基礎物理

田村　圭介
講義棟 ２階（物理学 田村研究室）
0776-61-8284　ktamura@u-fukui.ac.jp

予定

火3	4/14	4/21	4/28	5/12	5/19	5/26	6/2	6/9	6/16	6/23	6/30	7/7	7/14	7/21	7/28	8/4
火4														7/21	7/28	8/4
火5																
金3												7/10	7/17		7/26	
金4												7/10	7/17		7/26	
金5																

月3												12/21			1/18	1/25
水3														1/13		
金2	10/2	10/16	10/23	10/30	11/6		11/20	11/27	12/4	12/11	12/18	12/25			1/22	

基礎物理 I（講義）　基礎物理 II（講義）　試験
基礎物理 I（実習）

合否判定

○ 基礎物理 I と基礎物理 II のどちらかが合格となること。
（両方履修することを推奨する）

○ 講義は1/3以上欠席すると不合格となる。

○ I と II について,それぞれ100点分（60点で合格）の試験をおこなう。

○ 実習は全ての課題を完遂することで合格となる。

講義のやり方と注意事項

プロジェクター, 黒板を用いる

小テスト, レポートを行うことがある（合否判定に際して考慮する）

プリントを配付

A4，2穴の紙ファイルを各自用意すること

講義で分からないことがあれば, 質問すること　不明な点を放置しない

http://phys.med.u-fukui.ac.jp　練習問題の解答例、掲示板など

-137 億年　Big Bang
-50 億年　太陽の誕生
-46 億年　地球の誕生
先カンブリア期
海の形成
大陸の形成
原始生命の誕生
光合成による酸素の放出

-5.75 億年
古生代
無脊椎動物
ゴンドワナ大陸
魚類の出現
生物の陸上進出
両生類の出現
シダ植物
ハ虫類の出現
パンゲア大陸

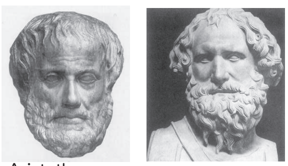
-2.47 億年
中生代
恐竜、ほ乳類の出現
恐竜の繁栄(ジュラ紀)
恐竜の絶滅(白亜紀)

-6500 万年　大陸の分裂
-170 万年　原始人類の出現

BC3500　四大河文明
ナイル
チグリス・ユーフラテス
インダス
黄河　　ブッダ

Thales
BC 624 - BC 547
Miletus
ターレス
自然の根源物質

Pythagoras
BC 569 - BC 475
Ionia
ピタゴラス
数の調和



Aristotle
BC 384 - BC 322
Macedonia
アリストテレス
自然哲学

Archimedes
BC 287 - BC 212
Syracuse
アルキメデス
浮力、てこ、求積法

ギリシャ、ローマ
アッシリア、ペルシャ
プトレマイオス朝
殷、西周、春秋、戦国
秦、前漢、縄文、弥生

1世紀　イエス
ローマ　ササン朝
後漢、晋　大和

Ptolemaios Klaudios
121 - 151 頃活動
Alexandria
プトレマイオス
天動説

5世紀　西、東ローマ　随、唐
奈良、平安

10世紀　マホメット
神聖ローマ　宋、金、元
鎌倉　十字軍　ルネサンス

15世紀
室町　明　大航海時代

Nicolaus Copernicus
1473 - 1543
poland　コペルニクス　地動説

16世紀
安土桃山　宗教改革

Galileo Galilei
1564 - 1642
Pisa
ガリレオ
近代科学

Johannes Kepler
1571 - 1630
Holy Roman Empire
(Germany)
ケプラー
惑星の運動

17世紀
江戸　清　市民革命

Pierre Fermat
1601 - 1665
France
フェルマー
光学、数学

Evangelista Torricelli
1608 - 1647
Florence (Italy)
トリチェリ
圧力、真空

Blaise Pascal
1623-1662
France
パスカル
圧力、数学

18世紀
産業革命　アメリカ独立
フランス革命、ナポレオン

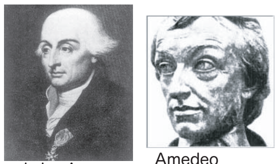
Isaac Newton
1642-1727
England
ニュートン
力学の体系
万有引力
微分、積分

Gottfried Wilhelm von Leibniz
1646 - 1716
Hanover (Germany)
ライプニッツ
微分、積分

Leonhard Euler
1708 - 1783
Switzerland, Russia
オイラー
数学、力学

James Watt
1736 - 1819
Scotland
ワット　蒸気機関

Charles Augustin de Coulomb
1736 - 1806
クーロン　電気力



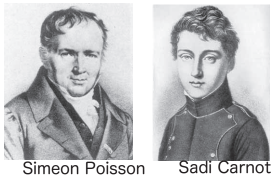
Joseph-Louis Lagrange
1736 - 1813
France
ラグランジュ
解析力学

Amedeo Avogadro
1776 - 1856
Italy
アボガドロ
原子、分子

Johann Carl Friedrich Gauss
1777 - 1855
Goetingen (Germany)
ガウス　数学

Andre Ampere
1775-1836
アンペール
磁気現象

19世紀

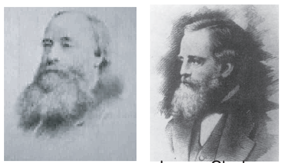


Simeon Poisson
1781 - 1840
France
ポアッソン
熱、光、音

Sadi Carnot
1796 - 1832
France
カルノー　熱力学

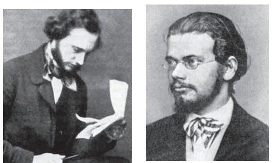
Georg Ohm
1789 - 1854
Germany
オーム　電気現象

Michael Faraday
1791 - 1867
England
ファラデー
電磁気現象



James Prescott Joule
1818-1889
England
ジュール
熱現象

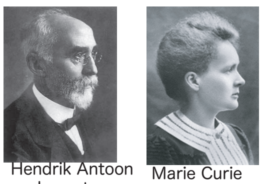
James Clerk Maxwell
1831 - 1879
England
マックスウェル
電磁気学
気体分子運動



William Thomson
(Lord Kelvin)
1824 - 1907
Scotland
ケルビン
熱力学

Ludwig Boltzmann
1844 - 1906
Austria
ボルツマン
統計熱力学

20世紀



Hendrik Antoon Lorentz
1853 - 1928
Netherlands
ローレンツ
電磁気現象

Marie Curie
1867 - 1934
France
マリー キュリー
放射性物質

Joseph John Thomson
1856 - 1940
England
トムソン
電子の発見

Heinrich Rudolph Hertz
1857 - 1894
Germany
ヘルツ
電磁波の確認

Max Plank
1858 - 1947
プランク
量子の導入

Albert Einstein
1879-1955
アインシュタイン
光電効果
ブラウン運動
相対性理論

Niels Bohr
1885-1962
ボーア
原子模型

Erwin Schrodinger
1887-1961
シュレディンガー
量子力学の創設

Warner Heisenberg
1901-1976
ハイゼンベルグ
量子力学の創設

Wolfgang Pauli
1900-1958
パウリ
排他律

Paul Dirac
1902-1984
ディラック
反粒子

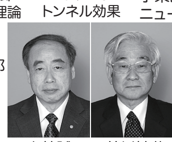
1949
湯川英樹
中間子

1965
朝永振一郎
くりこみ理論

1973
江崎玲於奈
トンネル効果

2002
小柴昌俊
ニュートリノ

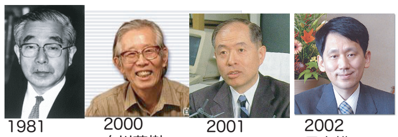
2008
南部陽一郎
自発的
対称性
の破れ



2008
クオーク
世代の予言
小林誠　益川敏英

赤崎 勇　天野 浩　中村 修二
2014 青色LED

2015 梶田隆章
ニュートリノ振動



1981
福井謙一
フロンティア
電子

2000
白川英樹
導電性
ポリマー

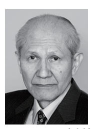
2001
野依良治
不斉合成
反応

2002
田中耕一
生体高分子
の構造解析

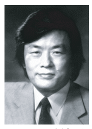
2008 下村脩
緑色蛍光タンパク質

2010 根岸英一　鈴木章
クロスカップリングの開発

2019 吉野彰
リチウム電池の開発



2008 下村脩
緑色蛍光
タンパク質



1987 利根川進
抗体の多様性
生成の遺伝的原理

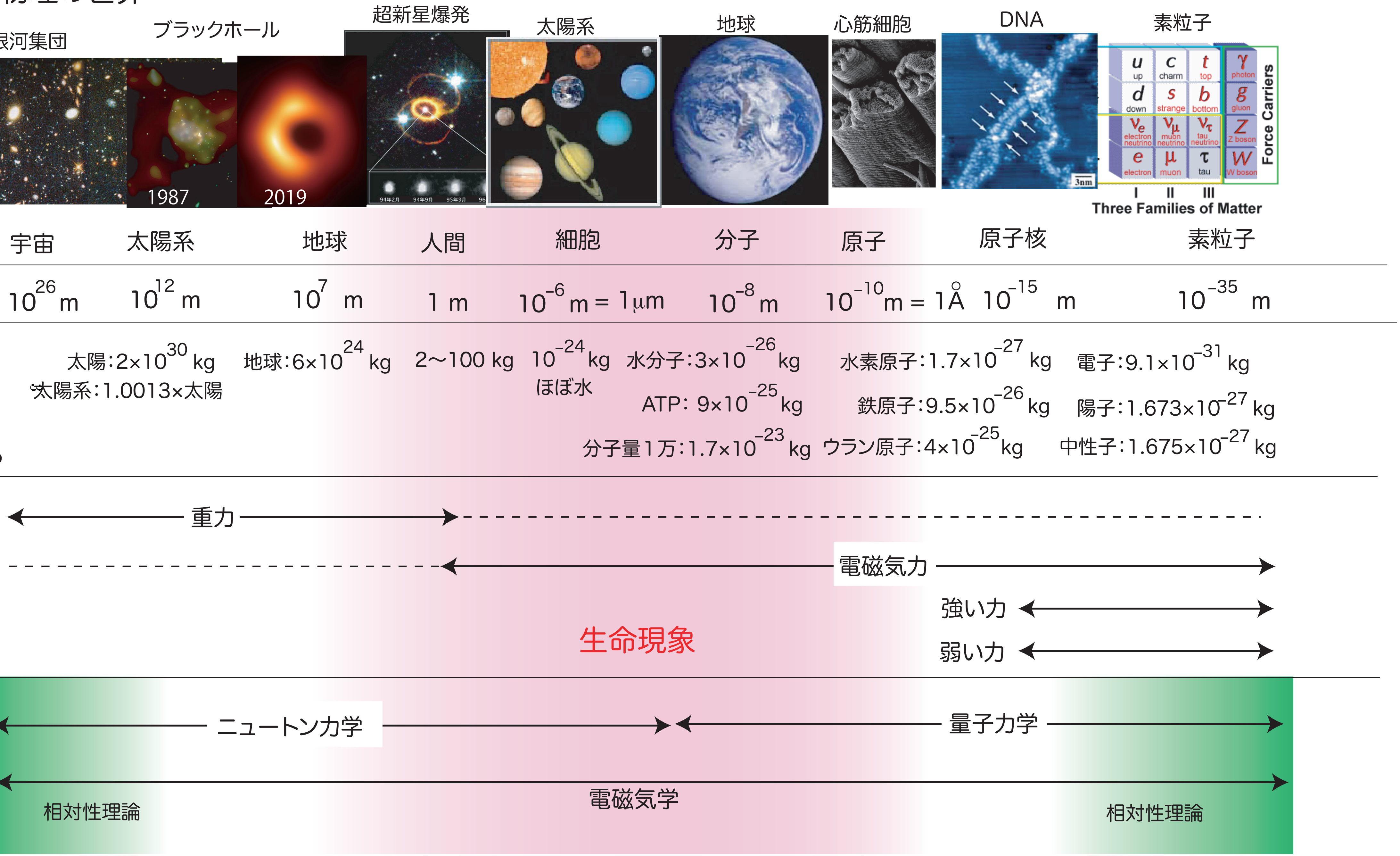
2012 山中伸弥
様々な細胞に成長できる
能力を持つiPS細胞の作製

2015 大村智
感染症に対する
治療法

2016 大隅良典
オートファジー
の仕組みの解明

2018 本庶佑
免疫チェックポイント
阻害因子の発見と
がん治療への応用

物理の世界

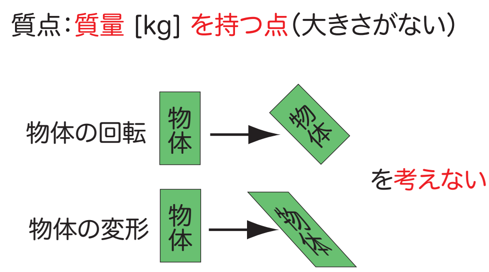


銀河集団
ブラックホール
1987
2019
超新星爆発
太陽系
地球
心筋細胞
DNA
素粒子
3nm
u up
c charm
t top
d down
s strange
b bottom
νe electron neutrino
νμ muon neutrino
ντ tau neutrino
e electron
μ muon
τ tau
γ photon
g gluon
Z Z boson
W W boson
Force Carriers
I II III
Three Families of Matter
宇宙 太陽系 地球 人間 細胞 分子 原子 原子核 素粒子
10^{26} m
10^{12} m
10^{7} m
1 m
10^{-6} m = 1μm
10^{-8} m
10^{-10} m = 1Å
10^{-15} m
10^{-35} m
太陽:2×10^{30} kg
太陽系:1.0013×太陽
地球:6×10^{24} kg
2〜100 kg
10^{-24} kg
ほぼ水
水分子:3×10^{-26} kg
ATP: 9×10^{-25} kg
分子量1万:1.7×10^{-23} kg
水素原子:1.7×10^{-27} kg
鉄原子:9.5×10^{-26} kg
ウラン原子:4×10^{-25} kg
電子:9.1×10^{-31} kg
陽子:1.673×10^{-27} kg
中性子:1.675×10^{-27} kg
重力
電磁気力
強い力
弱い力
生命現象
ニュートン力学
量子力学
電磁気学
相対性理論
相対性理論

1. 質点の力学

1.1 質点

物体の運動を考えるとき, 全体としての運動だけに注目し, 回転や変形を考えない場合がある。このようなときには, 物体を 1 つの点で代表させ, それが持つ色々な性質のうち質量だけを考慮すればよい。このように質量を持った点という形に抽象化（モデル化）した物体を**質点** という。



原子のような小さなものでも, その内部構造を考える場合は質点として扱えないが, 地球のように大きな物も, 太陽の周りの公転だけを扱うときには質点とみなすことができる。物体の大きさを考える必要がある場合（回転や変形をするとき）も, その物体が小さな質点の集まりであると考えることで対応することができる。

1.2 位置と座標

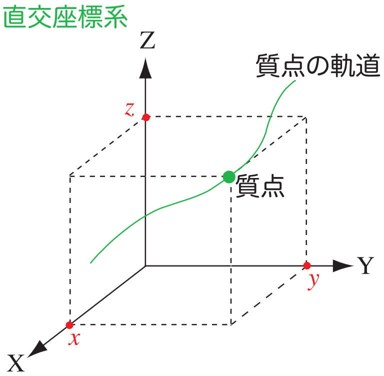
質点の位置を表すには, 座標系を便利がよいように定め, **直交座標系** (x, y, z), **球座標系** (r, θ, ϕ), **円筒座標系** (ρ, ϕ, z) など, 問題に適した座標系を用いる。どのような座標を考えたとしても, 一般に, 3 つの数値の組みが必要となる。

運動が平面内に限られる場合は, 直交座標系の向きを適切に決めれば (x, y) の 2 つの数値の組みで表すことができる。球の表面に限定される場合は, 球座標系で (θ, ϕ) の組みについて考えることになる。

