていたら物体は動かないじゃない！と心配になるならば，最初コツンと物体を蹴飛ばして速度を与えればよい。ばねの力と外部からの力はつり合っているので，物体は最初の速度（運動エネルギー）を維持したまま移動していくことになる。物体の運動エネルギーは変化しないのだから，外部の力がした仕事は，ばねを伸ばすために費やされたエネルギーとなる。

具体的な計算には，仕事の式 $\int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ を用いる。図のように座標をとれば，微小ベクトルは

$$d\vec{r} = (dx, 0)$$

で（x 座標しかないと分かりにくいので，常にゼロであるが y 座標も書いておく），外部の力は

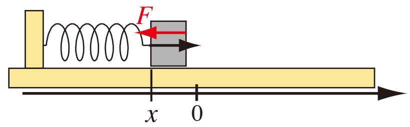
$$\vec{F}(\vec{r}) = (kx, 0)$$

と書ける。移動は $0 \sim x$ まで行われるので，仕事は

$$\int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^x kx\ dx = \frac{1}{2}kx^2$$

となる。

(b) ばねを縮めると，物体の位置は $x < 0$ となり，ばねからは正の方向（図中の黒い矢印）の力が働く。(a) の説明と同様に，ばねの力と同じ大きさの力を外部から加えてばねを縮ませるための仕事を求める。



外部から加える力は

$$\vec{F}(\vec{r}) = (kx, 0)$$

と表すことができる。ここで $x < 0$ であるから，力は負の向きとなっている。微小ベクトルは (a) と同様に

$$d\vec{r} = (dx, 0)$$

で，移動は $0 \sim x$ の範囲である。したがって，力がする仕事は，(a) とまったく同様に

$$\int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^x kx\ dx = \frac{1}{2}kx^2$$

となる。

P50 6.(c) どんな単振動でも同じ結果となるが , P34 の式 (1.10.11) で表される振動

$$x(t)=x_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\times t\right)$$

について考えてみる。このとき , 物体の速度は位置を時刻 t で微分して

$$v(t)=-x_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\times t\right)$$

となる。物体の運動エネルギーは $\frac{1}{2}mv(t)^2$ で , (b) の結果から , ばねの持つ位置エネルギーは $\frac{1}{2}kx(t)^2$ なので ,

エネルギーの合計は

$$\frac{1}{2}kx(t)^2+\frac{1}{2}mv(t)^2=\frac{1}{2}k\left(x_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\times t\right)\right)^2+\frac{1}{2}m\left(-x_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\times t\right)\right)^2=\frac{1}{2}kx_0{}^2$$

となり , 一定であることが分かる。

(d)　P37 式 (1.10.43) から , 抵抗力が働いている減衰振動は

$$x(t)=x_0e^{-at}\cos(\omega t)\qquad \text{ただし}\qquad a=\frac{\alpha}{2m},\quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\alpha^2}{4m^2}}$$

と表すことができる。このことから , 速度は

$$v(t)=\frac{dx(t)}{dt}=-ax_0e^{-at}\cos(\omega t)-x_0\omega e^{-at}\sin(\omega t)$$

となる。したがって , 運動エネルギーとばねの位置エネルギーの合計は

$$\frac{1}{2}mv(t)^2+\frac{1}{2}kx(t)^2=\frac{1}{2}kx_0{}^2e^{-2at}\left[\frac{m}{k}\left(a\cos(\omega t)+\omega\sin(\omega t)\right)^2+\cos^2(\omega t)\right]$$

$$=\frac{1}{2}kx_0{}^2e^{-2at}\left[\cos^2(\omega t)+\frac{\alpha^2}{4mk}\cos^2(\omega t)+\left(1-\frac{\alpha^2}{4mk}\right)\sin^2(\omega t)+2\frac{m}{k}\frac{\alpha}{2m}\omega\cos(\omega t)\sin(\omega t)\right]$$

となる。特に , 抵抗力が小さい場合　$a \ll \omega$ について考えてみると

$$\frac{\alpha}{2m}\ll\sqrt{\frac{k}{m}}\qquad \text{なので}\qquad \frac{\alpha^2}{4mk}\ll 1,\quad \frac{m}{k}\frac{\alpha}{2m}\omega\ll 1$$

のような近似を用いると , エネルギーの合計は

$$\frac{1}{2}mv(t)^2+\frac{1}{2}kx(t)^2\cong\frac{1}{2}kx_0{}^2e^{-2at}$$

のように指数関数的に減少していくことが分かる。

7. バネ定数を k とすると $\frac{1}{2}k\times(0.1)^2=4$ [J] なので , さらに 10 cm 伸ばすために必要な仕事は

$$\frac{1}{2}k\times(0.2)^2-\frac{1}{2}k\times(0.1)^2=3\times\frac{1}{2}k\times(0.1)^2=12\ \text{[J]}$$

8. (a) 問 6 参照

(b) エネルギー $E(t)$ を時刻 t で微分すると

$$\frac{dE(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}kx(t)^2\right)=\frac{1}{2}m\times2\frac{dx(t)}{dt}\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{1}{2}k\times2x(t)\frac{dx(t)}{dt}=\frac{dx(t)}{dt}\left(m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+kx(t)\right)$$

となる。エネルギーが保存するならば , $E(t)$ は時間変化しないので

$$\frac{dE(t)}{dt}=0$$

という条件が成り立つ。一般に $\frac{dx(t)}{dt}$ はゼロではないので ,

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+kx(t)=0$$

が成り立たなければならない。これは運動方程式にほかならない。この運動方程式に従い , 初期条件

$$x(0)=A,\quad v(0)=0$$

を満たす解は P34 と同様にして

$$x(t)=A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\times t\right),\quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

である。

P50 8. (c) 運動エネルギーは $K(t)=\frac{1}{2}mv(t)^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t)$

位置エネルギーは $U(t)=\frac{1}{2}kx(t)^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t)$

なので，1 周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ の平均は

$$\frac{1}{T}\int_0^T K(t)dt=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t)dt=\frac{\omega}{4\pi}m\omega^2A^2\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}dt$$
$$=\frac{\omega}{4\pi}m\omega^2A^2\left[\frac{1}{2}t-\frac{1}{4\omega}\sin(2\omega t)\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}=\frac{1}{4}m\omega^2A^2$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T U(t)dt=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t)dt=\frac{\omega}{4\pi}kA^2\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{1+\cos(2\omega t)}{2}dt$$
$$=\frac{\omega}{4\pi}kA^2\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4\omega}\sin(2\omega t)\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}=\frac{1}{4}kA^2=\frac{1}{4}m\omega^2A^2$$

(d) $U(t)+K(t)=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t)+\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t)=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\left(\cos^2(\omega t)+\sin^2(\omega t)\right)=\frac{1}{2}m\omega^2A^2$

(e) 抵抗力 F は物体の動く向きと常に逆向きである。

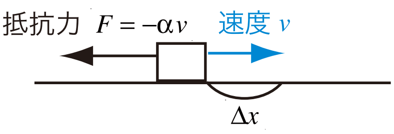
速度 v で，物体が Δx だけ移動するとき，抵抗力がする仕事は

$$F\cdot\Delta x=-\alpha v\cdot\Delta x$$

となる。この移動が時間 Δt 秒で行われるとすると，単位時間あたり

$$\frac{F\cdot\Delta x}{\Delta t}=-\alpha v\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}=-\alpha v^2$$

の仕事となる。



(f) 物体のエネルギーの減少率は

$$-\alpha v(t)^2=-\alpha\ \omega^2A^2\sin^2(\omega t)$$

なので，時間平均は (c) と同様にして

$$\frac{1}{T}\int_0^T -\alpha v(t)^2dt=-\frac{1}{2}\alpha A(t)^2\omega^2$$

となる。

(g) (f) の結果から，単位時間あたりのエネルギーの変化率は

$$\frac{dE(t)}{dt}=-\frac{1}{2}\alpha A(t)^2\omega^2$$

と書ける。また，(d) の結果から

$$E(t)=\frac{1}{2}m\omega^2A(t)^2$$

なので，

$$\frac{1}{2}m\omega^2\times 2A(t)\frac{dA(t)}{dt}=-\frac{1}{2}\alpha A(t)^2\omega^2$$