さらに, 質点が直線上を運動するときは直交座標系の x だけに注目すればよい。円の周上に限定される場合は, 円の中心からみた角度の変化を調べればよい。

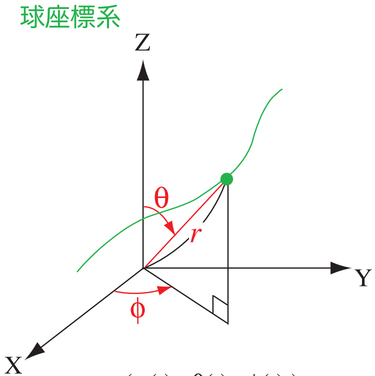
質点が運動すると, これらの座標は時間 t の関数として変化する。そのことを数学では $x = f(t)$ のように表すが, 文字の種類を節約するために, 物理では $x(t)$ のように表すことが多い。時刻 t での質点の位置 $x(t), y(t), z(t)$ が具体的に分かれば, すべての t の値ごとに求めた (x, y, z) の表す点をつないだ曲線がその質点の軌道となる。

直交座標系



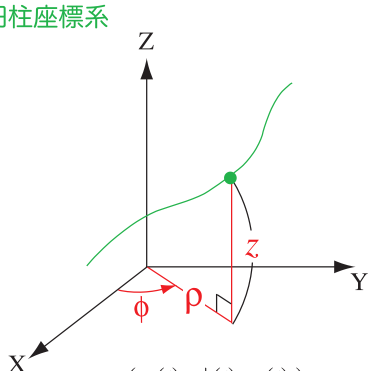
($x(t)$, $y(t)$, $z(t)$)

球座標系



($r(t)$, $\theta(t)$, $\phi(t)$)

円柱座標系



($\rho(t)$, $\phi(t)$, $z(t)$)

練習問題

1. 直交座標系の XY 平面上で、質点が $x = a\cos\omega t, y = b\sin\omega t$ のように動く時, 質点の軌道を表す式はどのようになるか。

2. $x = a + bt, y = ct$ ならば軌道はどのようになるか。

3. 直交座標 (x, y, z) を球座標 (r, θ, ϕ) で表すと

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta$$

となることを確かめなさい。

4. 直交座標 (x, y, z) を円柱座標 (ρ, ϕ, z) で表すと、どうなるか。

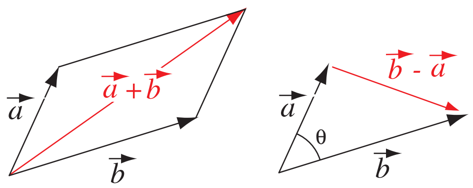
1.3 ベクトル

物理量はスカラー (scalar) あるいはベクトル (vector) のいずれかの性質を持つ。スカラーは大きさのみを持ち，方向を持たない。ベクトルは大きさと方向（または向き）の両方で特定しなければならない物理量である。

教室の中の学生の人数はスカラー量の一例である。「教室の中に 110 名の学生がいる」と知らされたなら，それで必要な情報が完全に特定され，方向は必要ない。

川の流れはベクトル量の一例である。川の水がどのように流れているかを完全に記述するためには，流れている水の量（大きさ）と水がどのような方向に流れているか（向き）を特定しなければならない。力もベクトル量である。物体にどのような大きさで，どのような向きに力が働いているかを知る必要がある。ある物体の運動（速度）を記述するときは，それがどのくらいの速さで運動しているかということと，その向きの両方を特定しなければならない。

○ベクトル



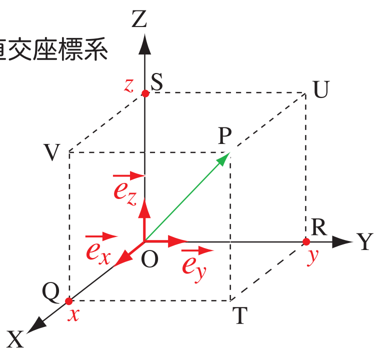
大きさと向きを持つ量（ベクトル）　$\vec{a}$　$\overrightarrow{OP}$

ベクトルの長さ（大きさ，スカラー）　$|\vec{a}|$　$|\overrightarrow{OP}|$

ベクトルの内積（スカラー）　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

○単位ベクトルと成分

直交座標系



ベクトルので表示

$\overrightarrow{OQ}=x\,\vec{e}_x$　$,\overrightarrow{OR}=y\,\vec{e}_y$　$,\overrightarrow{OS}=z\,\vec{e}_z$

$\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$，$\overrightarrow{OU}=\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OS}$，$\overrightarrow{OV}=\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{OQ}$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OT}+\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OU}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OV}+\overrightarrow{OR}\quad=x\,\vec{e}_x+\ y\,\vec{e}_y+\ z\,\vec{e}_z$

成分の表示

$\vec{e}_x=(1,0,0)$，　$\vec{e}_y=(0,1,0)$，　$\vec{e}_z=(0,0,1)$

$\overrightarrow{OQ}=(x,0,0)$，　$\overrightarrow{OR}=(0,y,0)$，　$\overrightarrow{OS}=(0,0,z)$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OS}=(x,y,z)$

ベクトルの大きさ

$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

練習問題

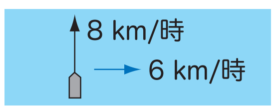
1. $\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x=\vec{e}_y\cdot\vec{e}_y=\vec{e}_z\cdot\vec{e}_z=1$ を証明しなさい。

2. $\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y=\vec{e}_y\cdot\vec{e}_z=\vec{e}_z\cdot\vec{e}_x=0$ を証明しなさい。

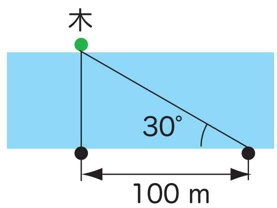
3. 内積の定義に従って $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP}}$ を示しなさい。

4. $\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$ で $\overrightarrow{OP'}=(x',y',z')$ のとき，1 と 2 の結果を用いて $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP'}=xx'+yy'+zz'$ を証明しなさい。

5. 東へ向かって流速 6 km/時 で流れる川を，船首を真北へ向けて 8 km/時 の速さで進もうとする船は，岸から見ると進行方向はどのようになり，速さはいくらとなるか。

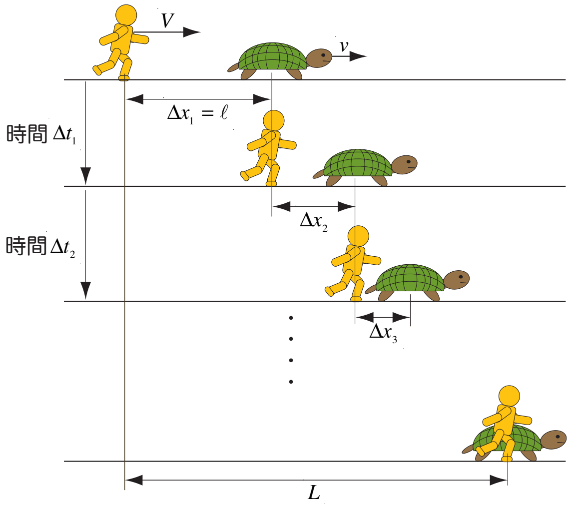


6. 川の幅を測定することを考える。 向こう岸にある木に正対して立ち，その位置から 100 m 川に沿って歩き，木の方向への角度を測定する。角度が 30° であったとすると川幅はいくらか。



1.4 速度

1.4.1 瞬間の速度（ゼノンのパラドックス）



古代ギリシャの哲学者ゼノン（Zeno, 紀元前 450 年頃）は多くのパラドックス（逆理）をとりあげ,「運動」を理解することについての困難を示した。そのひとつは「アキレスと亀のパラドックス」として知られている。アキレスは亀を追いかける。アキレスがいくら速く走っても, 亀がいた位置に到達すると, 亀はアキレスより少し前方に進んでいる。アキレスと亀の競走は, この繰り返しなので, アキレスは亀を追い越すことはできない。この「パラドックス」について考えることで「速度」についての理解を深めてみよう。

ある瞬間, アキレスは亀より距離 $\Delta x_1 = \ell$ だけ後方にいて, アキレスは速度 V で, 亀は速度 v で進むものとする ($V > v$)。アキレスが亀がいた場所まで走るためにかかる時間は,

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x_1}{V} = \frac{\ell}{V}$$

である。亀はこの時間 Δt_1 の間に

$$\Delta x_2 = v \times \Delta t_1 = \frac{v}{V}\ell$$

だけアキレスの前方へ進んでいる。ふたたび, アキレスが亀がいた場所まで走るためにかかる時間は,

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta x_2}{V} = \frac{v}{V^2}\ell$$

となり, 亀はこの時間 Δt_2 の間に

$$\Delta x_3 = v \times \Delta t_2 = \left(\frac{v}{V}\right)^2 \ell$$

だけ進む。この議論を繰り返せば, 各段階での距離と時間は

$$\Delta x_n = \left(\frac{v}{V}\right)^{n-1} \ell, \qquad \Delta t_n = \left(\frac{v}{V}\right)^{n-1} \frac{\ell}{V}$$

と表すことができる。このように考えると,「アキレスと亀のパラドックス」は Δx_n がゼロにならないことを問題にしていることが分かる。「極限」の概念を理解している諸君は,

ゼノンの論法を無限に繰り返すことは $n \to \infty$ という極限をとることである

と気付くであろう。すなわち, この極限では

$$\lim_{n\to\infty} \Delta x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{v}{V}\right)^{n-1} \ell = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \Delta t_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{v}{V}\right)^{n-1} \frac{\ell}{V} = 0$$

のように,「無限小の距離」と「無限小の時間」を相手にしなければならないのである。たとえ距離と時間が無限小になっても, アキレスは時間 Δt_n に距離 Δx_n だけ進み, 亀は時間 Δt_n に距離 Δx_{n+1} だけ進むので, それぞれの速度は

$$\text{アキレス：}\ \frac{\Delta x_n}{\Delta t_n} = \frac{\left(\frac{v}{V}\right)^{n-1}\ell}{\left(\frac{v}{V}\right)^{n-1}\left(\frac{\ell}{V}\right)} = V, \qquad \text{亀：}\ \frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta t_n} = \frac{\left(\frac{v}{V}\right)^{n}\ell}{\left(\frac{v}{V}\right)^{n-1}\left(\frac{\ell}{V}\right)} = v$$

のようになっている。結局, アキレスと亀の競走にかかる時間は

$$T = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \cdots = \frac{\ell}{V} + \left(\frac{v}{V}\right)\frac{\ell}{V} + \left(\frac{v}{V}\right)^2 \frac{\ell}{V} + \cdots = \frac{\ell}{(V-v)}$$

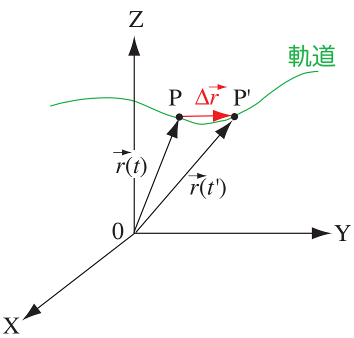
となり, アキレスの最初の位置からのようになっている。結局, アキレスと亀の競走にかかる時間は

$$L = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \cdots = \ell + \left(\frac{v}{V}\right)\ell + \left(\frac{v}{V}\right)^2 \ell + \cdots = \frac{V}{(V-v)} \times \ell$$

だけ進んだことろでアキレスは亀に追いつくことが分かる。

1.4.2 変位と速度

運動している質点がある時刻 t に P を通過し，それから時間 Δt だけあとに P’ を通ったとする。点 P の位置ベクトルを $\vec{r}(t)$，点 P’ の位置ベクトルを $\vec{r}(t')$ と書くと，位置の変化は



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t') - \vec{r}(t)$$

となる。このような位置の変化を表すベクトルを変位ベクトルと呼ぶ。$\Delta\vec{r}$ に数 $\dfrac{1}{\Delta t}$ をかけたものを $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ と書くと，これは一つのベクトルで，その方向は $\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$，大きさは

$$\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{PP'}}|}{\Delta t}$$

に等しい。Δt を十分に短くすれば $|\Delta\vec{r}| = |\overrightarrow{\mathrm{PP'}}|$ は Δt の間に質点の動いた距離に近づくから，それを Δt で割ったものは平均の速さ（スカラー）である。ここで $\Delta t \to 0$ とした極限を考えると，P→P’ であるから

$$\vec{v} = \lim_{\Delta r\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

とすると，これは軌道の接線の方向で，P を通る時刻 t での瞬間の速さを大きさとするベクトルになっている。この v を速度（ベクトル）という。

　変位ベクトルの成分を $\Delta\vec{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ とすると

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\right)$$

となるので，$\Delta t \to 0$ の極限をとると

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}, \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}, \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)$$

となっていることが分かる。ここで $\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}$ などは微分の記号を用いて $\dfrac{dx}{dt}$ などと書ける。また，質点の位置は $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ のように時間の関数なので，速度もまた時間の関数となり $\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$ のように書けば

$$\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t)) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right)$$

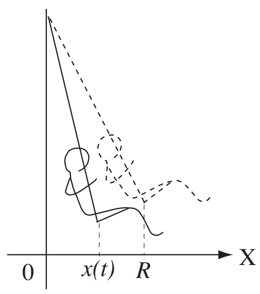
となり，速度ベクトルは位置ベクトルの時間微分であることが分かる。

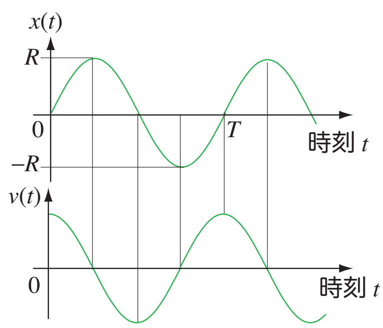
例題：ブランコあるいは単振動（1 次元の運動）

ブランコのような往復運動のことを単振動と呼ぶ。ブランコの位置を真下の地面の位置で表し，その位置が

$$x(t) = R\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$$

のように正弦関数的に時間変化したとしよう。（なぜこのように表すことができるかは，運動の法則を学習した後に明らかになる。）





このとき，T はブランコが 1 往復するのにかかる時間で周期と呼ぶ。また R は最大の振れ幅で振幅という。このブランコの速度を求めてみると

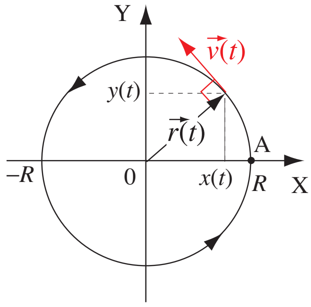
$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = R\frac{2\pi}{T}\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$$

のようになり，ブランコの変位が右側あるいは左側に最大であるとき $\left(t = \dfrac{T}{4}, \dfrac{3T}{4}, \cdots\right)$ 速度はゼロであることが分かる。そして，ブランコが鉛直線を通過するとき速さは最大となる。

例題：円運動（２次元の運動）

円軌道を一定の速さで回るような運動を等速円運動という。最初, 時刻 $t=0$ で半径 R の円軌道を点 A から動き始めたとする。周期を T とすると時刻 t の角度は

$$\theta(t)=2\pi\frac{t}{T}$$



となる。よって位置ベクトル $\vec{r}(t)$ と座標 $x(t),y(t)$ の関係は

$$\vec{r}(t)=\left(R\cos 2\pi\frac{t}{T},R\sin 2\pi\frac{t}{T}\right)$$

である。これにより, 速度ベクトルをもとめると

$$\vec{v}(t)=\left(-\frac{2\pi R}{T}\sin 2\pi\frac{t}{T},\frac{2\pi R}{T}\cos 2\pi\frac{t}{T}\right)$$