となる。この式を整理すると，振幅 $A(t)$ は

$$\frac{dA(t)}{dt}=-\frac{\alpha}{2m}A(t)$$

という微分方程式にしたがって時間変化することが分かる。この微分方程式は P31 と同様の方法で解くことができて

$$A(t)=A(0)e^{-\frac{\alpha}{2m}t}$$

となる。この結果は P37 式 (1.10.43) の振幅と一致している。

P50 9 (a) $-2\vec{v}$　　(b) $-\dfrac{2m\vec{v}}{\Delta t}$　　(c) 衝突前： $\vec{v}-\vec{V}$　　衝突後：$-\vec{v}-\vec{V}$

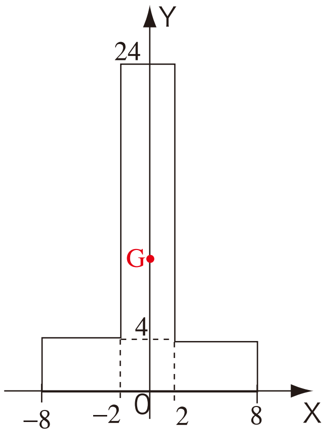
(d) $\dfrac{1}{2}m\left(-\vec{v}-\vec{V}\right)^2-\dfrac{1}{2}m\left(\vec{v}-\vec{V}\right)^2=2m\vec{v}\cdot\vec{V}$　（衝突後のエネルギーが増えている）

(e) 壁が $2m\vec{v}\cdot\vec{V}$ のエネルギーを供給した。
時間 Δt の間に $\vec{V}$ の人から見て，壁は $-\vec{V}\times\Delta t$ だけ移動する。壁は物体に $-\dfrac{2m\vec{v}}{\Delta t}$ の力を与えているので，
壁がする仕事は

$$\left(-\frac{2m\vec{v}}{\Delta t}\right)\cdot\left(-\vec{V}\times\Delta t\right)=2m\vec{v}\cdot\vec{V}$$

となり，(d) の結果と一致している。

P53 1.



厚さを d 体積密度を ρ とすると，全体の質量は

$$M=\iiint\rho\, dV=\rho d\iint \underline{dx\,dy}$$  の面積

$$=\rho d\left(4\times16+20\times4\right)=144_{\mathrm{cm}^2}\times\rho d$$

重心の X 座標は

$$R_x=\frac{1}{M}\iiint\rho x dV=\frac{\rho d}{M}\iint x\,dxdy=\frac{\rho d}{M}\int_0^4 dy\int_{-8}^{8}x\,dx+\frac{\rho d}{M}\int_4^{24}dy\int_{-2}^{2}x\,dx$$

$$=\frac{\rho d}{144\times\rho d}\left(4\times\frac{8^2-(-8)^2}{2}+20\times\frac{2^2-(-2)^2}{2}\right)=0$$

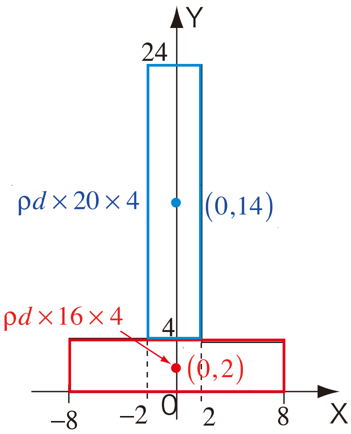
重心の Y 座標は

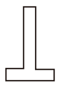
$$R_y=\frac{1}{M}\iiint\rho y\,dV=\frac{\rho d}{M}\iint y\,dxdy=\frac{\rho d}{M}\int_0^4 y\,dy\int_{-8}^{8}dx+\frac{\rho d}{M}\int_4^{24}y\,dy\int_{-2}^{2}dx$$

$$=\frac{\rho d}{144\times\rho d}\left(\frac{4^2}{2}\times16+\frac{24^2-4^2}{2}\times4\right)=\frac{1248_{\mathrm{cm}^3}}{144_{\mathrm{cm}^3}}$$

よって，重心の座標は

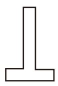
$$\vec{R}=\left(0,\frac{1248_{\mathrm{cm}^3}}{144_{\mathrm{cm}^3}}\right)=(0,\ 8.7_{\mathrm{cm}})$$



初等的には， を  と  の２つの部分に分けて考えるとよい。

 の重心の座標は (0, 14) で，その位置に質量 $\rho d\times20\times4$ を考える。

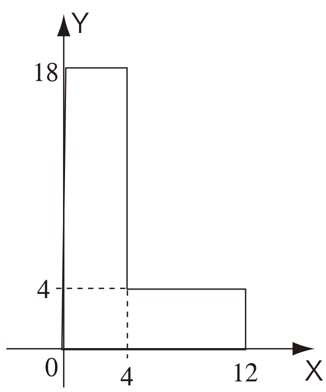
 の重心の座標は (0, 2) で，その位置に質量 $\rho d\times16\times4$ を考える。

 の重心は， と  の２つの重心の位置にそれぞれの質量がある物体の重心と同じである。

したがって，

$$\vec{R}=\frac{1}{M}\left\{\rho d\times20\times4\times\begin{pmatrix}0\\14\end{pmatrix}+\rho d\times16\times4\times\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{1248}{144}\end{pmatrix}$$

となり，上記の結果と一致している。



上と同様に考える。（初等的な方法は各自考えてみよ。）

$$M=\iiint\rho\,dV=\rho d\iint dxdy=\rho d\left(4\times12+14\times4\right)=104_{\mathrm{cm}^3}\times\rho d$$

$$R_x=\frac{1}{M}\iiint\rho x\,dV=\frac{\rho d}{M}\iint x\,dxdy=\frac{\rho d}{M}\int_0^4 dy\int_0^{12}x\,dx+\frac{\rho d}{M}\int_4^{18}dy\int_0^4 x\,dx$$

$$=\frac{\rho d}{104\times\rho d}\left(4\times\frac{12^2}{2}+14\times\frac{4^2}{2}\right)=\frac{400_{\mathrm{cm}^3}}{104_{\mathrm{cm}^3}}=3.8_{\mathrm{cm}}$$

$$R_y=\frac{1}{M}\iiint\rho y\,dV=\frac{\rho d}{M}\iint y\,dxdy=\frac{\rho d}{M}\int_0^4 y\,dy\int_0^{12}dx+\frac{\rho d}{M}\int_4^{18}y\,dy\int_0^4 dx$$

$$=\frac{\rho d}{104\times\rho d}\left(\frac{4^2}{2}\times12+\frac{18^2-4^2}{2}\times4\right)=\frac{712_{\mathrm{cm}^3}}{104_{\mathrm{cm}^3}}=6.8_{\mathrm{cm}}$$

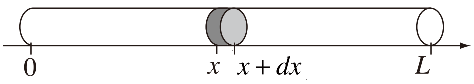
P53 2. 8kg の質点を座標 (x,y) に置いたとすると，全体の重心は

$$\vec{R}=\frac{1}{5+3+4+8}\left\{5\times\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+3\times\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}+4\times\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}+8\times\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}12+8x\\12+8y\end{pmatrix}$$

となる。これが原点であればよいので，

$$(x,y)=(-1.5,-1.5)$$

3.



この問題のように，線密度（単位長さあたりの質量）を考えることができるのは，断面の方向については密度が一様な場合である。図のように，位置 x から dx の長さの微小部分を考えると，の部分の質量は

$$\lambda(x)\times dx=A\times x\times dx$$

となる。ここで，x と dx はともに [m] の単位を持ち，質量は [kg] であるから A の単位は $\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2}\right]$ となる。棒全体の質量は，この微小質量を $0\sim L$ で積分すると求めることができて

$$M=\int_0^L Ax\,dx=\frac{1}{2}AL^2$$

となる。また，重心の位置は

$$R=\frac{1}{M}\int_0^L x\times Ax\,dx=\frac{2}{AL^2}\times A\times\frac{L^3}{3}=\frac{2}{3}L$$

となる。

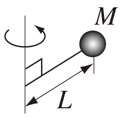
4. 1) $y=-\frac{a-b}{h}x+a$ 　2) $\int_0^h \pi\left(-\frac{a-b}{h}x+a\right)^2 dx=\frac{\pi}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)h$ 　3) ρx

4), 5) $G=\frac{1}{M}\int_0^h \rho\times x\times\pi\left(-\frac{a-b}{h}x+a\right)^2 dx=\frac{\pi\rho}{12M}h^2\left(a^2+2ab+3b^2\right) \longrightarrow G=\frac{a^2+2ab+3b^2}{4\left(a^2+ab+b^2\right)}h$

6) $\frac{a^2+2ab+3b^2}{4\left(a^2+ab+b^2\right)}=0.38$ 　より　$0.52a^2-0.48ab-1.48b^2=0$ 　を得る。この２次方程式を解いて

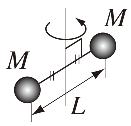
$$a=2.21\times b$$

P55 1.