となることが分かる。位置ベクトル $\vec{r}(t)$ と速度ベクトル $\vec{v}(t)$ の内積を計算すると

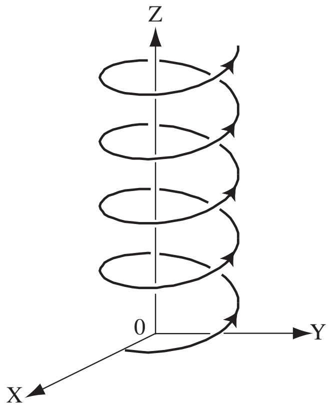
$$\vec{r}(t)\cdot\vec{v}(t)=0$$

となっているので, 速度ベクトルは位置ベクトルと直交し, 円軌道の接線方向を向いていることが分かる。また、速度の大きさを計算してみると,

$$v(t)=|\vec{v}(t)|=\sqrt{\left(-\frac{2\pi R}{T}\sin 2\pi\frac{t}{T}\right)^2+\left(\frac{2\pi R}{T}\cos 2\pi\frac{t}{T}\right)^2}=\frac{2\pi R}{T} \tag{1.4.1}$$

となる。この結果は一定の値であり、周長 $2\pi R$ の円軌道を時間 T で一周することを意味している。

例題：らせん運動（３次元の運動）



X-Y 方向には上の例題と同様の等速円運動をしながら, Z 方向に一定の速度 c で進むと、らせん軌道 が描かれる。このとき位置ベクトルは

$$\vec{r}(t)=\left(R\cos 2\pi\frac{t}{T},R\sin 2\pi\frac{t}{T},ct\right)$$

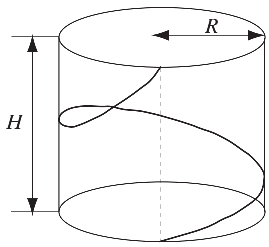
となり, 速度ベクトルは

$$\vec{v}(t)=\left(-\frac{2\pi R}{T}\sin 2\pi\frac{t}{T},\frac{2\pi R}{T}\cos 2\pi\frac{t}{T},c\right)$$

となる。

練習問題

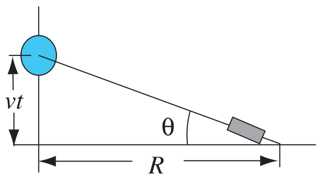
1. ２台の車が 15 分おいて福井北インターから北陸自動車道路に入った。最初の車は 80 km/時 の速さで走っている。100 km 離れた米原で第２の車がが最初の車を追い越すためには、どれほどの速さで走ればよいか。
2. 遊園地に図のような円筒に沿って滑る子供のためのすべり台がある。摩擦があるので子供は一定の速さ $v=3\text{m/s}$ で滑り落ちるものとする。また $H=6\text{m}$, $R=2\text{m}$ であるとする。円筒面を切り開いて平面に引き延ばしてみると, らせん状の曲線はななめの直線に対応していることが分かる。



   (1) すべる距離はどれ程の長さになるか。

   (2) すべり台の傾斜はどのような角度か。

   (3) 子供が滑り降りるまでにかかる時間はどれほどか。



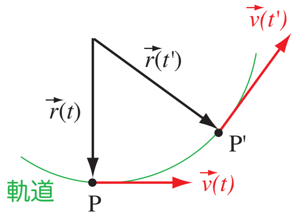
3. 気球が地上から一定の速さ v で空へ昇っていく。気球は出発点から距離 R 離れた場所から望遠鏡で観測されている。そして、気球を見る角度 θ は時間の関数として記録される。

   (1) 角度 θ を R,v,t で表す式を導きなさい。

   (2) $\dfrac{d\theta}{dt}$ を t の関数として表す式を求めなさい。

   (3) 上昇時間が十分に長くなれば, $\dfrac{d\theta}{dt}$ は $\dfrac{R}{vt^2}$ のように近似できることを示しなさい。

1.5 加速度



一般の運動では速度ベクトルは時間とともに変化する。大きさ（速さ）だけでなく, 方向の変化もベクトルとしては変化したことになる。位置ベクトルの時間変化を表すものが速度ベクトルであったが, これとまったく同様にして, 速度ベクトルの時間変化を表すベクトルとして 加速度 を定義する。記号などをまとめると

時刻	t	t'	時刻 $\Delta t = t' - t$ の間の
位置	P $\vec{r}(t)$	P' $\vec{r}(t')$	速度変化
速度ベクトル	$\vec{v}(t)$	$\vec{v}(t')$	$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t') - \vec{v}(t)$

であるような状況を考える。加速度は速度ベクトルの時間変化として定義されるので, 一般には加速度もまた時間の関数となる。したがって, 加速度ベクトル $\vec{a}(t)$ は

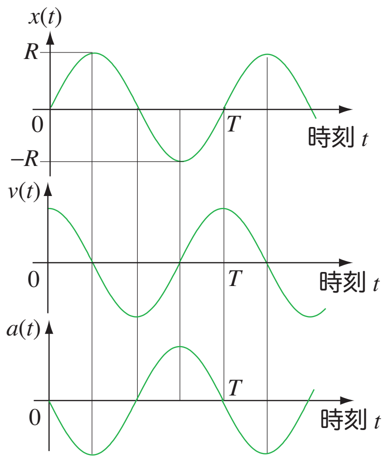
$$
\begin{aligned}
\vec{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t)) &= \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \\
&= \left(\frac{dv_x(t)}{dt}, \frac{dv_y(t)}{dt}, \frac{dv_z(t)}{dt} \right) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}
\end{aligned}
$$

のように 速度ベクトルの時間微分となることが分かる。また, 速度ベクトルは位置ベクトルの時間微分 $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}$ だったから, 加速度ベクトルは

$$
\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}, \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \frac{d^2z(t)}{dt^2} \right)
$$

のように 位置ベクトルの２階微分であることが分かる。

例題：ブランコあるいは単振動（その２）



P7 で議論したブランコ（単振動）の加速度について考える。ブランコの位置 $x(t)$ と速度 $v(t)$ は

$$
x(t) = R \sin 2\pi \frac{t}{T}, \qquad \vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{2\pi R}{T} \cos 2\pi \frac{t}{T}
$$

のようになっていた。加速度は $a(t) = \dfrac{dv(t)}{dt}$ によって計算すればよいので

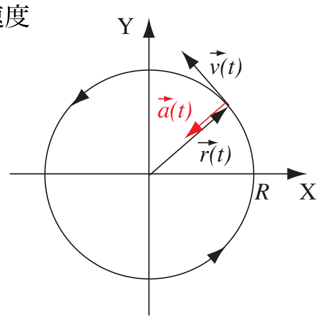
$$
a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R \sin 2\pi \frac{t}{T}
$$

となる。この加速度 $a(t)$ の式と位置 $x(t)$ の式を見比べると

$$
a(t) = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x(t)
$$

という関係が成立していることが分かる。これは単振動の場合, 一般に成立する関係式である。

例題：円運動（その２）



P8 で議論した円運動の加速度ベクトルについて考える。等速円運動の位置ベクトルと速度ベクトルは

$$
\vec{r}(t) = \left(R\cos 2\pi \frac{t}{T}, R \sin 2\pi \frac{t}{T} \right), \qquad \vec{v}(t) = \left(-\frac{2\pi R}{T} \sin 2\pi \frac{t}{T}, \frac{2\pi R}{T} \cos 2\pi \frac{t}{T} \right)
$$

であった。これより, 加速度ベクトルを求めると

$$
\vec{a}(t) = \left(\frac{dv_x(t)}{dt}, \frac{dv_y(t)}{dt} \right) = \left(-\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R \cos 2\pi \frac{t}{T}, -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R \sin 2\pi \frac{t}{T} \right)
$$

という結果が得られる。この式と位置ベクトル $\vec{r}(t)$ の式を比較すると

$$
\vec{a}(t) = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \vec{r}(t) \tag{1.5.1}
$$

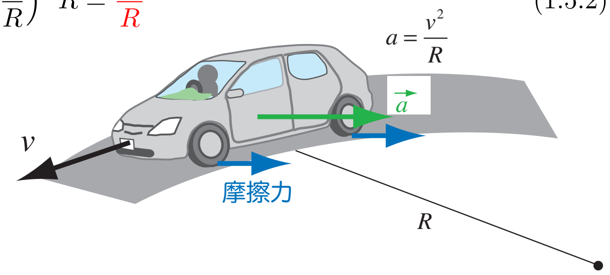
という関係が成立している。このことから, 等速円運動の加速度ベクトルは常に中心方向を向いていることが分かる。

また, 式 (1.5.1) から加速度の大きさを計算してみると

$$a(t) = |\vec{a}(t)| = \left| -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \vec{r}(t) \right| = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 |\vec{r}(t)| = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$$

となり, 一定の大きさであることが分かる。また, 等速円運動の速さについては $v = \dfrac{2\pi R}{T}$ (8 ページ, 式 (1.4.1)) という関係が成り立っていた。この関係を使って, T を消去してみると, 加速度の大きさは

$$a = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = \left(\frac{v}{R}\right)^2 R = \frac{v^2}{R} \tag{1.5.2}$$



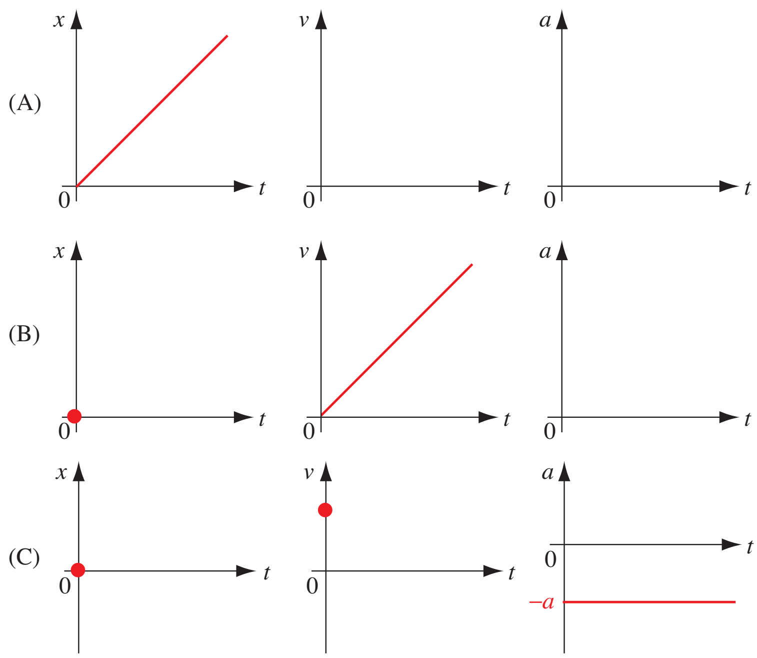
と表すことができる。つまり, 等速円運動をする物体の加速度は, 速さの二乗で大きくなり, 円の半径に反比例するのである。諸君の中にはこれから運転免許を取得しようと考えている者も多いだろう。あるいは, すでに自動車の運転をしている者もいるだろう。式 (1.5.2) の関係は, 車でカーブを曲る前には, 十分に減速をする必要があることを教えてくれている。車がカーブを曲るためには, 車に加速度が生じなければならない。この加速度はタイヤと道路の摩擦によって生じるものなのである。(詳しい説明はニュートンの運動方程式による。) 摩擦には限界がある。すなわち, 車に生じる加速度にも限界 $a_{\max}$ がある。式 (1.5.2) の関係から

$$v_{\max} = \sqrt{a_{\max} r}$$

がカーブを曲ることができる最大の速さとなる。もし, この速さ $v_{\max}$ より大きな速さでカーブに突入すると, どのようなことが起きるかは, 2005 年に起きた JR 脱線事故が悲惨さとともに教えてくれている。この事故は, 速度が 70 km/h 以下と制限されていたカーブに, 166 km/h で進入したことが原因とされている。また, 半径 R が小さいカーブの場合は, 許される最大の速さ $v_{\max}$ が小さくなることは簡単にわかるだろう。半径が小さなカーブ, すなわち, 急なカーブの場合には, より十分に速度をおとしてからカーブに入っていく必要がある。

練習問題

1. 右図のように, (A) の場合は $t-x$ の関係, (B) の場合は $t-v$ の関係, (C) の場合は $t-a$ の関係が分かっているものとする。それぞれの場合について, 残りのグラフを完成しなさい。ただし, (B) と (C) の場合については, 時刻 $t=0$ での x や v が ● で示した値であるとする。



2. あるジェット機が速度 100 m/s で着陸し, 静止するまでにエンジンを逆噴射して, 後方に最大限 5.0 m/s^2 の加速度を発生させることができるとする。

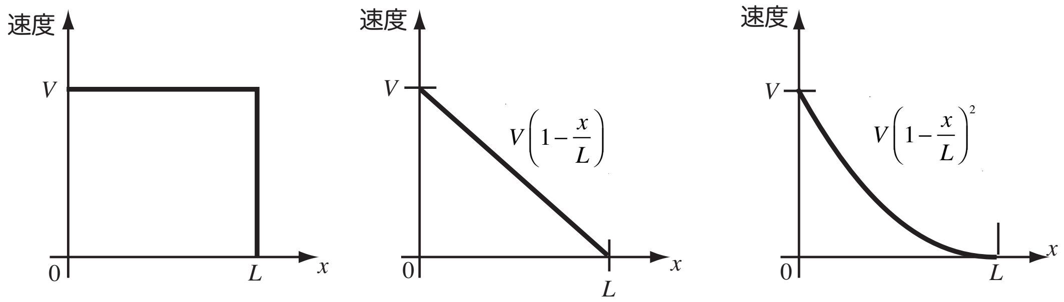
   (1) 滑走路に着地した瞬間から停止するまでの最小の時間をもとめなさい。

   (2) この飛行機は小さな島にある長さ 0.8 km の飛行場に着陸することができるだろうか。

3. 地球をまわる月の軌道はほぼ円形であり, 平均半径は 3.84×10^8 m である。月が完全に地球のまわりを一周するには 27.3 日を要する。

(1) 月の速さを求めよ。　　　(2) 月の加速度を求めよ。

4. ゼノンは, 走者が一定の速さで走る場合でも, 走者は終点に到達できないという誤った結論を導いた。ここでは, 走者が常に同じ方向に距離 L 走り, 静止するのは終点においてだけであるとする。それでも, 走者が終点に到達するのには無限の時間が必要な例がある。



(a) 速度一定の場合　(b) 速度が位置とともに 1 次関数的に減少する場合　(c) 速度が位置とともに 次関数的に減少する場合

(1) (a)〜(c) の場合について, 走者の位置を時間の関数として表す式を求めよ。

(2) (a)〜(c) の場合について, 位置と時間のグラフを示せ。

(3) 走者が (b) や (c) に示したように走る場合, 有限の時間では終点に到達できないことを示せ。

5. 映画のカメラは毎秒 20 コマの割合で映像を撮影するものとする。馬車の疾走の場面をフィルムに撮影した。
　車輪は 18 本のスポークを持ち, 半径は 0.75 m であるとする。映画を上映したとき, 車輪が静止して見える　ことを発見した。

(1) 馬車の速さについてどのようなことが分かるか。

(2) 車輪が回転していないように見える馬車の速さ v を, スポークの本数 N, 車輪の半径 R, 1 秒あたりのコマ数 M を用いて一般的に表せ。

6. 半径 a の円板が, 一つの平面内で一つの直線に接しながら滑ることなく転がっている。円板の中心が速度 V で動いているとする。

(1) 単位時間あたりの回転の角度を角速度という。円板の角速度が

$$\omega = \frac{V}{a} \quad \text{〔rad/s〕}$$

で表すことできることを示せ。

(2) 時刻 $t = 0$ のとき, 円板上の点 P が原点にあったとし, 時刻 t のとき角度 $\theta(t)$ だけ回転したとする。点 P の座標 $(x(t), y(t))$ を $V, t, a, \theta(t)$ を用いて表せ。(角速度は $\omega = \dfrac{d\theta(t)}{dt}$ と表すことができる。)