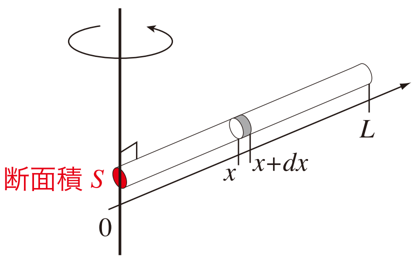
定義により

$I=ML^2$



それぞれの質点は，回転軸から距離 $\frac{L}{2}$ の位置にある。したがって，各質点の慣性モーメントは $M\left(\frac{L}{2}\right)^2$ で，全体の慣性モーメントは２つの合計なので

$$M\left(\frac{L}{2}\right)^2\times 2=\frac{1}{2}ML^2$$



棒の断面積を S とする。棒は一様なので，体積密度は

$$\rho=\frac{M}{SL}$$

である。回転軸の位置を原点として，棒に沿って座標軸をとる。座標が x の位置で微小長さ dx だけ棒と切り取ると，その部分の質量は

$$\rho\times S\times dx$$

となる。この微小部分の回転軸までの距離は x なので，慣性モーメントは

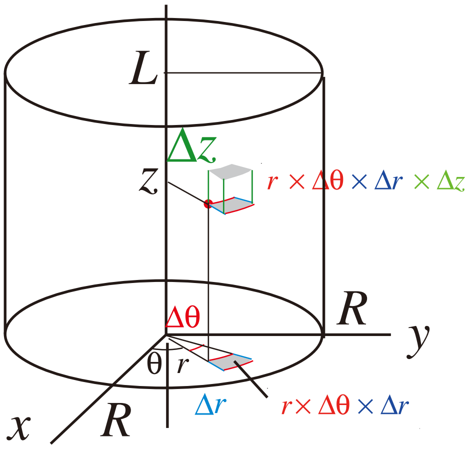
$$x^2\times\rho\times S\times dx$$

である。全体の慣性モーメントを求めるには，この微小部分の寄与を $0\sim L$ の範囲で積分すればよく

$$I=\int_0^L x^2\times\rho\times S\times dx=\rho S\times\frac{1}{3}L^3=\frac{M}{SL}\times S\times\frac{1}{3}L^3=\frac{1}{3}ML^2$$

となる。

P55 1. 円柱



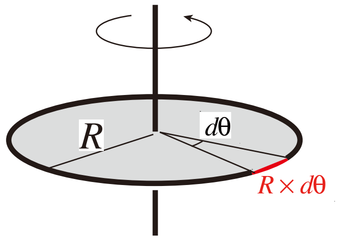
体積密度 $\rho=\dfrac{M}{\pi R^2 L}$

微小部分の質量 $\rho\times r\times d\theta\times dr\times dz$

$$I=\underset{z}{\int_0^L}\underset{r}{\int_0^R}\underset{\theta}{\int_0^{2\pi}} r^2\times\rho\times r\,d\theta\,dr\,dz \quad =\rho\int_0^L dz\times\int_0^R r^3dr\times\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$=\rho L\times\frac{1}{4}R^4\times 2\pi=\frac{1}{2}MR^2$$

円環

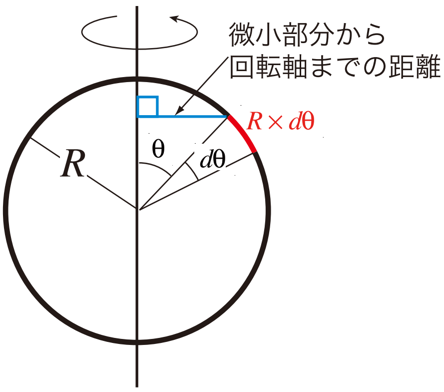


円周についての線密度 $\rho=\dfrac{M}{2\pi R}$

微小部分の質量 $\rho\times R\times d\theta$

$$I=\int_0^{2\pi}R^2\rho\,R\,d\theta=\rho R^3\int_0^{2\pi}d\theta=MR^2$$

円環



円周についての線密度 $\rho=\dfrac{M}{2\pi R}$

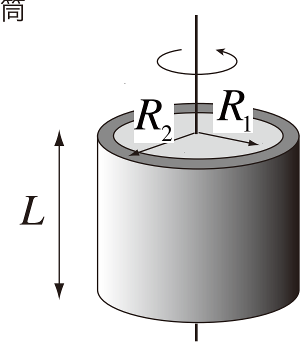
微小部分の質量 $\rho\times R\times d\theta$

回転軸までの距離 $R\sin\theta$

$$I=\int_0^{2\pi}(R\sin\theta)^2\,\rho\,R\,d\theta=\rho R^3\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta$$

$$=\rho R^3\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta=\rho R^3\times\frac{2\pi}{2}=\frac{1}{2}MR^2$$

円筒



計算の方針は円柱と同じであるが，内部が空洞であることに注意

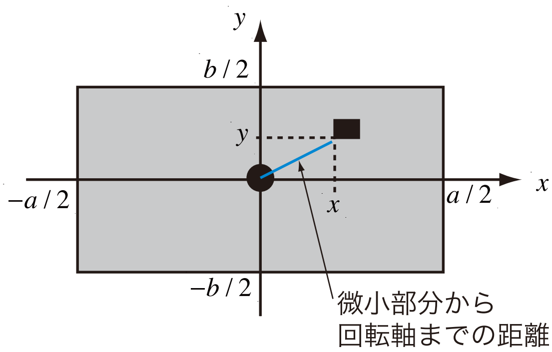
体積密度 $\rho=\dfrac{M}{\pi\left(R_2{}^2-R_1{}^2\right)L}$

$$I=\underset{z}{\int_0^L}\underset{r}{\int_{R_1}^{R_2}}\underset{\theta}{\int_0^{2\pi}} r^2\times\rho\times r\,d\theta\,dr\,dz \quad =\rho\int_0^L dz\times\int_{R_1}^{R_2} r^3dr\times\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$=\rho L\times\frac{1}{4}\left(R_2{}^4-R_1{}^4\right)\times 2\pi=\frac{2\pi}{4}\rho L\times\left(R_2{}^2-R_1{}^2\right)\times\left(R_2{}^2+R_1{}^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}M\left(R_2{}^2+R_1{}^2\right)$$

直方体



面積密度 $\rho=\dfrac{M}{ab}$

微小部分の質量 $\rho\times dx\times dy$

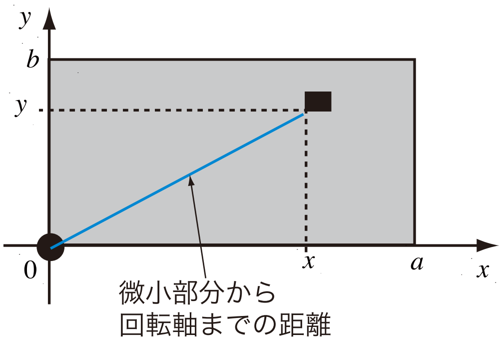
回転軸までの距離 $\sqrt{x^2+y^2}$

$$I=\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\left(x^2+y^2\right)\times\rho\,dx\,dy\ =\int_{-a/2}^{a/2}\rho\times\left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]_{-b/2}^{b/2}dx$$

$$=\int_{-a/2}^{a/2}\rho\times 2\times\left(\frac{b}{2}\times x^2+\frac{1}{3}\left(\frac{b}{2}\right)^3\right)dx\ =2\rho\times\left[\frac{1}{6}bx^3+\frac{1}{24}b^3x\right]_{-a/2}^{a/2}$$

$$=2\rho\times 2\left(\frac{1}{6}b\left(\frac{a}{2}\right)^3+\frac{1}{24}b^3\times\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{12}M\left(a^2+b^2\right)$$