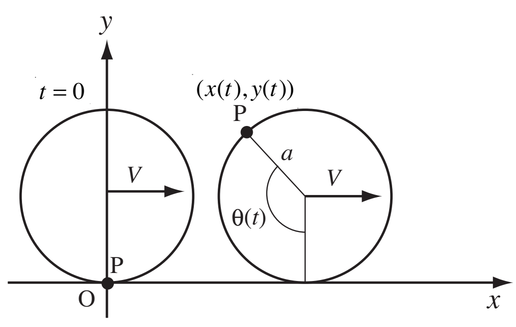
(3) 点 P の速度を $V, a, \omega, \theta(t)$ を用いて表せ。

(4) 点 P の加速度を $a, \omega, \theta(t)$ を用いて表せ。ただし, 円板は一定の角速度で回転しているので $\dfrac{d^2\theta(t)}{dt^2} = 0$ である。

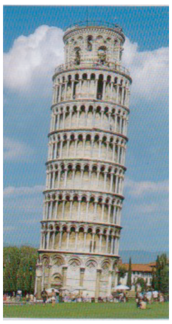
(5) 点 P の加速度が円板の中心方向を向いていることを示せ。

(6) 円板が直線と接している点の速度は中心の速度 V によらずに常にゼロであることを示せ。

(7) 円板の最上点の速度が $2V$ であることを示せ。



1.6 自由落下

リンゴはその茎により枝から離れないように束縛されており，リンゴは束縛から開放されると地面に向けて落下する。地球上のすべての物体は，束縛から開放されるとほぼ一定の加速度で落下することがよく知られている。この事実は ガリレオ・ガリレイ が，ピサの斜塔から同時に落とした重さの異なる 2 つのおもりがほぼ同時に地面に落ちるのを観察して発見した，という有名な逸話がある。この実験が実際に行われたかどうかについての真相は怪しいが，ガリレオが斜面上を運動する物体を使って多くの実験を行ったことはよく知られた事実である。

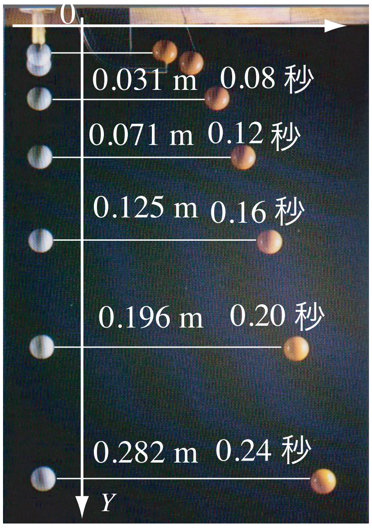
簡単にできる実験として，くしゃくしゃにした紙切れとコインとを同時に同じ高さから落としてみよう。空気の抵抗がなければ，両者には同じ運動が起こり，同時に床に落ちるだろう。空気の抵抗を無視できる理想的状況で起きるこのような運動を 自由落下 と呼ぶ。

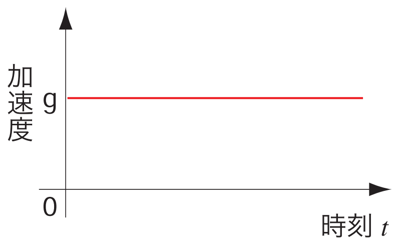
物体が落下するのは，物体に地球が物体を引っ張る力 重力 が働いているためである。地球表面近くにある物体に働く重力によって生じる加速度を $\vec{g}$ で表し 重力加速度 と呼ぶ。

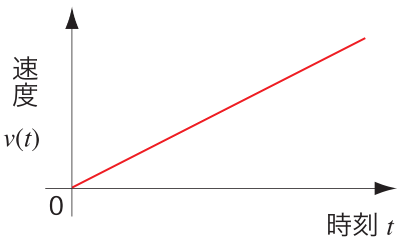
ベクトル $\vec{g}$ の向きは地球の中心に向かって下向きである。$\vec{g}$ の大きさは高度が増すとともに小さくなり，緯度によっても多少異なるが，地表近くでは，ほぼ

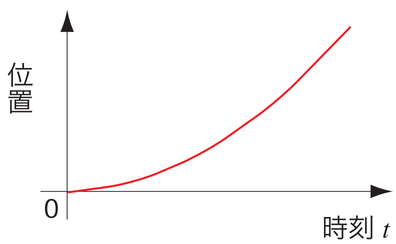
$$g = 9.8 \quad \mathrm{m/s}$$

である。とくに断らないかぎり，計算にはこの値を採用する。また，簡単のために 10 m/s と近似してもよい。









自由落下する物体がどのような運動をするか調べてみよう。左図のように時刻 $t = 0$ で物体が落下を始めたとする。座標軸 Y は下向きを正の向きととる。時刻 t〔s〕での物体の速度を $v(t)$〔m/s〕と書くと，加速度は速度の時間微分なので

$$\frac{dv(t)}{dt} = g$$

と書ける。この式の両辺を時刻 0 から t まで時間の変数 t について積分すると

$$\int_0^t \frac{dv(t)}{dt} dt = \int_0^t g dt \quad \Longrightarrow \quad v(t) - v(0) = gt$$

となる。ここで，時刻 $t = 0$ での速度は $v(0) = 0$ なので

$$v(t) = gt$$

であることが分かる。さらに速度は位置の時間微分なので

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = gt$$

と書ける。この式の両辺をもう一度時刻 0 から t まで時間の変数 t について積分すると

$$\int_0^t \frac{dy(t)}{dt} dt = \int_0^t gt dt \quad \Longrightarrow \quad y(t) - y(0) = \frac{1}{2}gt^2$$

となる。ここで，落下が時刻 $t = 0$ で，座標の原点から始まったとすると，$y(0) = 0$ なので

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

であることが分かる。

次に，最初水平方向に速度 v_0 で打ち出された場合の運動について考える。速度の向きが右方向ならば，X 軸を水平方向右向きにとるのが便利であろう。時刻 t の X 方向，Y 方向の速度成分を $v_x(t), v_y(t)$ と書くと，速度と加速度の関係は

$$\frac{dv_x(t)}{dt} = 0, \qquad \frac{dv_y(t)}{dt} = g$$

となる。ここで，重力は下向き（Y 軸方向）にしか働かないので，X 方向の加速度はゼロである。

それぞれの式の両辺を時刻 0 から t まで時間変数 t について積分すると

$$v_x(t) - v_x(0) = 0, \qquad v_y(t) - v_y(0) = gt$$

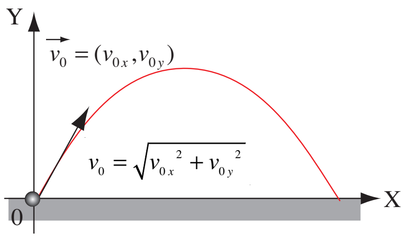
が得られる。ここで, 時刻 $t = 0$ において, 物体は水平方向に打ち出されたので $v_x(0) = v_0$, $v_y(0) = 0$ である。したがって,

$$v_x(t) = v_0, \qquad v_y(t) = gt$$

であることが分かる。さらに, これらの式の両辺を積分して, 時刻 $t = 0$ での座標の値 $x(0) = 0, y(0) = 0$ を代入すれば

$$x(t) = v_0 t, \qquad y(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

であることが分かる。



最後に, ボールをななめ方向に速度 (v_{0x}, v_{0y}) で投げ上げたときのボールの運動について考える。この場合は, Y 軸の正の向きを上向きにとるのが便利であろう。時刻 t の速度 $(v_x(t), v_y(t))$ と加速度の関係は

$$\frac{dv_x(t)}{dt} = 0, \qquad \frac{dv_y(t)}{dt} = -g$$

である。ここで, Y 軸方向の加速度にマイナスが付いていることに注意しよう。重力加速度が下向きであることを表している。
時刻 $t = 0$ に座標の原点からボールを投げたとすると, これまでの議論と同じ要領で加速度の式の両辺を積分して

$$v_x(t) = v_{0x}, \qquad v_y(t) = v_{0y} - gt$$

を得る。さらに, 速度の式の両辺を積分すれば

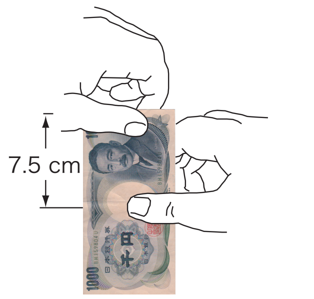
$$x(t) = v_{0x}t, \qquad y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

となることが分かる。この $x(t)$ と $y(t)$ の時間変化について, 2 つの式から時間の変数 t を消去すると, ボールの軌道が

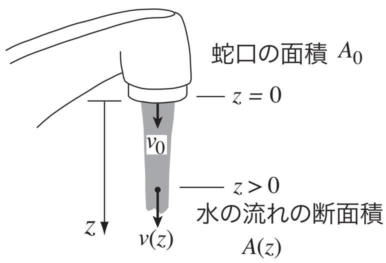
$$y = -\frac{g}{2{v_{0x}}^2}x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x$$

という 2 次関数（放物線）となることが分かる。

練習問題



1. 図のように、一人は千円札の一方の端を持ち、中央がもう一人の親指と　人指し指の間にあるようにぶらさげる。親指と人指し指を動かすことが　できるのは、紙幣が落下を始めてからとする。紙幣は自由落下するものとする。
   a) 落下を始めた紙幣を親指と人指し指で捕まえるためには、どれ程敏捷に反応しなければならないか。
   b) 平均的な人の反応時間は約 1/5 秒である。親指と人指し指をどのような位置に用意すれば紙幣を掴む可能性がでてくるか。

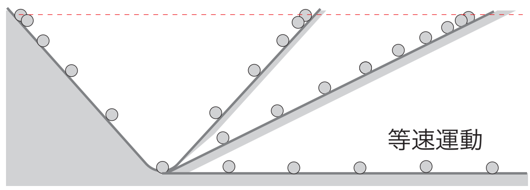


2. 水道の蛇口から小さい速度 v_0 で流れ出る水の細い流れは図に示した　輪郭を持っていることを見たことがあると思う。
   a) 蛇口から下方の水の各部分は自由落下をしているものとして、距離 z だけ下のところでの水の速度は $v(z) = \sqrt{{v_0}^2 + 2gz}$ であることを示せ。
   b) 断面積 A_0 の蛇口を通って流出する水の量はいくらか。
   c) $z = 0$ で面積 A_0 の蛇口を通過する全流量は、蛇口から距離 z だけ下方の水平面を通過する全流量に等しくなければならない。この流量を $A(z)$ と $v(z)$ を用いて表せ。$z = 0$ と $z > 0$ の流量が等しいという条件から, 水の流れの断面積 $A(z)$ を表す式を求めよ。

3. 標的 ● を狙う角度 θ の方向に物体 ● を速さ v で発射する。物体を発射した時刻　を $t = 0$ とし，物体の発射と同時に標的は真下に落下する。
   a) 標的と物体は必ず衝突することを示せ。物体の最初の位置と標的の水平距離を ℓ とせよ。
   b) 衝突が $y > 0$ の領域で起きるためには $v > \sqrt{\dfrac{g\ell}{\sin 2\theta}}$ の条件が必要であることを示せ。

誰でも日常の経験から,「力」とな何かについて基本的なことは知っている。物を動かすときは, それを押したり引いたりして力を加える。ボールを投げたり蹴ったりするときも力を加える。これらの例では筋肉の活動によって生じた力が物体の運動に変化を与えている。とはいえ, 力は必ずしも物体の運動に変化を生じさせるとは限らない。たとえば, 君がこのプリントを読みながら座っているとき, 重力という力が君の身体に働いているが, 君は静止したままである。非常に重たい物を必死に押しても動かないこともある。

ガリレオ・ガリレイは斜面を転がる玉についての「思考実験」によって,「物体が動く」ということについて明解な説明を行った。図のように, 右下がりの斜面を玉が転がり落ちていく。下まで落ちたところで上り坂の斜面に移る。斜面と玉の間に摩擦がないようにしておけば, 玉は転がる前の高さまで昇っていくだろう。次に, 斜面を少し緩やかにしてみる。それでも, 玉は最初の高さまで昇っていくばずである。ならば, 右の斜面を

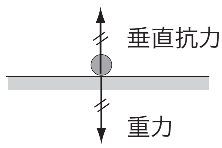


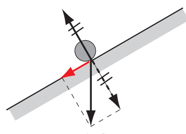
ガリレオの思考実験

水平にしてしまうとどうなるだろう。玉はけっして最初の高さに到達することはないので, いつまでも同じ速度で右へ向かって転がり続けるだろう。すなわち, 動いている物体は, 何ごともなければ, 動き続けるのである。このような運動についての一般的特徴を「慣性の法則」と呼ぶ。

物体にいくつかの力が同時に働いている状況を考えてみよう。この場合, 物体に働いている力ベクトルの総和がゼロでないときに限り物体の運動に変化が生じる。静止状態も速度がゼロの等速運動に含めると, 等速運動をしている物体は, 何ごともなければ, その状態を保ち続けるのだから,「運動の変化」とは速度の変化, すなわち, 加速度が生じることを意味している。

ガリレオの思考実験で斜面を昇る玉と水平面を等速運動する玉に働く力について確認しておこう。摩擦は物体と斜面の表面の物質（原子・分子）の間に働く力によって生じる。双方の表面がデコボコになっていて, そのようなデコボコがはまったり, 離れたりすることで物体の面に沿った運動を妨げるような力が発生する。（摩擦力の正体は電気力である。）したがって, 摩擦による力は斜面に沿って, 物体の動いていく向きと逆向きとなる。したがって, 摩擦がないような滑らかな斜面の場合, 斜面が物体におよぼす力は斜面と垂直な向きだけとなる。では, 斜面は物体にどのような大きさの力をおよぼすのだろう。試しに君の机の面を手のひらで押してみよう。君が押した力に相応して机が君を押し返していることを感じるだろうか。例えば, 横綱に君が挑みかかることを考えてもよい。横綱と押し合いをするのだが, 当然, 横綱が力一杯で君を押せば, 君は簡単に跳ね飛ばされてしまうだろう。横綱には力を加減してもらって, 君と押し合いを続けられるようにしてもらおう。このとき, 横綱が出している力は, 君が横綱を押している力とちょうど同じ大きさとなっているはずである。以上のことから, 物体が斜面を押せば, 斜面はちょうど同じ大きさの力で押し返すことが分かる。このような斜面が物体を斜面と垂直な向きに押し返す力を「垂直抗力」と呼ぶ。斜面が水平の場合, 物体は物体に働く重力で面を押す。すると, 面は同じ大きさの力で押し返すのだから, この物体に働いている力ベクトルの総和はゼロである。斜面が傾いている場合, 物体が斜面を押す力は重力全体でないことに注意する必要がある。重力のベクトルの斜面と垂直な成分が斜面を押す力となる。垂直抗力はこの成分と同じ大きさで逆向きとなり, 斜面と垂直な方向の力ベクトルの総和はゼロとなる。しかし, 重力の斜面方向の成分にはつり合う相手がないので, 物体に働く力ベクトルの総和はゼロでない。したがって, 斜面を昇る玉には斜面下向きの力が働き運動に変化が生じる（減速）ことになる。





以上の議論をまとめると,

「物体に力が働いていなければ, 物体は静止または等速直線運動をする」

「物体に力が働くと, 物体は加速度運動をする」

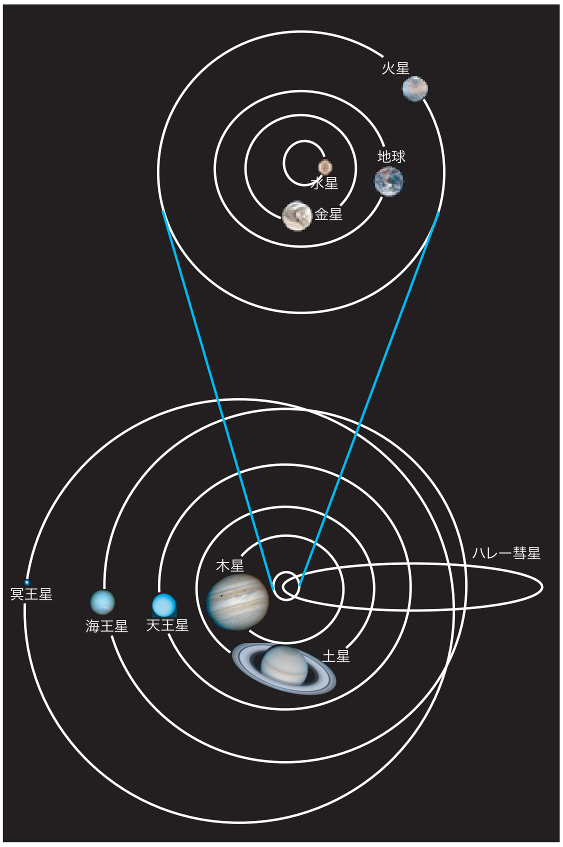
ということになる。では, 「力」にはどのような法則性があるのだろう。このことに答えるには「なぜ力が生じるのか」「どのように力が働くのか」について知る必要がある。このために「力」と「加速度」にはなんらかの関係があることを手がかりとしよう。「物体に力が働くと, 物体は加速度運動をする」ということから導かれる最も簡単な関係

$$\vec{F} \propto \vec{a} \qquad (\propto \text{ は比例を意味する})$$

を仮定して重力について調べてみよう。

1.7.1 重力

ニュートンの時代以前にも, 月と惑星について膨大な量の天文観測のデータが集められていたが, これらの天体の運動がどのような力によるものか, 明解な理解はされていなかった。ニュートンは「慣性の法則」から月あるいは惑星には力が働いていなければならないことを知っていた。さもなければ, 月は円軌道を描く代わりに直線運動をしてしまうからである。



惑星の公転

ケプラー (1571-1630) は, それまでの膨大な天文データを整理して(もちろん計算機などないので手で計算した)惑星の運動について３つの法則があることを発見していた。ケプラーの法則は

１）惑星は太陽を焦点（中心）とする楕円軌道を描く

２）惑星の（面積）速度は一定

３）惑星の公転周期と軌道半径には簡単な関係がある

$$\text{公転周期}^2 \propto \text{長半径}^3$$

	T〔年〕	r〔AU〕	T^2/r^3
水星	0.2409	0.3871	1.000
金星	0.6152	0.7233	1.000
地球	1.0000	1.0000	1.000
火星	1.8809	1.5237	1.000
木星	11.862	5.2026	0.995
土星	29.458	9.5549	0.995
天王星	84.022	19.2184	0.995
海王星	164.774	30.1104	0.995
冥王星	247.796	39.5402	0.993

1AU（天文単位）$=1.496 \times 10^{11}$ m

というものである。

このような法則, 特に第３法則, がなぜ成り立っているのだろう。太陽を中心として半径 r の円軌道を速さ v で回っている惑星について考えてみる。1.5 加速度の章でわかったように, この惑星は太陽の方向を向いた大きさ $\dfrac{v^2}{r}$ の加速度を持っている。この加速度を生じさせているのは, 間違いなく太陽であろう。この力の大きさは太陽からの距離によって変わるだろうから $F(r)$ と書いておく。ところで, 力と加速度には比例関係があると仮定したので

$$\text{加速度 } \frac{v^2}{r} \propto \text{力 } F(r)$$

という関係を認めることになる。惑星の公転周期は円軌道を一周するのにかかる時間だから

$$\text{公転周期 } T = \frac{2\pi r}{v}$$

と書くことができる。したがって, ケプラーの第３法則から

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 r^2}{v^2} \propto \frac{(2\pi)^2 r^2}{rF(r)} \propto r^3$$

という関係が成立する。これから, 力の大きさは距離によって

$$F(r) \propto \frac{1}{r^2}$$

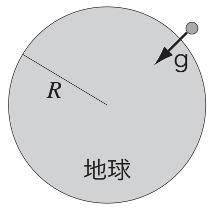
のように変化することが分かる。この関係式は太陽を中心とする惑星の運動に関して導かれたのであるが, 太陽が中心でなければ成り立たないのであれば, 一般的な物理法則として採用することはできない。

そこで, 地球を中心とする問題について考えてみよう。地球の中心から半径 r の位置にある物体が加速度 $a(r)$ を持っていれば, ここまでに議論した２つの比例関係

$$a(r) \propto F(r) \qquad \text{および} \qquad F(r) \propto \frac{1}{r^2}$$

が成立する。このことから, 加速度 $a(r)$ は $1/r^2$ と比例することが分かる。比例定数を k としておくと

$$a(r) = k\frac{1}{r^2}$$

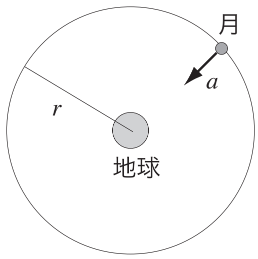


と書くことができる。地球表面近くの物体は重力加速度 g で自由落下することが分かっているので, 地球の半径を R とすると

$$g = k\frac{1}{R^2} \qquad \Longrightarrow \qquad k = gR^2$$

のように比例定数 k を求めることができる。月は地球による重力によって円軌道を回っていると考えられる。 P9 で調べたように周期 T で半径 r の円軌道を回る物体は

$$a = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$



という大きさの加速度を持つ。この加速度は地球の重力によって生じているとすれば

$$a = k\frac{1}{r^2}$$

という関係を持つ。比例定数 k を地球の半径 R と重力加速度 g を用いて書いて, **月が地球を１周する時間** T を求めると

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{gR^2}}$$

のようになることが分かる。この式に具体的な数値, 重力加速度 $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$, 地球の半径 $R = 6.37 \times 10^6\ \mathrm{m}$, 月の軌道半径 $r = 60.1 \times R$ を代入して計算すると

$$T = 2.36 \times 10^6\ 秒 = 27.3\ 日$$

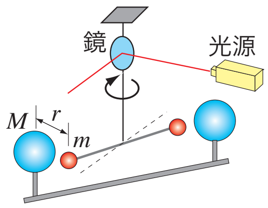
となり, **実測値と一致することが分かる。**

以上のことから, $F(r) \propto \frac{1}{r^2}$ という法則は対象を問わずに成立する法則であると考えられる。さらにニュートンは, 運動についての一般的考察から, 距離 r 離れた２つの物体（質量 m と M）にはお互いに引き合う力が働き

$$F(r) = G\frac{mM}{r^2}$$

と表すことができるとした（1687 年）。これを万有引力の法則という。ここで, 比例定数 G は物体の種類や距離とは無関係の定数である（重力定数）。

1798 年, キャベンディッシュは万有引力の法則を実験室で確かめ, 重力定数 G を求めた。キャベンディッシュの装置は右の図のようなものであり, 細い糸で吊るした軽い水平な棒の両端に質量 m の小さな球を付ける。次に, 質量 M の２つの大きな球を小さな球の近くに置く。小さな球と大きな球の間には万有引力が働くので, 棒が回転して, 吊るした糸をねじる。ねじれた糸には元へ戻ろうとする力が生じる。この力の大きさはねじれた角度に比例する。したがって, ねじれの角度を測定することで, 大きな球と小さな球の間に働く万有引力の大きさを知ることができる。現在の測定によると

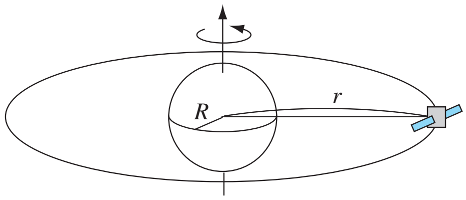


$$G = 6.673 \times 10^{-11}\ \ \mathrm{m^3/kg/s^2}$$

である。

練習問題

赤道面上に円形の軌道を描く人工衛星が打ち上げられた。この衛星の軌道は半径 r で, 衛星は地球と正確に同じ回転速度を持ち地球から見ると静止している。地表での重力加速度 g , 地球の半径 R , 地球の自転周期 T を用いて衛星の軌道半径 r を表す式を導きなさい。$g = 10$ m/s^2, $R = 6.3 \times 10^6$m として衛星の軌道半径を数値で求めなさい。



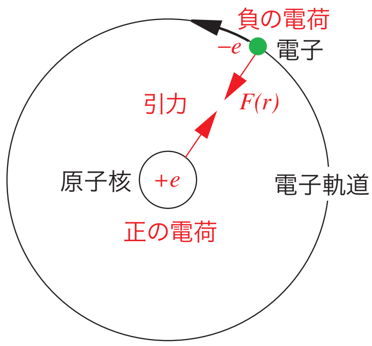
1.7.2 電気力

多くの簡単な実験を通して電気力および電荷の存在を実証することができる。たとえば, プラスチックの下敷きで頭を擦ると髪の毛が下敷きに引き付けられる。もう 1 つの例として, 風船を毛糸で擦る簡単な実験をすることができる。2 つの風船を毛糸で擦って互いに近付けようとすると, 大きな力で反発することを体験することができる。このように, 電気力には引力と斥力が存在することが分かる。

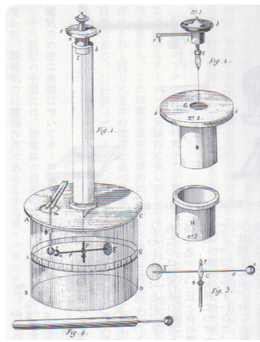
物質が持つ電荷は, その物質の原子構造によって説明される。最も簡単な構造を持つ原子は水素原子であり, 右の図のように中心に正の電荷を持つ原子核があり, その周囲を負の電荷を持つ電子が円軌道を周回している。原子核と電子の電荷は符号が異なるだけで, 大きさは等しく

$$e = 1.60217733 \times 10^{-19}\mathrm{C}$$

という値である。電荷を測る単位は C と書いてクーロンと読む。水素原子の電子は原子核から電気力によって中心方向の力を受けて円軌道を周回している。この様子は, あたかも, 太陽を中心として周回する惑星の運動と同様である。



クーロン（1736 - 1806）は, 右図のようなキャベンディッシュの実験と同様な装置を用いて, 電荷に働く力の法則性を調べた。その結果



1. 力は 2 つの電荷間の距離 r の 2 乗に反比例し，2 つの電荷を結ぶ線上にある。
2. 2 つの電荷を q と Q とすると, 力は積 qQ に比例する。
3. 電荷の符号が反対であるとき, 力は引力であり, 電荷が同じ符号のときは斥力である。

これらの観測結果から，2 つの電荷間の電気力の大きさを次のように表すことができる。

$$F(r) = k\frac{|q||Q|}{r^2}$$

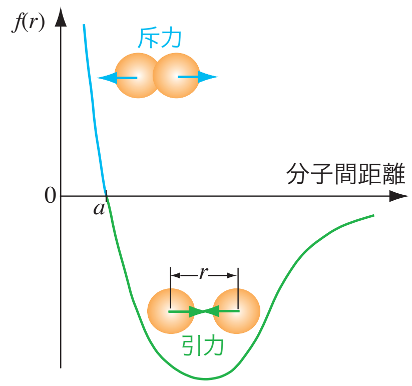
ここで, k は定数で $k = 8.9875 \times 10^9$ kg m^3 /s^2/C^2 という値であることが知られている。クーロンの実験によれば, r の指数は誤差数%の精度で 2 であった。近代的な実験ではこの指数が誤差 $1/10^{15}$ の精度で 2 であることを示している。

電気力について実験を行ったクーロンがこのような結果を得たときの驚きは大変なものだったであろう。クーロンが実験を行ったときには, すでにニュートンによって，2 つの質量を持つ物体には「重力」が働き, その力の大きさは

$$F(r) = G\frac{mM}{r^2}$$

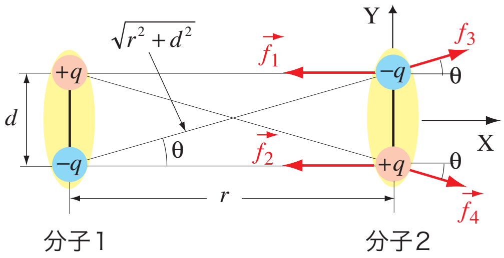
という式でまとめることができることが示されていた。クーロンは電荷を持つ物体に働く力について調べたのであるが, 「電気力」と「重力」は全く異質の力である。それにも拘らず, 両者の力の大きさを表す式は全く同じ形式を持っている。このような結果は偶然の産物であると片付けることもできようが, 何らかの理由があると考えることが自然であろう。実は，2 つの物に働く「力」が距離の 2 乗に反比例し，「物の性質」（質量や電荷）の積に比例するという法則は自然界において広く見られるものである。そのことは簡単な考察によって調べることができる。（講義で）

1.7.3 分子間力（ファンデルワールス力）



すべての原子や分子は「分子間力」（van der Waals 力）による力を作用し合う。右の図は，２つの原子あるいは分子の間の距離 r を横軸に，分子間力を縦軸に表している。分子間力の符号は，正の値の時は斥力を，負の値の時は引力を意味する。２つの原子・分子の距離 r がある距離 a より大きい場合，分子間力は両者をより近付けようとする向きに作用する。一方，２つの原子・分子が距離 a より近付くと，分子間力は斥力となり互いを引き離す方向に働くことになる。（付録 B 原子構造を参照のこと）したがって，複数の原子・分子は互いに距離 a だけ離れて静止することになる。距離 a は $10^{-10}\text{m} = 1\ \text{Å}$（オングストローム）程度である。このような性質を持つ分子間力は，気体を液体に凝結し，また液体を固体に凍結する原因となる。摩擦，表面張力，粘性，付着，凝集等々，よく知られている物質の巨視的性質もまた分子間力に起因する。

分子間力はクーロンの法則に従う電気力が原因で生じる力であり，基本的な力ではない。電気力が働くためには原子や分子が電荷を持つ必要があるが，原子・分子の電荷総量がゼロの場合にも分子間力は発生する。一方，電荷がゼロである原子・分子から電子が取り去られたり（正のイオン），余分な電子が付与されると（負のイオン），これらのイオンの間にはクーロンの法則にしたがう電気力が働くことになる。正イオンと負イオンの間には引力が生じるので両者は結合状態を作る。これをイオン結合という。



それでは，どのようにして電荷を持たない原子・分子に電気力が原因である分子間力が働くのだろう。このことを理解するために，2 原子分子を考える。図のように，分子全体の電荷はゼロであるが，片方の原子は負の電荷を持ち，他方は正の電荷を持つとする。このような電荷の片寄りを「分極」と呼ぶ。正の電荷同士，負の電荷同士が正対するような配置も考えられるが，そのような配置は安定ではなく，回転して図のような配置に落ちくことになる。分子内の原子間距離を d とし，２つの分子が距離 r 離れて置かれているとする（ $r >> d$ ）。このような状況で，分子１が分子２におよぼす力を求めてみよう。

図ように，分子１の $+q$ は分子２の $-q$ に $\vec{f_1}$ の力（引力）を，また，分子１の $-q$ は分子２の $+q$ に $\vec{f_2}$ をおよぼす。この２つの力は向きも大きさも同じであり，図に示したように X-Y 座標を設定すると，クーロンの法則によって

$$\vec{f_1} = \vec{f_2} = \left(-k\frac{q^2}{r^2}, 0\right)$$

となる。さらに，分子１の $-q$ は分子２の $-q$ に $\vec{f_3}$ を，分子１の $+q$ は分子２の $+q$ に $\vec{f_4}$ をおよぼす。これらの力は斥力で

$$\vec{f_3} = \left(k\frac{q^2}{r^2+d^2}\cos\theta, k\frac{q^2}{r^2+d^2}\sin\theta\right), \vec{f_4} = \left(k\frac{q^2}{r^2+d^2}\cos\theta, -k\frac{q^2}{r^2+d^2}\sin\theta\right)$$