P55 1. 直方体



前問とほぼ同様にして

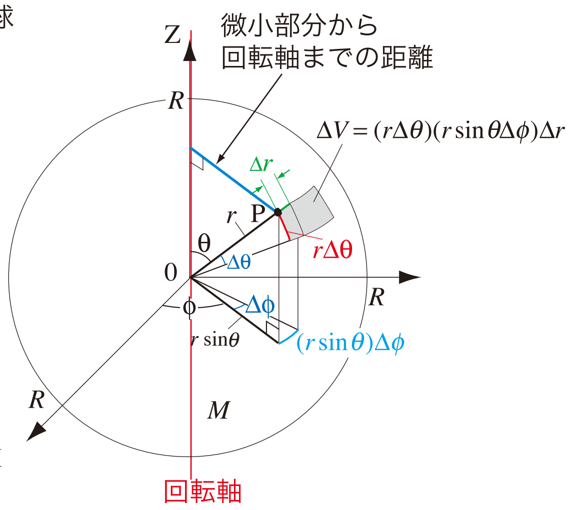
面積密度　$\rho = \dfrac{M}{ab}$

微小部分の質量　$\rho \times dx \times dy$

回転軸までの距離　$\sqrt{x^2 + y^2}$

$$I = \int_0^a \int_0^b \left(x^2 + y^2\right) \times \rho \; dx \; dy \;= \frac{1}{3} M \left(a^2 + b^2\right)$$

球



体積密度　$\rho = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

微小部分の質量　$\rho \times r^2 \sin\theta \; dr \; d\theta \; d\phi$

回転軸までの距離　$r \sin\theta$

$$I = \underset{r}{\int_0^R} \underset{\theta}{\int_0^\pi} \underset{\phi}{\int_0^{2\pi}} \left(r\sin\theta\right)^2 \times \rho \times r^2 \sin\theta \; dr \; d\theta \; d\phi$$

$$= \rho \times \int_0^R r^4 dr \times \int_0^\pi \sin^2\theta \times \sin\theta \; d\theta \times \int_0^{2\pi} d\phi$$

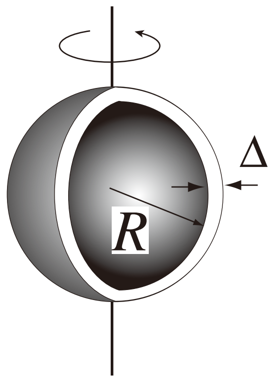
$$= \rho \times \frac{1}{5} R^5 \times \int_0^\pi \left(1 - \cos^2\theta\right) \sin\theta \; d\theta \times 2\pi$$

$$= \rho \times \frac{2\pi}{5} R^5 \times \left\{ \left[-\cos\theta\right]_0^\pi - \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta \; d\theta \right\}$$

$$\int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta \; d\theta \overset{t=\cos\theta}{=} \int_1^{-1} t^2 \times (-dt) = \frac{2}{3}$$

$$= \rho \times \frac{2\pi}{5} R^5 \times \left\{ 2 - \frac{2}{3} \right\} = \frac{2}{5} MR^2$$

球殻



球の場合とほぼ同様に考えればよい。ただし，球殻の厚さが薄い場合，球殻の体積は　$4\pi R^2 \times \Delta$　と考えられるので

体積密度　$\rho = \dfrac{M}{4\pi R^2 \times \Delta}$

となることと，r についての積分範囲が$R \sim R+\Delta$となることに注意する。

$$I = \int_R^{R+\Delta} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(r\sin\theta\right)^2 \times \rho \times r^2 \sin\theta \; dr \; d\theta \; d\phi$$

$$= \rho \times \frac{2\pi}{5} \times \frac{4}{3} \times \left\{ \left(R+\Delta\right)^5 - R^5 \right\}$$

殻の厚さが球の半径と比べて十分に小さい場合（$R >> \Delta$）

$$\left(R+\Delta\right)^5 = R^5 \left(1 + \frac{\Delta}{R}\right)^5 \cong R^5 + 5 \times R^4 \Delta$$

という近似を用いると

$$I \cong \rho \times \frac{2\pi}{5} \times \frac{4}{3} \times \left\{ R^5 + 5 \times R^4 \Delta - R^5 \right\} = \frac{M}{4\pi R^2 \times \Delta} \times \frac{8\pi}{15} \times 5 \times R^4 \Delta = \frac{2}{3} MR^2$$

球殻の体積についての補足

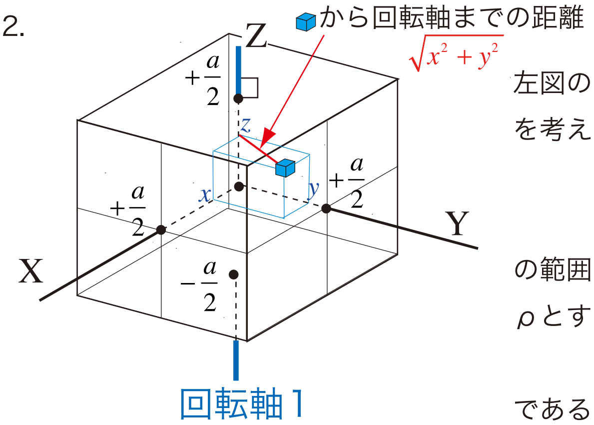
正確な球殻の体積は $\dfrac{4\pi}{3}\left\{ \left(R+\Delta\right)^3 - R^3 \right\}$ である。殻の厚さが球の半径と比べて十分に小さい場合上と同様な近似

$$\left(R+\Delta\right)^3 = R^3 \left(1 + \frac{\Delta}{R}\right)^3 \cong R^3 + 3 \times R^2 \Delta$$

を用いると

$$\frac{4\pi}{3}\left\{ \left(R+\Delta\right)^3 - R^3 \right\} \cong \frac{4\pi}{3}\left\{ R^3 + 3 \times R^2 \Delta - R^3 \right\} = 4\pi R^2 \Delta$$

P55 2.



左図のように，立方体の中心に原点をとり，面に垂直な座標軸を考える。立方体の内部は

$$-\frac{a}{2}\le x\le +\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2}\le y\le +\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2}\le z\le +\frac{a}{2}$$

の範囲である。座標 (x,y,z) に微小体積$dxdydz$ を考える。密度を ρ とすると，z 軸が回転軸である場合の微小部分の慣性モーメントは

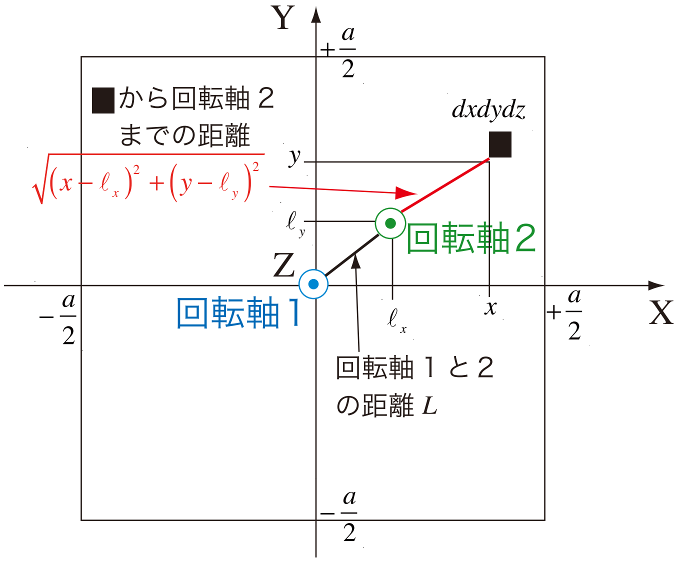
$$\left(x^2+y^2\right)\rho dxdydz$$

である。立方体全体の慣性モーメントは，これを積分で集めればよいので，

$$I=\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\left(x^2+y^2\right)\times\rho\times dx\,dy\,dz\quad=\rho\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\left(x^2+y^2\right)\times\left[z\right]_{-a/2}^{a/2}dx\,dy\quad=\rho\int_{-a/2}^{a/2}\left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]_{-a/2}^{a/2}\times a\times dx$$

$$=\rho\times\left[\frac{1}{3}x^3\times a+x\times\frac{2}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3\right]_{-a/2}^{a/2}\times a\quad=\rho\times\left(\frac{2}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3\times a+a\times\frac{2}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3\right)\times a\quad=\rho\times\frac{1}{6}a^5$$

立方体の密度は $\rho=\dfrac{M}{a^3}$ なので， $I=\dfrac{1}{6}Ma^2$ となる。



回転軸２が z 軸の平行で，xy 座標が $\left(\ell_x,\ell_y\right)$ であるとすると，座標 (x,y,z) にとった微小体積 $dxdydz$ から回転軸２までの距離は

$$\sqrt{\left(x-\ell_x\right)^2+\left(y-\ell_y\right)^2}$$

となる。したがって，微小部分の慣性モーメントは

$$\left[\left(x-\ell_x\right)^2+\left(y-\ell_y\right)^2\right]\times\rho\times dxdydz$$