となる。ここで θ は図中に示した角度である。したがって，分子１全体が分子２全体におよぼす力は，これら４つの力のベクトル和なので

$$\vec{f_1} + \vec{f_2} + \vec{f_3} + \vec{f_4} = \left(-2k\frac{q^2}{r^2} + 2k\frac{q^2}{r^2+d^2}\cos\theta, 0\right)$$

となることが分かる。ここで $r >> d$ として

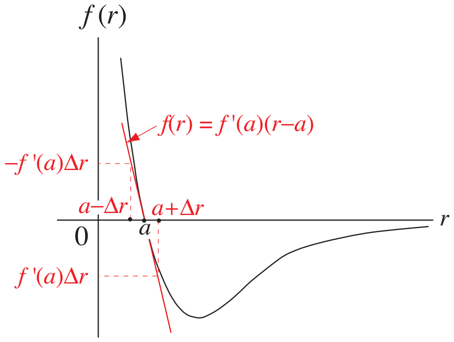
$$\cos\theta = \frac{r}{\sqrt{r^2+d^2}}, \quad \frac{1}{r^2+d^2}\cos\theta = \frac{r}{r^3}\left[1+\left(\frac{d}{r}\right)^2\right]^{-3/2} \simeq \frac{1}{r^2}\left[1-\frac{3}{2}\left(\frac{d}{r}\right)^2\right] \quad \text{(近似 } (1+\delta)^\alpha \simeq 1+\alpha\delta \text{ を用いた)}$$

であることを用いると，

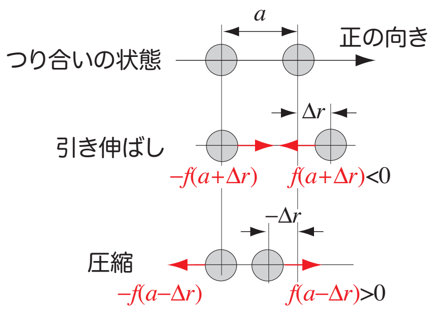
$$\vec{f_1} + \vec{f_2} + \vec{f_3} + \vec{f_4} = \left(-3k\frac{(qd)^2}{r^4}, 0\right)$$

となり，２つの分子間に引力が働くことが分かる。分子間距離が a より短いときに斥力となるのは，２つの原子・分子の電子雲が重なることによって生ずるものである。

1.7.4 弾性力（バネの力）

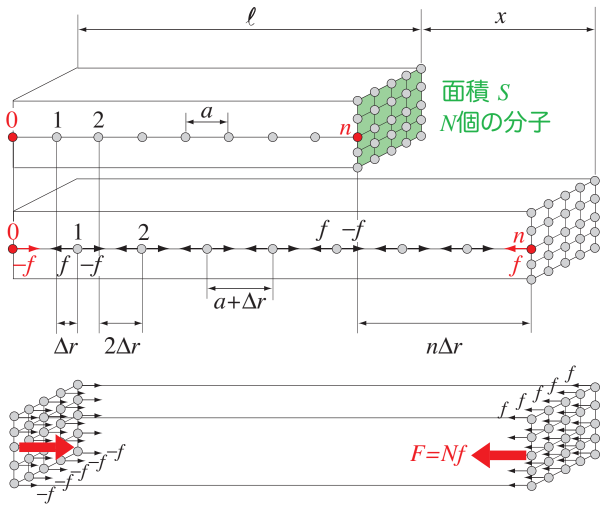


多くの固体では, 物質を構成する原子・分子が規則正しく配列している。このような秩序を維持しているのは分子間力である。分子間力は, 図のように分子の中心からある距離 a の位置で力の大きさがゼロとなり、a より近付くと急激に斥力が増大してそれ以上近付くことを許さない。他方, a より遠方では引力が働くが、その大きさは緩やかに減少していく。物質中の原子・分子は隣り合う原子・分子と距離 a 離れて位置している。距離が a より大きくなると近付こうとする力（引力）が働き、距離が a より小さくなると離れようとする力（斥力）が働くことが分かる。原子・分子間距離が a からわずかに Δr だけずれているとき、分子間力を表す関数 $f(a+\Delta r)$ を $r=a$ の位置での接線の式で近似すると



$$f(a+\Delta r)\simeq f'(a)\Delta r$$

のように表すことができる。ここで, $f'(a)<0$ であることに注意しよう。さて, 伸び縮みする直方体の棒を引っ張って全体で x だけ伸びたとしよう。このような伸縮性を持ち元の形に戻る性質を持つ物を弾性体という。この状態をミクロに見れば、個々の分子間距離が Δr だけ伸びたものと考えられる。棒の長さ方向に n 個の分子があるとすると, 棒の伸びには

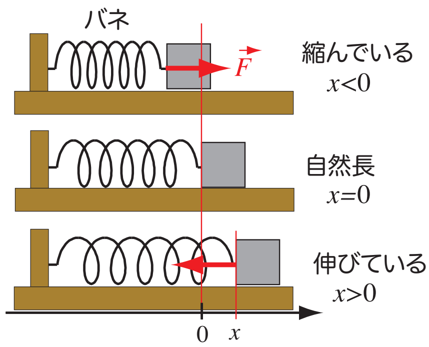


$$x=n\Delta r$$

の関係がある。棒の内部にある分子は, 両隣の分子から引っ張られるので, 力がつり合った状態となっている。しかし, 両端の断面に並んでいる分子には片側の力しか働かない。このため, 棒の両端には伸びが戻ろうとする向きの力が発生する。断面に N 個の分子が並んでいれば, 棒の右端に生じる力は

$$F=Nf(a+\Delta r)$$

となる。この式に分子間力についての近似式と, 棒の伸びについての関係式を代入すると



$$F=Nf(a+\Delta r)\simeq Nf'(a)\Delta r=Nf'(a)\frac{x}{n}$$

のように書くことができる。ここで, $f'(a)<0$ であることを思い出して

$$-k=\frac{N}{n}f'(a)$$

のように定数 $k>0$ を導入すると, 棒の右端に発生する力は

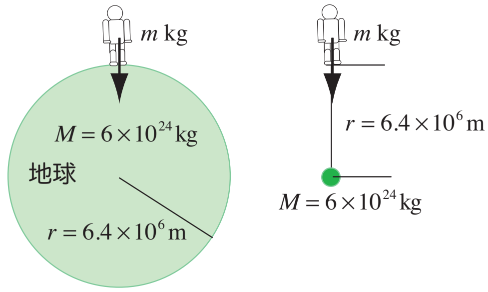
$$F=-kx$$

と表すことができる。この関係式でマイナスの符号が付いているのは, 棒の伸び $x>0$ のとき, 棒（右端）に発生する力の向きが伸びる方向と逆を向いていることを意味している。したがって, 棒が縮んでいるときは $x<0$ であって, 棒の右端に生じる力は右向き, すなわち $F>0$ となる。伸び縮みの向きと力の向きを明示するためにベクトルの記号を用いると

$$\vec{F}=-k\vec{x}$$

のように表すことができる。このように変位と発生する力の間の比例関係をフックの法則と呼ぶ。また, 比例定数 k は弾性体の長さ, 断面積, 物質の種類などで決まる定数で, バネ定数と呼ばれる。

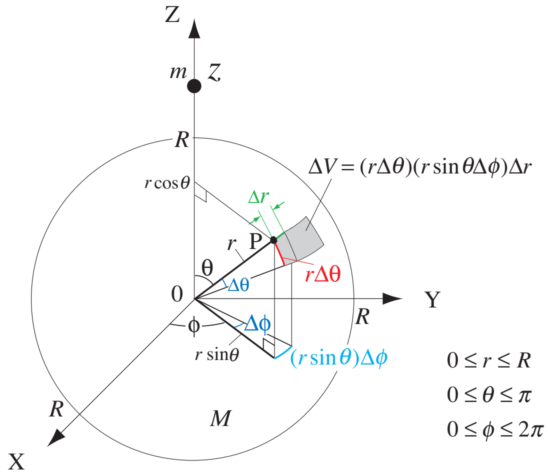
1.7.5 大きさのある物体による重力（もしくは電気力）



万有引力の法則 $F=G\dfrac{mM}{r^2}$ によって，地球表面の物体 m に働く重力を求めてみよう。

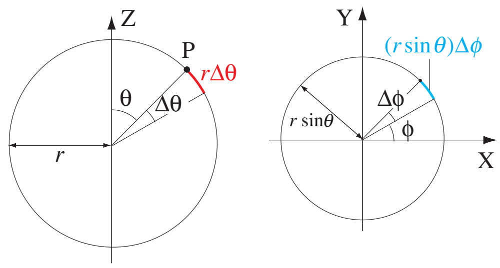
$$F=6.7\times10^{-11}\frac{m\times6\times10^{24}}{(6.4\times10^6)^2}m〔\mathrm{kg}〕\times 9.8〔\mathrm{m/s^2}〕$$

このように m kg の物体に働く重力は mg になっていることが分かる。つまり，重力加速度 g が地球の質量 M，地球の半径 r および重力定数 G から計算できたのだが，これはいったい何の計算をしているのだろう。試しに，地球の質量がすべて中心に集中していて，物体 m が距離 r だけ離れている（右の図）としてみても物体に働く重力は同じであることが分かるだろう。すなわち，質量 M の物体が大きさを持って広がっていようと，質点のように質量が集中していようと，結果は変わらないことを意味している。これは何故だろう。



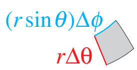
このことを理解するために質量 M が半径 R の球内に一様に分布しているとする。この大きさのある物体が，球の中心から距離 z 離れた場所にある物体（質量 m）におよぼす重力を直接求めてみよう。

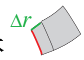
まず，球を細切れにして，非常に小さな部分を作る。このような小さな部分は質点と考えてよいであろうから，各微小部分が物体 m におよぼす重力を求めて，それらを合計することで球全体が物体 m におよぼす重力を求める。球を微小部分に分割するために P4 で紹介した球座標を用いる。まず球の中心から距離 r $(0\leqq r\leqq R)$，Z 軸からの角度 θ, XY 平面内の角度 ϕ で指定される点 P を考える。この点 P は半径 r の球面上に位置している。



- □ 角度 θ を微小角度 $\Delta\theta$ だけ増やすと，点 P は球面上を円弧を描いて移動する。この円弧の長さは $r\Delta\theta$ である。

- □ XY 平面内の角度 ϕ を $\Delta\phi$ だけ増やすと，点 P から XY 平面に降ろした垂線の足は XY 平面内で円弧を描く。この円弧の長さは $(r\sin\theta)\Delta\phi$ である。

- □ 角度 θ と ϕ を別々に $\Delta\theta$, $\Delta\phi$ だけ動かすと，半径 r の球面上の微小部分  が切り取られる。$\Delta\theta$, $\Delta\phi$ は極めて微小にとることができるので，この微小部分の面積は $(r\Delta\theta)(r\sin\theta\Delta\phi)$ となる。

- □ 次に，半径を Δr だけ増やすと，上の微小面積を底面とする立体  ができる。この立体は正確には直方体ではないが，$\Delta\theta$, $\Delta\phi$, Δr を極めて微小にとれば，立体の体積を直方体の体積と同じとすることができる。このような考え方は，**数学ノート [A-9] 区分求積法**と同じものである。したがって，この微小立体の体積は

$$\Delta V=(r\Delta\theta)(r\sin\theta\Delta\phi)\Delta r$$

と書くことができる。

- □ r,θ,ϕ を $0\leqq r\leqq R, 0\leqq\theta\leqq\pi, 0\leqq\phi\leqq2\pi$ の範囲で変化させると，点 P は半径 R の球の内部をすべて動き，上の方法で作った微小立体は球内部を埋めつくすことになる。したがって，この微小立体の体積を合計すれば，球の体積が得られる。

$$V=\lim_{\Delta r\to0}\sum_r(r^2\Delta r)\lim_{\Delta\theta\to0}\sum_\theta(\sin\theta\Delta\theta)\lim_{\Delta\phi\to0}\sum_\phi\Delta\phi$$

ここで, $\sum_r, \sum_\theta, \sum_\phi$ などの記号は, それぞれ, r, θ, ϕ について適当な方法で幅 Δr, $\Delta\theta$, $\Delta\phi$ に分割し（幅は一定でなくてもよい）, それらの分割をすべて足し上げることを意味する。また, $\lim_r, \lim_\theta, \lim_\phi$ などの記号は, 分割の幅を無限小にすることを表している。このような「微小幅について和をとって, 幅を無限小にする」計算は区分求積法と同等で, 実際の計算は積分を用いて簡便に実行することができる。

$$\lim_{\Delta r\to 0}\sum_r (r^2\Delta r) = \int_0^R r^2 dr, \quad \lim_{\Delta\theta\to 0}\sum_\theta (\sin\theta\Delta\theta) = \int_0^\pi \sin\theta d\theta, \quad \lim_{\Delta\phi\to 0}\sum_\phi \Delta\phi = \int_0^{2\pi} d\phi$$

これらの積分のかけ算をまとめて

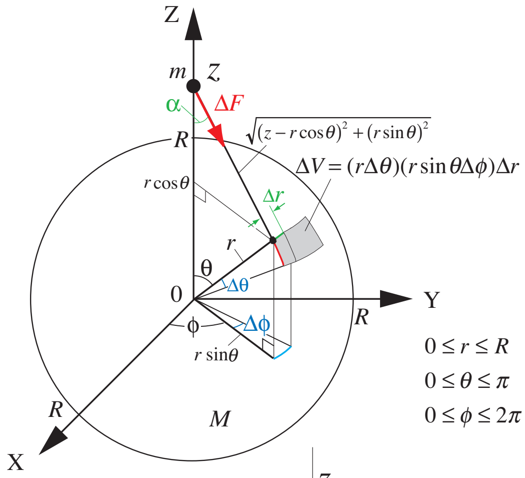
$$V = \int_0^R r^2 dr \times \int_0^\pi \sin\theta d\theta \times \int_0^{2\pi} d\phi \quad = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \quad = \iiint dV$$

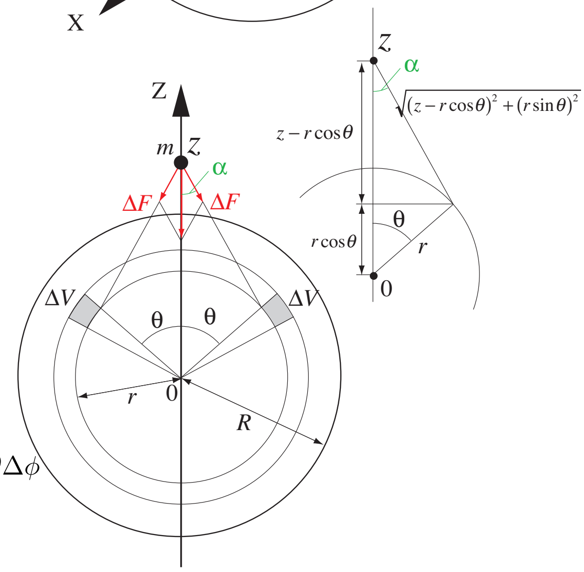
と書く。このような３回積分を繰り返すことを３重積分という。この積分を実行すると $V = \frac{4\pi}{3}R^3$ となる。

以上のような数学を用いて, 半径 R の球体（質量 M）が物体 m におよぼす重力を計算する。体積 ΔV の微小立体の質量は, 球の密度が一定ならば $\frac{M}{V}\Delta V$ となる。この微小立体から物体 m までの距離は $\sqrt{(z-r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}$ なので, 微小立体の質量は物体 m に

$$\Delta F = G\frac{m\frac{M}{V}\Delta V}{(z-r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}$$