となる。立方体全体の慣性モーメントは，これを積分で集めればよい。積分範囲は，座標軸が変わったわけではないので，あいかわらず

$$-\frac{a}{2}\le x\le +\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2}\le y\le +\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2}\le z\le +\frac{a}{2}$$

である。

$$I'=\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\left[\left(x-\ell_x\right)^2+\left(y-\ell_y\right)^2\right]\times\rho\times dxdydz\quad=\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\left[x^2+y^2-2\left(\ell_xx+\ell_yy\right)+\ell_x{}^2+\ell_y{}^2\right]\times\rho\times dxdydz$$

$$=\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\left[x^2+y^2\right]\times\rho\times dxdydz+\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\left[-2\left(\ell_xx+\ell_yy\right)\right]\times\rho\times dxdydz+\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\left[\ell_x{}^2+\ell_y{}^2\right]\times\rho\times dxdydz$$

ところで，上式の第１項は，原点を通る回転軸「回転軸１」の慣性モーメントと同じで

$$\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\left[x^2+y^2\right]\times\rho\times dxdydz=I=\frac{1}{6}Ma^2$$

となる。また，第３項は， $\ell_x{}^2+\ell_y{}^2$ が定数なので

$$\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\left[\ell_x{}^2+\ell_y{}^2\right]\times\rho\times dxdydz=\left(\ell_x{}^2+\ell_y{}^2\right)\times\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\rho\times dxdydz\ =ML^2$$

と書ける。ここで，

$$M=\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\rho\times dxdydz,\ L^2=\ell_x{}^2+\ell_y{}^2$$

の関係を用いた。第２項目の積分については

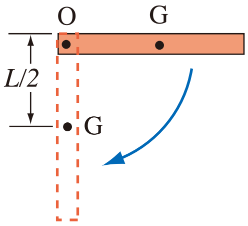
$$\int_{-a/2}^{a/2}x\,dx=0,\quad\int_{-a/2}^{a/2}y\,dy=0$$

となることから，慣性モーメントへの寄与はない。したがって，回転軸２についての慣性モーメントは

$$I'=I+ML^2$$

となる。このような簡単な結果は，平行な２本の回転軸について一般に成立することが知られており，「平行線の定理」と呼ばれる。

P55 3.



a) 物体の「位置エネルギー」と「回転の運動エネルギー」の合計は , エネルギー保存則から一定となる。棒の位置エネルギーは , 重心の位置に棒の質量が集中している物体の位置エネルギーを考えればよい。棒が水平の状態から鉛直の状態に回転すると , 重心の位置は $\frac{1}{2}L$ だけ下がることになる。したがって , 位置エルギーは

$$Mg \times \frac{1}{2}L$$

だけ減少する。この位置エネルギーの減少分は , 棒の持つ回転の運動エネルギーとなるので , 棒の慣性モーメントを I とすると

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = Mg \times \frac{1}{2}L$$

の関係が成立する。ここで , ω は棒が鉛直の状態となった瞬間の角速度である。問 1 の結果から

$$I = \frac{1}{3}ML^2$$

なので ,

$$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{I}} = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

b) 重心の速さ : $\frac{1}{2}L \times \omega = \frac{1}{2}\sqrt{3gL}$　　最下点の速さ : $L \times \omega = \sqrt{3gL}$

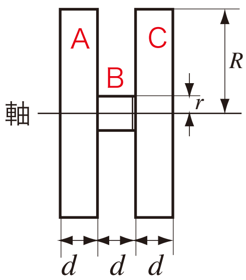
4. 2 つのおもりの位置エネルギーの合計は $(m_2 - m_1)gh$ だけ減少する。このエネルギーは , おもりの運動エネルギーと滑車の回転の運動エネルギーの合計に等しくなるので , 物体の速さを v, 滑車の角速度を ω とすると ,

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = (m_2 - m_1)gh$$

の関係を得る。滑車が角速度 ω で回転しているとき , 滑車の円周上の点は速さ $R \times \omega$ を持つ。この速さはひもが動く速さと同じで（ひもが滑らなければ）, さらには物体の速さとも等しい。よって , $v = R \times \omega$ となり ,

$$\omega = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1)gh}{(m_1 + m_2)R^2 + I}}$$

5.



(1) 問 1 の円柱の場合と同じで , $\frac{1}{2}MR^2$

(2) 左図の形のヨーヨーを細かく分割して , i 番目の質量を m_i , その部分から軸までの距離を r_i とすると , ヨーヨー全体の慣性モーメントは

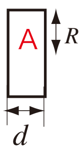
$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

となる。i についての和は , 左図の A B C の部分に分けて実行できるので

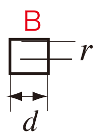
$$I = \sum_{\substack{A \\ \text{について}}} m_i r_i^2 + \sum_{\substack{B \\ \text{について}}} m_i r_i^2 + \sum_{\substack{C \\ \text{について}}} m_i r_i^2$$

と書ける。それぞれは

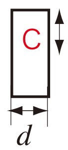
$\sum_A m_i r_i^2$:



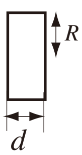
$\sum_B m_i r_i^2$:



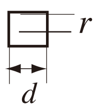
$\sum_C m_i r_i^2$:



のような部分の慣性モーメントを表している。すべての部分は同じ材質（密度）なので



の質量は $\frac{\pi R^2 d}{(2\pi R^2 + \pi r^2)d}M = \frac{R^2}{2R^2 + r^2}M$



の質量は $\frac{\pi r^2 d}{(2\pi R^2 + \pi r^2)d}M = \frac{r^2}{2R^2 + r^2}M$

である。したがって , ヨーヨー全体の慣性モーメントは

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{2R^2 + r^2}M\right) \times R^2 \times 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{2R^2 + r^2}M\right) \times r^2 = \frac{1}{2}M\frac{2R^4 + r^4}{2R^2 + r^2}$$

P55 5. (3) 位置エネルギーはMgh だけ減少する。

(4) ある時刻におけるヨーヨーの重心の速さv と軸まわりの回転の角速度 ω の間には $v=r\times\omega$ の関係がある。したがって

$$Mgh=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}\left(Mr^2+I\right)\omega^2$$

のようにエネルギーが保存される。

P57 1. (a) 反時計回りを正として $(25_{\mathrm{N}}\times\underset{0.866}{\cos 30^\circ})\times 2_{\mathrm{m}}-(10_{\mathrm{N}}\times\underset{0.342}{\sin 20^\circ})\times 4_{\mathrm{m}}=29.6_{\mathrm{N\cdot m}}$

(b) 反時計回りを正として $(30_{\mathrm{N}}\times\underset{0.707}{\sin 45^\circ})\times 2_{\mathrm{m}}-(10_{\mathrm{N}}\times\underset{0.342}{\sin 20^\circ})\times 2_{\mathrm{m}}=35.6_{\mathrm{N\cdot m}}$

2. 反時計回りを正として $12_{\mathrm{N}}\times 0.1_{\mathrm{m}}-9_{\mathrm{N}}\times 0.25_{\mathrm{m}}-10_{\mathrm{N}}\times 0.25_{\mathrm{m}}=-3.55_{\mathrm{N\cdot m}}$

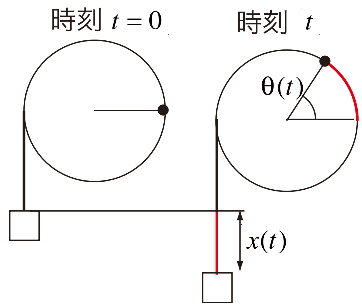
3. 円板に働く力のモーメントは $T\times R$ 。円板の角加速度をαをすると , 円板の回転の運動方程式は

$$I\alpha=T\times R \qquad (1)$$

となる。おもりの加速度を a とすると , おもりの運動方程式は

$$ma=mg-T \qquad (2)$$

となる。右図のように円板の周に印をつけて（どこでもよい）, t 秒間の回転角度を$\theta(t)$, おもりの落下距離を $x(t)$ とすると



$$x(t)=R\times\theta(t)$$

の関係が成り立つ。両辺を t で微分すると

$$\frac{dx(t)}{dt}=R\times\frac{d\theta(t)}{dt},\quad \frac{d^2x(t)}{dt^2}=R\times\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

のように , 速度と角速度 , 加速度と角加速度に比例関係があることが分かる。したがって ,

$$a=R\times\alpha \qquad (3)$$

となる。式 (1),(2),(3) を用いて ,T, a, αをもとめると

$$T=\frac{mg}{1+\frac{mR^2}{I}},\quad a=\frac{g}{1+\frac{I}{mR^2}},\quad \alpha=\frac{1}{R}\frac{g}{1+\frac{I}{mR^2}}$$

4. 重心の加速度をA, ヨーヨーの角加速度をαとすると , 重心の運動方程式 と 回転の運動方程式は

$$MA=Mg-S,\quad I\alpha=SR_0$$

と書ける。問 3 と同様に $A=R_0\alpha$ という関係が成り立つので , 加速度A をもとめると

$$A=\frac{g}{1+\frac{I}{MR_0{}^2}}$$

となる。ヨーヨーの慣性モーメントを半径 R の円板のものとしてよければ

$$I=\frac{1}{2}MR^2$$

なので

$$A=\frac{2R_0{}^2}{2R_0{}^2+R^2}g$$

5. 1 $R\omega$ 2 $\frac{1}{2}MR^2$ 3 $\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{4}MR^2\omega^2=\frac{3}{4}Mv^2$ 4 $\frac{3}{4}Mv_0{}^2$

5 $\frac{x}{L}$ 6 $\frac{3}{4}m(x)$ 7 $v(x)=\sqrt{\frac{M}{m(x)}}\times v_0=\frac{v_0}{\sqrt{1-\frac{x}{L}}}$

8 $\frac{1}{v_0}\sqrt{1-\frac{x}{L}}$ 9 $\int_0^L\frac{1}{v_0}\sqrt{1-\frac{x}{L}}dx=\left[-\frac{2L}{3v_0}\left(1-\frac{x}{L}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^L=\frac{2}{3}\frac{L}{v_0}$

P60 1. (a) $N = 500 + 350 + 40 = 890_{\mathrm{N}}$

(b) 力のモーメントのつり合いより　$500 \times 1.5 = 350 \times x \quad \to \quad x = 2.14\mathrm{m}$

2. 二頭筋の力 F が骨に垂直であるとして , 関節に働く力が下向きで大きさを R とすると , 力のつり合いの条件は

$$F - R - 50_{\mathrm{N}} = 0$$

となる。関節を回転軸とすると , 力のモーメントのつり合いは

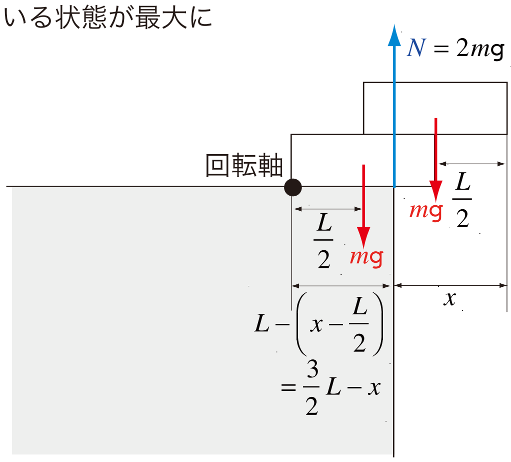
$$F \times 0.03_{\mathrm{m}} - 50_{\mathrm{N}} \times 0.35_{\mathrm{m}} = 0$$

となるので , 2 つの式から R と F を求めると

$$F = 583\ \mathrm{N},\ \ R = 533\ \mathrm{N}\ （下向き）$$

3. □ Hint にあるように , 2 つ目のレンガは $L/2$ だけ突き出している状態が最大にレンガが突き出す配置である。

□ Hint にあるように , 机からの垂直抗力の作用点が机の角となる状態が , 最大にレンガが突き出す配置である。



回転軸はどこにとってもよいが , 右図のような位置に軸を設定すると , 力のモーメントのつり合いは

$$-mg \times \frac{L}{2} + 2mg \times \left(\frac{3}{2}L - x\right) - mgL = 0$$

となり ,

$$x = \frac{3}{4}L$$

4. (a) 力のつり合い（X 方向）　$R_x - F\cos 12^\circ - (W_1 + W_2 + mg)\sin\theta = 0$

力のつり合い（Y 方向）　$R_y - F\sin 12^\circ + (W_1 + W_2 + mg)\cos\theta = 0$

力のモーメントのつり合い　$-W_1\cos\theta \times \frac{L}{2} - (W_2 + mg)\cos\theta \times L + F\sin 12^\circ \times \frac{2}{3}L = 0$

(b) (a) の連立方程式を解くと

$$F = \frac{\frac{1}{2}W_1 + W_2 + mg}{\frac{2}{3}\sin 12^\circ}\cos\theta = (6.49\cos\theta) \times W$$

$$R_x = \frac{\frac{1}{2}W_1 + W_2 + mg}{\frac{2}{3}\tan 12^\circ}\cos\theta + (W_1 + W_2 + mg)\sin\theta = (6.34\cos\theta + 1.1\sin\theta) \times W$$

$$R_y = \frac{\frac{1}{2}W_1 + W_2 + mg}{\frac{2}{3}}\cos\theta - (W_1 + W_2 + mg)\cos\theta = (0.25\cos\theta) \times W$$

となるので，　$\theta = 30^\circ$ の場合 , それぞれの力は

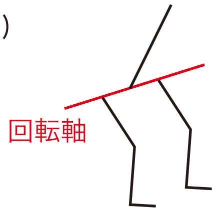
F	R_x	R_y	R
$5.62W$	$6.04W$	$0.22W$	$6.05W$

(c)

F	R_x	R_y	R
$3.25W$	$4.12W$	$0.13W$	$4.12W$

(d) θ が小さくなると , R が大きくなるので , 背筋を伸ばして , 足を曲げて持ち上げるのがよい。

P61 5. (1)



図のような回転軸については，右足の力のモーメントと左足の力のモーメントは同じ結果を与える。

(2)　X 方向：　$F_x + R_x = 0$　　　Y 方向：　$F_y + R_y - W_L + W + Mg = 0$

(3)　$-F \times a - W_L \times b + (W + Mg) \times c = 0$

(4) (2)(3) の連立方程式を解くと

$$F = \frac{1}{a}\{(W + Mg) \times c - W_L \times b\} = 10.4W$$

$$F_x = F \sin 45^\circ = 7.35W$$

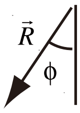
$$F_y = F \cos 45^\circ = 7.35W$$

$$R_x = -F_x = -7.35W$$

$$R_y = W_L - W - Mg - F_y = -8.95W$$

$$R = \sqrt{{R_x}^2 + {R_y}^2} = 11.58W$$

(5)



$\tan\phi = \dfrac{R_x}{R_y} = \dfrac{7.35}{8.95} = 0.82$　　より，グラフから　$\phi = 0.7\ \mathrm{rad}$

P62 1. (1)　$m\dfrac{v^2}{r} = G\dfrac{mM}{r^2}$　　(2) $T = \dfrac{2\pi r}{v}$　　(3)$\dfrac{v^2}{r} = G\dfrac{\frac{4\pi}{3}R^3\rho}{r^2}$

(4) 公転周期は $T = \dfrac{2\pi r}{v} = 2\pi r \times \sqrt{\dfrac{r}{\frac{4\pi}{3}GR^3\rho}} = \sqrt{\dfrac{3\pi}{G\rho}\left(\dfrac{r}{R}\right)^3}$　と書くことができる。r と R が同じ割合で小さくなったとしても，$\dfrac{r}{R}$ は変化しないので，公転周期は変わらない。したがって 1 年。

2. (1)　$m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -k\,x(t) - \alpha\dfrac{dx(t)}{dt} + F\cos(\omega_0 t)$

(2) 運動方程式に解の予想 $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \delta)$ を代入すると，

$$-mA{\omega_0}^2\cos(\omega_0 t + \delta) = -kA\cos(\omega_0 t + \delta) + \alpha A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \delta) + F\cos(\omega_0 t)$$

$$\rightarrow\quad -\alpha\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \delta) + (k - m{\omega_0}^2)A\cos(\omega_0 t + \delta) = F\cos(\omega_0 t)$$

となり，三角関数の公式を用いると

$$mA\sqrt{\left(\frac{\alpha\omega_0}{m}\right)^2 + \left(\frac{k}{m} - {\omega_0}^2\right)^2}\sin(\omega_0 t + \delta + \phi) = F\cos(\omega_0 t)\qquad \text{ただし}\qquad \tan\phi = \frac{k - m{\omega_0}^2}{-\alpha\omega_0}$$