という大きさの重力をおよぼすことが分かる。ところで, 今注目している微小立体には, Z 軸について対称な位置に同じ大きさの微小立体を考えることができる。この対称な位置の微小立体も同じ大きさの重力を物体 m におよぼすことになるが, 重力のベクトルの向きは Z 軸について対称になっている。したがって, この２つの力ベクトルを足すと結果は Z 軸方向を向くベクトルとなる。このように考えれば, 球全体が物体 m におよぼす重力のベクトルには Z 方向の成分だけが残ることが分かる。このようなことが予め分かっているので, 余分な計算を避けるために, 微小立体が作る重力の Z 成分の大きさ





$$\Delta f = \Delta F\cos\alpha$$

に注目する。ここで,

$$\cos\alpha = \frac{z-r\cos\theta}{\sqrt{(z-r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}}, \quad \Delta V = r^2\sin\theta\Delta r\Delta\theta\Delta\phi$$

であることから, 球全体が物体 m におよぼす重力は

$$f = G\frac{mM}{V}\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{z-r\cos\theta}{[(z-r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2]^{3/2}}r^2dr\sin\theta d\theta d\phi$$

によって求めることができる。この積分において ϕ についての積分は, 被積分関数が ϕ を含んでいないので, $\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$ となる。残りの θ と r については順に計算する必要がある。まず, θ に関する部分の積分を行うため $t = (z-r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2$ と変数変換をして

$$\cos\theta = \frac{z^2+r^2-t}{2zr}, \qquad \sin\theta d\theta = \frac{1}{2rz}dt$$

という関係を用いて $\sqrt{(z\pm r)^2} = |z\pm r|$ に注意して，置換積分をすると

$$\int_0^\pi \frac{z-r\cos\theta}{[(z-r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2]^{3/2}}\sin\theta d\theta = \frac{1}{4rz^2}\int_{(z-r)^2}^{(z+r)^2}\left[(z^2-r^2)t^{-3/2}+t^{-1/2}\right]dt = \frac{2}{z^2}$$

となる。以上のことから

$$f = G\frac{mM}{V}\int_0^R \frac{2}{z^2}2\pi r^2 dr = G\frac{mM}{z^2}$$

という結果を得る。これは, 球体の半径 R がどのような値でも物体 m の働く重力は同じであることを示している。

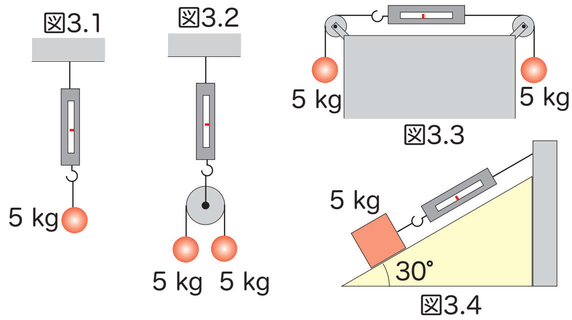
練習問題

1. 水素原子は中心に $+1.6 \times 10^{-19}$ C の電荷を持つ陽子があって，そのまわりを -1.6×10^{-19} C の電荷を持つ電子がまわっている。陽子と電子の距離は 0.53×10^{-10}m で一定に保たれている。陽子と電子に働く電気力の大きさを求めなさい。

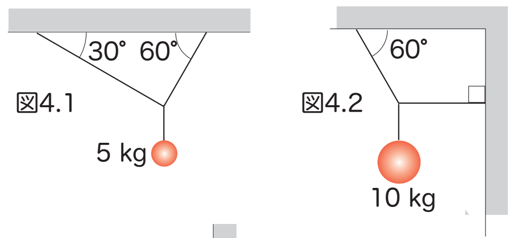
2. ２つの電子に働く「重力」と「電気力」の大きさの比を求めなさい。電子の質量は $m = 9.1 \times 10^{-31}$kg, 電子の電荷は $-e = -1.6 \times 10^{-19}$ C である。また、重力定数は $G = 6.7 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2, 電気力の比例定数は $k = 9.0 \times 10^9$ N m^2/C^2 である。

3. 図 3.1~3.4 のようにおもり, ひも, バネ秤がつり合っている。それぞれについてバネ秤の読みはどのような値となるか。ひもとバネ秤の質量は無視できるとし, 斜面には摩擦がないものとする。

   おもり, ひも，秤，天井，滑車などにどのような力が働いていて，それらの力にはどのような関係があるか。理由を明確にして説明を考えること。



4. 図 4.1~4.2 のようにおもりが軽いひもで吊り下げられている。各ひもに生じる張力を求めなさい。



5. 質量 m および M の物体が図 5 のように軽いひもで吊るされてつり合っている。

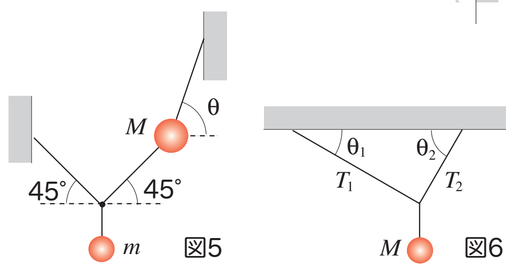
$$\tan\theta = 1 + 2\frac{M}{m}$$

   という関係があることを示しなさい。

6. 図 6 に示すように，３本の軽いひもに重りが吊り下げてある。２本のひもは水平面と角度 θ_1 および θ_2 をなす。この系がつり合っているとき, ひもの張力が

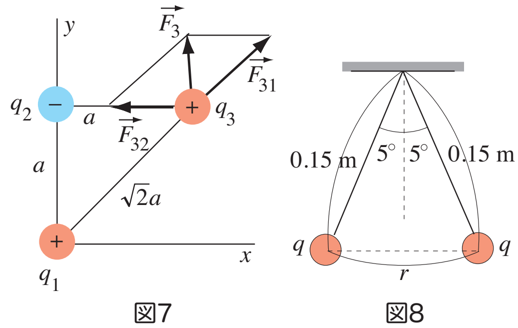
$$T_1 = \frac{Mg\cos\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)}, \qquad T_1 = \frac{Mg\cos\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$$

   となることを示しなさい。

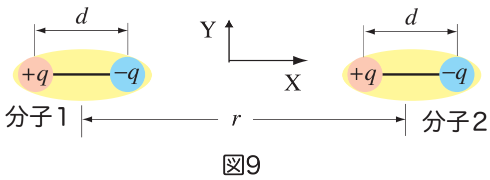


7. 図 7 のように、ある三角形の頂点に位置した３つの電荷を考える。$q_1 = q_3 = 5\mu$C, $q_2 = -2\mu$C および $a = 0.1$m である。q_3 に働く合力を求めなさい。

8. 帯電した２つの小さな同じ球が、それぞれ質量 3×10^{-2}kg を持ち, 図 8 に示すように軽いひもで吊るされた状態でつり合っている。各ひもの長さは 0.15m であり、角度 $\theta = 5^{c}irc$ であるとき、各球の持つ電荷の大きさを求めなさい。２つの球は同じ電荷を持つものとする。また, $\sin 5° = 0.0871$, $\tan 5° = 0.0875$ である。



9. 図 9 のように２つの分極した２原子分子が距離 r 離れて配置している。$r >> d$ の近似をして, 分子 1 が分子 2 におよぼす力を求めなさい。



10. 図 10 のように, バネ定数 k のバネに質量 m の重りが吊り下げられている。バネはもとの長さ（自然長）からどれだけ伸びているか。

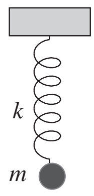


図10

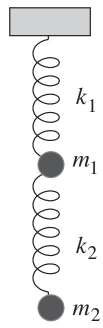


図11

11. 図 11 のように, バネ定数 k_1 のバネに質量 m_1 の重りが吊り下げられ, さらに, その下にバネ定数 k_2 のバネと質量 m_2 の重りが吊り下げられている。それぞれのバネはもとの長さ（自然長）からどれだけ伸びているか。また, 重り m_2 の位置は２本のバネが自然長であるときに比べて, どれだけ降下しているか。

12. 図 12.1~12.2 のように, 自然長が同じであるバネ定数 k_1 と k_2 の２本のバネが取り付けられている。左端は壁に固定されていて動かない。右端を力 F で引っ張ることを考える。

(1) それぞれのバネは自然長と比べてどれだけ伸びているか。

(2) ２本のバネの組み合わせを, 1 本のバネで置き換えるとすると, どのようなバネ定数のバネを用意すればよいか。

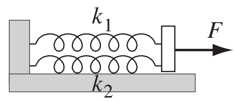


図12.1

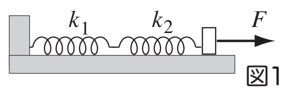


図12.2

13. 図 13(a) のように質量 M の物体が長さ L のひもで吊るされている。ひもの質量 m が無視できない場合について, ひもの張力を求めてみる。

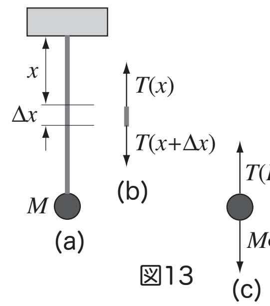


図13

(1) 図 13(a) に示したように, ひもの上端から x だけ下がった位置において, 微小な長さ Δx のひもの部分を考える。ひもの上端から x だけ下がった位置での張力を $T(x)$ と書くことにすると, 長さ Δx のひもの部分は張力 $T(x)$ で上向きに引っ張られ, 張力 $T(x+\Delta x)$ で下向きに引っ張られることになる。この長さ Δx のひもの部分についての力のつり合いの条件が

$$T(x) = T(x+\Delta x) + \frac{mg}{L}\Delta x$$

となることを示しなさい。

(2) 微小長さ Δx をゼロに近付けると

$$\frac{dT(x)}{dx} = -\frac{mg}{L}$$

という関係が得られることを示しなさい。

(3) 図 13(c) に示したように, 重りにつながれた位置におけるひもの張力は $T(L) = Mg$ となる。このことを用いて, 任意の位置における張力 $T(x)$ を表す式を求めなさい。$x = 0$ の位置での張力はどのようになるか。

(4) ひもの質量が無視できる場合, ひもの張力はどのようになるか。

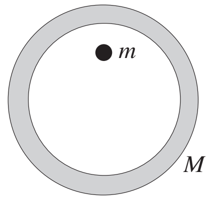


図17

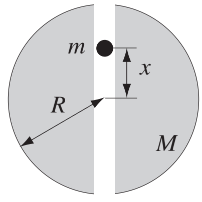


図18

14. 楕円の面積を２重積分によって求めなさい。

15. 直方体の体積を３重積分によって求めなさい。

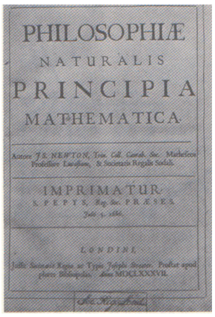
16. 球の体積を求める計算を参考にして, 半径 R の球の表面積を求めなさい。

17. 図 17 のような球殻（内部が空洞の球）の内部にある質点が受ける重力を求めなさい。球の半径, 球殻の厚さ, 質点の位置などは適当な記号を設定しなさい。

18. 図 18 に示したように, 質量が一様に分布している半径 R の球に細い井戸を掘って反対側まで貫通させた。この井戸に質量 m の物体を落とす。この物体が球の中心から x の距離にあるとき, 物体に働く重力はどのようになるか。井戸を掘ったための質量の減少分については無視できるものとする。

1.8 運動の法則

Isaac Newton　1642-1727



Philosophiae Naturalis Principia Mathematica 1686

運動の法則の発見は, 科学の歴史において劇的な事件であった。ニュートン以前には, 惑星のようなものの運動は一つの神秘であった。しかし, ニュートン以降, この運動は完全に理解されるようになった。他の惑星の影響によって, ケプラーの法則から僅かなずれが生じるが, それさえも, 計算できるようになった。ニュートンの法則が打ち立てられてから後は, 自然界の様々な運動を解明することができるようになったのである。天体の大きさから分子の大きさにいたるまで, ニュートンの運動法則は定量的な計算を可能にしてくれている。生体内の様々な物質の移動もニュートンの運動法則に従っていると言っても過言ではないだろう。

現在の理解では, 原子の大きさより小さい世界の物理法則はニュートンの運動法則とは異なったものになっていることが分かっている。この法則は量子力学と呼ばれているが, 量子力学の発見はニュートンの運動法則なしではありえなかった。ニュートンの運動法則は自然現象に対して極めて正確な理解を与えてきた。このために, 20 世紀初頭, ニュートンの運動法則では説明不可能ないくつかの現象が見つかり, それらを深刻な問題として受け止めることができたのである。対象となる物体が大きい場合, 近似としてニュートンの運動法則を量子力学から導くことができる。

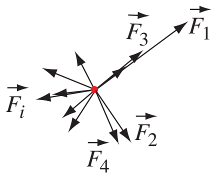
ガリレオが慣性の法則を発見したことは, 運動を理解する上の一大進歩であった。一つの物体が孤立していて外から擾乱を受けなければ, はじめ動いていたものは直線に沿って一定の速度で動きつづけ, はじめ止まっていたものは止まりつづけるというのがこの法則である。もちろん現実には決してそうにはならない。例えば積木を机の上で滑らせれば, 積木はもちろん止まってしまう。しかしこれは積木が外界から孤立していないで, 机を擦っているからである。ガリレオは大いなる想像力を駆使して, 現実を超越して正しい法則を発見したのである。

何かが物体に影響を与えているとき, その速度はどう変わるか。これを求めるためには規則が必要である。この規則を与えたのがニュートンの業績である。ニュートンの運動法則といわれるものは 3 つある。

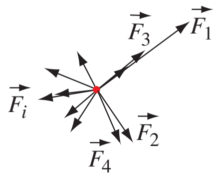
第 1 法則：慣性の法則	物体は正味の力（合力）を受けていない限り, 静止している物体は静止をつづけ, 運動している物体は一定速度の運動（等速直線運動）をしつづける。

「正味の力を受けていない」とは物体に力が働いていたとしても, 力ベクトルの総和がゼロであることを　意味している。

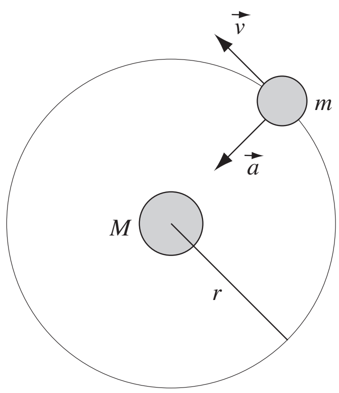
力を受けていない物体



$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$



第 2 法則：運動方程式	物体の加速度はそれに作用する合力に正比例し, その質量に反比例する。



P15 で述べたように力と加速度の間には比例関係があると考えることができる。

$$\vec{F} \propto \vec{a}$$

では, この関係の比例定数はどのようなものであろうか。このことを調べるために, 図のように質量 M の物体による重力を受けて速さ v で半径 r の円軌道をまわる質量 m の物体を考えよう。質量 m の物体が受ける加速度は, 向きが中心方向で, 大きさは

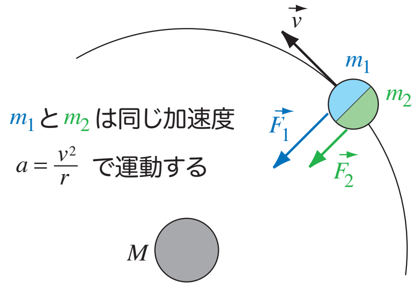
$$a = \frac{v^2}{r}$$

である。このような加速度が生じるのは, 質量 m の物体が質量 M の物体からの

重力を受けていることが原因である。この重力の大きさは, 万有引力の法則によって

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

であることが分かっている。さて, 円軌道を回っている質量 m の物体を図のように２つの部分（質量 m_1 と質量 m_2）に分けてみよう。すると, それぞれの部分に働く重力は



$$F_1 = G\frac{m_1 M}{r^2}, \qquad F_2 = G\frac{m_2 M}{r^2}$$

となる。ところで, ２つの部分はともに速さ v で M のまわりを円運動している。したがって, ２つ部分の加速度は同じ大きさ $a = \dfrac{v^2}{r}$ を持つことになる。２つに分けることが奇妙に感じるならば, 地球と君自身のことを考えてみればよい, 地球も君も同じ速さで太陽のまわりを回っているのである。力と加速度には比例関係があるので

$$F_1 = G\frac{m_1 M}{r^2} = k_1 a, \qquad F_2 = G\frac{m_2 M}{r^2} = k_2 a$$

と書くことができる。ここで, k_1 と k_2 はともに比例定数を表している。比例定数は２つの部分について同じである必要はない。この２つの式の比をとってみると

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{G\dfrac{Mm_1}{r^2}}{G\dfrac{Mm_1}{r^2}} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{k_1}{k_2}$$