とまとめることができる。この式が t の恒等式として成立するためには

$$mA\sqrt{\left(\frac{\alpha\omega_0}{m}\right)^2 + \left(\frac{k}{m} - {\omega_0}^2\right)^2} = F\qquad \text{および}\qquad \delta + \phi = \frac{\pi}{2}$$

であればよい。したがって，

$$A = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{\left(\frac{\alpha\omega_0}{m}\right)^2 + \left(\frac{k}{m} - {\omega_0}^2\right)^2}}\qquad \tan\delta = \frac{-\alpha\omega_0}{k - m{\omega_0}^2}\quad (\delta \text{ を決めるための式})$$

となり，問題の式 (1) と見比べると，$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$　であればよいことがわかる。

(3)

$$\frac{\frac{F}{4}}{\sqrt{\left(\left(\frac{200}{4}\right) - (2\pi \times 10)^2\right)^2}} = 0.02 \quad\rightarrow\quad F = 0.02 \times \left|\frac{200}{4} - (2\pi \times 10)^2\right| \times 4 = 311.8\ \mathrm{N}$$

P62 3. (1) $\displaystyle \underset{r}{\int_0^R}\underset{\phi}{\int_{-\alpha}^{\alpha}}\underset{\theta}{\int_0^{\pi}} r^2\sin\theta\ d\theta\ d\phi\ dr=\frac{1}{3}R^3\times 2\alpha\times 2=\frac{4\alpha}{3}R^3$

(2) $\displaystyle R_y=\frac{\rho}{M}\int_0^R\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_0^{\pi}(r\sin\theta\sin\phi)r^2\sin\theta\ d\theta\ d\phi\ dr$ ϕ の積分は $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha}(\sin\phi)\ d\phi=\left[-\cos\phi\right]_{-\alpha}^{\alpha}=0$ となるので $R_y=0$

(3) $\displaystyle R_z=\frac{\rho}{M}\int_0^R\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_0^{\pi}(r\cos\theta)r^2\sin\theta\ d\theta\ d\phi\ dr$ θ の積分は $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos\theta\times\sin\theta\ d\theta=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin 2\theta\ d\theta=0$ となるので $R_z=0$

(4) $\displaystyle R_x=\frac{\rho}{M}\int_0^R\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_0^{\pi}(r\sin\theta\cos\phi)r^2\sin\theta\ d\theta\ d\phi\ dr=\frac{\rho}{M}\times\frac{1}{4}R^4\times\left[\sin\phi\right]_{-\alpha}^{\alpha}\times\left[\frac{1}{2}\left\{\theta-\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right\}\right]_0^{\pi}=\frac{\rho}{M}\times\frac{1}{4}R^4\times 2\sin\alpha\times\frac{\pi}{2}$

全体の質量は $M=\rho\times\dfrac{4\alpha}{3}R^3$ なので， $R_x=\dfrac{3\pi}{16}\times\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\times R$

P63 4. (1) $k\dfrac{e^2}{r^2}$ 左 (2) $k\dfrac{e^2}{d}$ (3) $4k\dfrac{e^2}{r^2+d^2}\dfrac{r}{\sqrt{r^2+d^2}}$ (4) $\displaystyle\int_0^{\infty}4ke^2\frac{r}{\left[r^2+d^2\right]^{3/2}}dr=4k\frac{e^2}{d}$

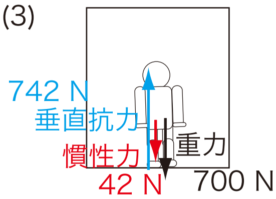
(5) 4倍 (6) $k\dfrac{e^2}{d}\times 6$ (7) $-k\dfrac{e^2}{\sqrt{2}d}\times 12$ (8) $k\dfrac{e^2}{\sqrt{3}d}\times 8$

(9) $k\dfrac{e^2}{d}\times\left[6-\dfrac{12}{\sqrt{2}}+\dfrac{8}{\sqrt{3}}\right]=9\times 10^9\times\left(1.6\times 10^{-19}\right)^2\times\dfrac{1}{3\times 10^{-10}}\times 2.13=1.64\times 10^{-18}\ \mathrm{J}$

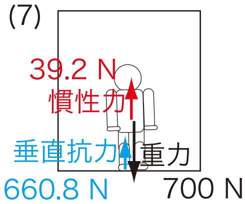
(10) $1.64\times 10^{-18}\times 6.02\times 10^{23}=9.85\times 10^5\ \mathrm{J/mol}=985\ \mathrm{kJ/mol}$

P64 5. (1) 0.6 m/s² (2) 9222 N

(3)



(7)



(4) 1.0375 m (5) –0.56 m/s²

(6) 8212.8 N (8) 1.1725 m (9) 10.71 m

P65

6. $\boxed{1}$ $\ell\sin\theta(t)$ $\boxed{2}$ $\ell\cos\theta(t)$ $\boxed{3}$ $-T(t)\sin\theta(t)$ $\boxed{4}$ $mg-T(t)\cos\theta(t)$ $\boxed{5}$ $-m\ell\sin\theta(t)$ $\boxed{6}$ $m\ell\cos\theta(t)$

$\boxed{7}$ $-m\ell\cos\theta(t)$ $\boxed{8}$ $-m\ell\sin\theta(t)$ $\boxed{9}$ $m\ell$ $\boxed{10}$ $-mg\sin\theta(t)$ $\boxed{11}$ $2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$ $\boxed{12}$ $\ell\left|\dfrac{d\theta(t)}{dt}\right|$

$\boxed{13}$ $mg\ell\left(1-\cos\theta_0\right)$ $\boxed{14}$ $\dfrac{1}{2}m\ell^2\left(\dfrac{d\theta(t)}{dt}\right)^2+mg\ell\left(1-\cos\theta(t)\right)$ $\boxed{15}$ $mg\left(3\cos\theta(t)-2\cos\theta_0\right)$

$\boxed{16}$ A $\boxed{17}$ C $\boxed{18}$ $2mg$ $\boxed{19}$ $\dfrac{1}{2}mg$

P66

7. $\boxed{1}$ $\dfrac{m}{2r\alpha}$ $\boxed{2}$ $r\cos\theta$ $\boxed{3}$ $r\sin\theta$ $\boxed{4}$ $\lambda r\Delta\theta$ $\boxed{5}$ $\dfrac{\pi}{2}+\alpha$ $\boxed{6}$ $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$

$\boxed{7}$ $r\cos\theta\times\lambda r$ $\boxed{8}$ $r\sin\theta\times\lambda r$ $\boxed{9}$ $2F\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}$ $\boxed{10}$ $\lambda r^2\omega^2$ $\boxed{11}$ $2F\sin\alpha$ $\boxed{12}$ $\ell\omega^2$

(5) $R_x=\dfrac{\lambda r^2}{m}\left[\sin\theta\right]_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha}=0$ (6) $R_y=\dfrac{\lambda r^2}{m}\left[\cos\theta\right]_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha}=r\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$

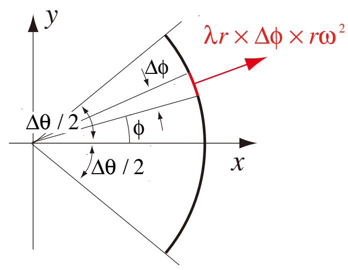
(8) $\Delta\theta$ が有限な大きさの場合，右図のように角度が $\Delta\phi$ の微小部分 \ を考える。この部分には大きさ $\lambda r\times\Delta\phi\times r\omega^2$ の遠心力が働く。したがって，遠心力を成分で表すと

$$\left(\lambda r^2\omega^2\times\Delta\phi\times\cos\phi,\ \lambda r^2\omega^2\times\Delta\phi\times\sin\phi\right)$$

となる。したがって，円弧全体には

$$\left(\lambda r^2\omega^2\int_{-\Delta\theta/2}^{\Delta\theta/2}\cos\phi\ d\phi,\ \lambda r^2\omega^2\int_{-\Delta\theta/2}^{\Delta\theta/2}\sin\phi\ d\phi\right)=\left(2\lambda r^2\omega^2\sin\frac{\Delta\theta}{2},\ 0\right)$$

の遠心力が働くことが分かる。

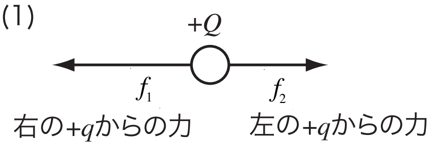


(9) $\displaystyle 1=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta F}{f}=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{2F\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\lambda r^2\omega^2\Delta\theta}=\frac{F}{\lambda r^2\omega^2}\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2}=\frac{F}{\lambda r^2\omega^2}$ したがって $F=\lambda r^2\omega^2$

(11) 図１のように，円弧の物体の両端には張力 F が働いている。それら２つの張力のベクトル和（合力）は回転軸への方向となっている。円弧の物体全体が角速度 ω で回転しているならば，その運動は円弧の重心にすべての質量が集中した質点の円運動と同等である。したがって，円運動は物体全体に働く力 F_{total} が向心力の役割をしていることになる。

(13) $\ell=\dfrac{2F\sin\alpha}{m\omega^2}=\dfrac{2\lambda r^2\omega^2\sin\alpha}{m\omega^2}=\dfrac{2\times\dfrac{m}{2r\alpha}\times r^2\sin\alpha}{m}=r\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$

P67 8. (1)



(2) $f_1 = k\dfrac{qQ}{(\ell - x)^2}$ $\quad f_2 = k\dfrac{qQ}{(\ell + x)^2}$

(3) $f(x) = -k\dfrac{qQ}{(\ell - x)^2} + k\dfrac{qQ}{(\ell + x)^2}$

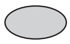
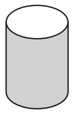
(4) $f(x) = -\dfrac{kqQ}{\ell^2}\left\{\left(1-\dfrac{x}{\ell}\right)^{-2} - \left(1+\dfrac{x}{\ell}\right)^{-2}\right\} \cong -\dfrac{kqQ}{\ell^2}\left(1+2\dfrac{x}{\ell}-1+2\dfrac{x}{\ell}\right) = -4\dfrac{kqQ}{\ell^3}x$

(5) $m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -4\dfrac{kqQ}{\ell^3}x(t)$ $\quad$ (6) $x(t) = x_0\cos\left(\sqrt{\dfrac{4kqQ}{m\ell^3}}\times t\right)$ $\quad$ (7) $T = \pi\sqrt{\dfrac{m\ell^3}{kqQ}}$

(8) $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{9\times10^9\times(1.6\times10^{-19})^2}{10\times1.7\times10^{-27}\times(10^{-9})^3}} = 1.17\times10^{12}\ \mathrm{Hz}$ （遠赤外線）

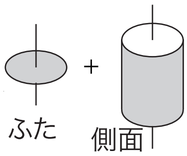
P68 9. (1) 凍結していないとき, 液体部分は回転しないので, 液体部分による慣性モーメントはゼロである。

缶の材質の面積あたりの質量（面密度）を σ [kg/m^2] とすると

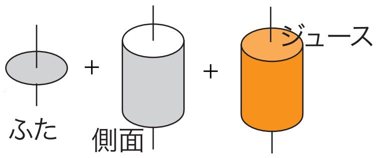
ふた  の質量は $\sigma\pi r^2$, 側面  の質量は $\sigma\times2\pi r\ell$ と書ける。したがって, 缶だけの質量は

$m_0 = 2\times\sigma\pi r^2 + \sigma\times2\pi r\ell$ となるので, 面密度は $\sigma = \dfrac{m_0}{2\pi r^2 + 2\pi r\ell}$ であることがわかる。

P55の問１を参考にすると, 凍結していない缶ジュースの慣性モーメントは

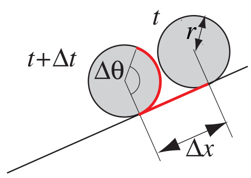
$I_0 = 2\times$  $= 2\times\dfrac{1}{2}(\sigma\pi r^2)\times r^2 + \sigma\times2\pi r\ell\times r^2 = \dfrac{m_0}{2\pi r^2+2\pi r\ell}\times\left(\pi r^4 + 2\pi r^3\ell\right) = \dfrac{1}{2}m_0\dfrac{r+2\ell}{r+\ell}r^2$

となる。ジュースが凍結していると, ジュースの部分も缶と一緒に回転するので, 慣性モーメントは

$I_1 = 2\times$  $= I_0 + \dfrac{1}{2}m_1 r^2$

(2) $M\dfrac{dv(t)}{dt} = Mg\sin\alpha - F$ $\quad$ (3) $I\dfrac{d\omega(t)}{dt} = F\times r$

(4) 図のように, 時間 Δt に Δx だけ移動して, 缶が角度 $\Delta\theta$ だけ回転したとすると $\Delta x = r\times\Delta\theta$ が成り立つので, $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = r\times\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$ を考えると $v(t) = r\times\omega(t)$ となることが分かる。



(5) (2)と(4)の結果を使うと $Mr\dfrac{d\omega(t)}{dt} = Mg\sin\alpha - F$

(3)を代入すると $Mr\dfrac{Fr}{I} = Mg\sin\alpha - F$

Fについて解くと $F = \dfrac{Mg\sin\alpha}{1+\dfrac{Mr^2}{I}}$ を得る。

(6) $v(t) = \dfrac{r^2}{I}\dfrac{Mg\sin\alpha}{1+\dfrac{Mr^2}{I}}t$ $\quad x(t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{r^2}{I}\dfrac{Mg\sin\alpha}{1+\dfrac{Mr^2}{I}}t^2$

(7) $V = \sqrt{\dfrac{2Mr^2gH}{I+Mr^2}}$ $\quad \Omega = \dfrac{1}{r}\sqrt{\dfrac{2Mr^2gH}{I+Mr^2}}$

(8) $t=0$ のときの缶ジュースの運動エネルギーはゼロで, 位置エネルギーは $t=T$ の状態より MgH だけ大きい。

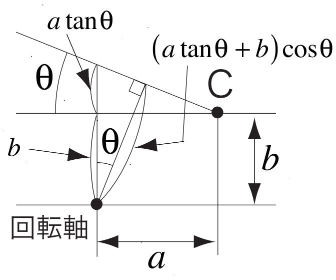
$t=T$ のときの缶ジュースの運動エネルギーは $\dfrac{1}{2}I\Omega^2 + \dfrac{1}{2}MV^2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{I}{r^2}+M\right)V^2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{I}{r^2}+M\right)\times\dfrac{2Mr^2gH}{I+Mr^2} = MgH$

(9) $V = \sqrt{\dfrac{2Mr^2gH}{I+Mr^2}}$ において, 凍結しているか否かで変化するのは慣性モーメント I だけである。

ジュースが凍結していない場合の慣性モーメント I_0 は凍結している場合の慣性モーメント I_1 より小さいので,

ころがり落ちたときの缶ジュースの速度は凍結していない場合の方が大きくなる。

P69 10. (1) $d = \dfrac{m_1\ell_1 - m_2\ell_2}{m_1 + m_2}$ より $\ell_1 = \dfrac{1}{m_1}\left[(m_1 + m_2)d + m_2\ell_2\right] = 30.6\ \mathrm{cm}$



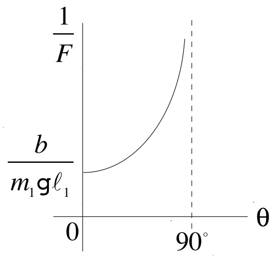
(2) x方向： $F\cos\theta - R_x = 0$　　y方向： $-m_1\mathrm{g} - F\sin\theta + R_y = 0$

(3) 腹直筋力F の回転軸までの距離は $(a\tan\theta + b)\cos\theta$ なので,

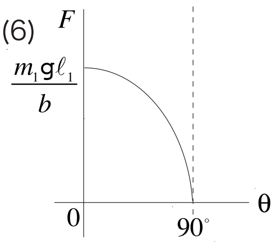
$$-F(a\sin\theta + b\cos\theta) + m_1\mathrm{g}\cos\theta \times \ell_1 = 0$$

(4) $F = \dfrac{m_1\mathrm{g}\ell_1}{a\tan\theta + b}$

(5)



(6)



(7) $N = (m_1 + m_2)\mathrm{g}$

(8) Bを軸とすると $(m_1\mathrm{g}\cos\theta) \times \ell_1 + N \times x_N - m_2\mathrm{g} \times \ell_2 = 0$

(9) $x_N = \dfrac{1}{N}\left(m_2\mathrm{g}\ell_2 - m_1\mathrm{g}\ell_1\cos\theta\right) = 10.2 - 20.196\cos\theta$　[cm]

(10) $x_N > 0$ となるためには $10.2 - 20.196\cos\theta > 0$ であればよいので $\cos\theta < 0.505$ の条件を満たせばよい。

したがって角度が約60°より大きくなればよい。