であることが分かる。すなわち, 共通の比例定数 k を用いて

$$k_1 = km_1, \qquad k_2 = km_2$$

と表すことができる。したがって, 質量 m の物体について力と加速度の関係は

$$\vec{F} = km\vec{a}$$

となる。比例定数 k はどのような物体についても同じ値である。しかし, k の値を決定する方法はない。つまり, 便利が良いように適切な数値を選べばよいのである。

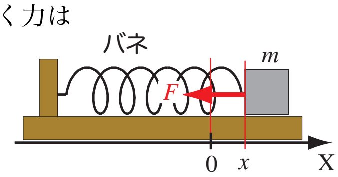
質量の単位 kg は（なんと現在でも）キログラム原器に基づいて定義されている。加速度の単位は m/s^2 であるが, 時間の単位 s はセシウム 137 原子の性質を利用した原子時計で定義され, 長さの単位 m は光が 1 秒の 1/299792458 の時間間隔の間に進む距離として定義されている。力の単位 N（ニュートン）は力と加速度の関係式によって定義される。このとき, 比例定数 k はどのような値であってもよいのあるが, 最も単純な値 $k = 1$ を選ぶことになっている（定義）。したがって, 質量 m の物体について力と加速度の関係（運動方程式）は

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

となり, 力の単位は N=kg·m/s^2 である。

では, 第 2 法則（運動方程式）は何を意味していて, 何ができるのだろう。例題として P19 で議論したバネの力を受けて運動する質量 m の物体を考えてみる。この物体はバネの方向にだけ動くのであろうから, 力ベクトルや加速度ベクトルの X 成分だけを考えることにする。P19 で調べたように物体に働く力は

$$F = -kx$$



のようにバネの伸びに比例（向きは逆）する。加速度は速度の時間微分

$$a = \frac{dv_x}{dt}$$

であるから, 運動方程式は

$$-kx = m\frac{dv_x}{dt}$$

となる。X 方向の速度変化の割合が x に比例するのである。いろいろの定数をそのまま残しておいても何の得にもならないから, 時間の尺度が変わったとしてもよいし, あるいは単位がどうかしたと考えてもいいが, 丁度 $\dfrac{k}{m} = 1$ になったとする。すると方程式

$$\frac{dv_x}{dt} = -x \tag{1.8.1}$$

を解くことになる。

与えられた時刻 t に，物体の速度が $v_x(t)$ で，位置が $x(t)$ であるとする。時間がちょっとだけ経過して $t+\Delta$ になったとき，速度はいくらで，位置はいくらであるか？この問に答えられるならば，運動について調べるという問題は解けたことになる。何故ならば，始めの与えられた条件から出発して，第一の瞬間，次の瞬間，次の瞬間等々に運動がどう変わっていくかを計算して追跡できるからである。いま，時間間隔 Δ がとても短いとすると，時刻 t における位置と速度から，時刻 $t+\Delta$ における位置を求めることができる。すなわち

$$x(t+\Delta) = x(t) + \Delta \times v_x(t)$$

である。この近似は Δ が小さければ小さいほど正確になるが，Δ が無視できるほど小さくなくても，この式はかなり正確で使いものになる。時刻 $t+\Delta$ における速度を求めるためには，速度がどう変化するか，すなわち加速度を知らなければならない。ここに運動方程式が入ってくる。運動の法則は加速度が何であるかを教えてくれるのである。式 (1.8.1) によると，加速度は $-x$ であるから

$$v_x(t+\Delta) = v_x(t) + \Delta \times a_x(t) = v_x(t) - \Delta \times x(t)$$

となる。

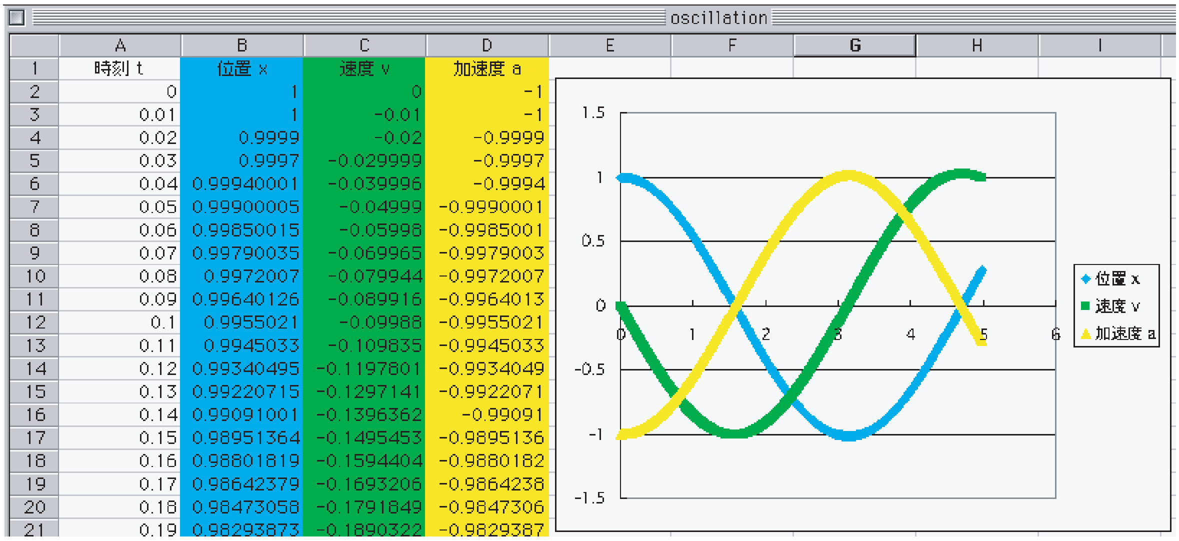
さて，この問題を表計算ソフトを使って解いてみよう。計算の出発点は決めないといけないので（初期条件），時刻 $t=0$ で，$x=1$, $v_x=0$ という条件を与えよう（異なる条件でも構わない）。時間間隔 Δ は小さいほどよいが，小さすぎても困る。どのような数値がよいかは予め分からないので，試行錯誤をすることになる。ここでは $\Delta = 0.01$ としてみる。下の図は計算結果を示している。A 列は時刻，B 列は位置，C 列は速度，D 列は加速度である。A 列の最初に 0 を，B 列の最初に 1 を，C 列の最初には 0 を入力しておく。その他のセルには計算式を入力する。

	A	B	C	D
2	0	1	0	=-B2
3	=A2+0.01	=B2+0.01*C2	=C2+0.01*D2	=-B3
4	=A3+0.01	=B3+0.01*C2	=C3+0.01*D3	=-B4

計算結果をグラフに表してみると

$$x(t) = \cos t, \qquad v_x(t) = -\sin t, a_x(t) = -\cos t$$

のようになっていることが分かる。すなわち，この運動は単振動である。



	A	B	C	D
1	時刻 t	位置 x	速度 v	加速度 a
2	0	1	0	-1
3	0.01	1	-0.01	-1
4	0.02	0.9999	-0.02	-0.9999
5	0.03	0.9997	-0.029999	-0.9997
6	0.04	0.99940001	-0.039996	-0.9994
7	0.05	0.99900005	-0.04999	-0.9990001
8	0.06	0.99850015	-0.05998	-0.9985001
9	0.07	0.99790035	-0.069965	-0.9979003
10	0.08	0.9972007	-0.079944	-0.9972007
11	0.09	0.99640126	-0.089916	-0.9964013
12	0.1	0.9955021	-0.09988	-0.9955021
13	0.11	0.9945033	-0.109835	-0.9945033
14	0.12	0.99340495	-0.1197801	-0.9934049
15	0.13	0.99220715	-0.1297141	-0.9922071
16	0.14	0.99091001	-0.1396362	-0.99091
17	0.15	0.98951364	-0.1495453	-0.9895136
18	0.16	0.98801819	-0.1594404	-0.9880182
19	0.17	0.98642379	-0.1693206	-0.9864238
20	0.18	0.98473058	-0.1791849	-0.9847306
21	0.19	0.98293873	-0.1890322	-0.9829387

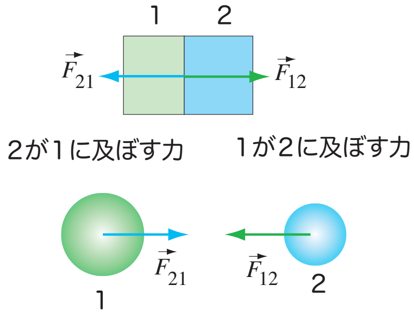
練習問題

1. http://phys.med.u-fukui.ac.jp に Excel 用のファイルがある。これを利用して（腕に覚えのある人は自分で作ってみるとよい），単振動の計算において時間間隔 D を変えるとどのようになるか調べてみなさい。なお D は F24 のセルの値を変更することで変えられるようにしてある。

2. 単振動計算を参考にして，$x(0) = 100, a(t) = -g = -10$ として自由落下の問題を計算してみなさい。

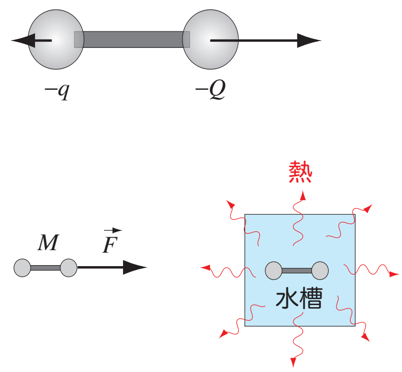
第３法則：作用・反作用の法則
２つの物体が相互作用するとき, 物体１が物体２におよぼす力 $\vec{F}_{12}$ は物体２が物体１におよぼす力 $\vec{F}_{21}$ と大きさが等しく向きが反対である。すなわち

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \text{あるいは} \quad \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0}$$



力についての基本法則は「万有引力の法則」や「クーロンの法則」である。原理的には, 物体の間に働く力はこれらの法則から導くことができる。少なくとも, 導くための方法は知っている。例えば, 分子間力は P18 で議論したように「クーロンの法則」から導出できるようであるし, 弾性体（バネ）に生ずる力は分子間力から説明できる。

現在, われわれは力の本質について詳細な知識を持っていて, 必要があれば計算によって力の性質を導くことができる。これは, 自然法則についての多くの探究の結果である。ニュートンは, 重力以外の力について, 力がどんな法則に従うかについて何の知識も持っていなかった。しかし, 力の一般的性質を発見したのである。第３法則は力がどのように物体に作用するかを述べているが, そこに採用されたのは「万有引力の法則」ではなく, 力の法則がどのようなものであっても, いつでも, 成立する一般的性質であった。ニュートンは万有引力の法則を発見したにも拘らず, 自分が力について十分な知識を持っていないことを知っていたのである。第３法則が力についての一般法則であるから, ニュートン以来３００年以上経過しても, なお正しい法則なのである。



では, なぜ作用・反作用の法則が成立しなければならないかについて調べてみよう。ゴム製の球を２つ用意してこれらを堅い棒でしっかりとつなぐ。ゴムを毛糸などで擦ってゴム球に電荷を与える。このとき, ゴム球には負の電荷が生じることになる。「クーロンの法則」によると２つのゴム球の間には大きさが等しい斥力が働くことになるが, 仮にこの力の大きさが異なっているとしてみよう。つまり, 作用・反作用の法則が成立していないと考えてみるのである。いま, 図のように右の球に働く力が左の球に働く力より大きくて, 力ベクトルの合計が $\vec{F}$ だけ余分に残っているとしよう。２つのゴム球と棒を合わせた物体の質量が M だとすると, 第２法則によってこの物体には

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{M}$$

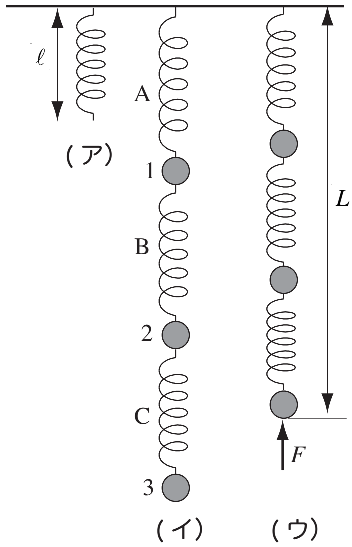
の加速度が生じることになる。したがって, 物体は右へ向かって走り出し, 走る距離が長ければ長いほど物体の速さは大きくなっていく。質量 M で速さ v の物体は運動エネルギー

$$\frac{1}{2}Mv^2$$

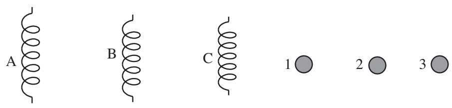
を持つ（エネルギーの説明はまだだけど）。十分に速さが大きくなったところて, 物体を水槽に突入させて, 水との摩擦によって物体を水中で停止させる。物体は大きな運動エネルギーを持って水中に入り, 水中で停止するので, 物体の持っていた運動エネルギーは水槽の水に熱エネルギーとして引き渡されることになる。水槽に発生する熱エネルギーを取り出して利用することができるだろう。物体を走らせる距離を伸ばすほどにエネルギーは大きくなるのだから, 最初, ゴム球を毛糸で擦るだけで莫大なエネルギーを作り出すことが可能となってしまう。もし, このようなうまい方法が可能であれば, 人類のエネルギー問題など霧散してしまう。残念ながら作用・反作用の法則は正しくて, 右のゴム球と左のゴム球に働く力は大きさが等しく, 向きが逆であり, 物体全体としては力のベクトル和はゼロとなる。 したがって, 第１法則により, 最初物体が静止していたならば, ずっと止まったままだし, 最初動いていたならば, その速度のままで, 運動エネルギーの増減なしに動き続けることになる。

練習問題

1. 右図のように，3つのバネにおもりをつないで鉛直に天井からつるす。おもりの質量は同じで m とし，バネの質量とおもりの大きさは無視できる。　バネ定数を k, 重力加速度の大きさを g として以下に答えよ。



   1) 図（イ）のように，支えなしでつるされているとき，各パーツ



   にはどのように力が働いているか。力の様子を矢印で示し，「何から何に働いている力」なのかを各矢印に説明を加え，力の大きさを式で示しておくこと。

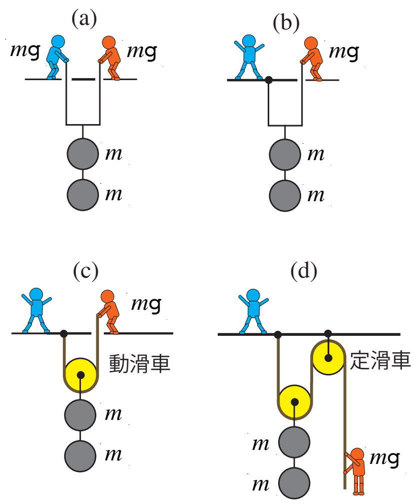
   2) 図（イ）のとき，各バネの伸びはどのような式で書けるか。

   3) 図（ウ）のように，おもり 3 を下から力 F で押す。$F < mg$ である場合について各パーツに働く力の様子を 1) と同様に示せ。

   4) ばね A, B, C がすべて縮むようになるためには，力 F はどのような大きさであればよいか。

   5) 3つのばねの長さの合計 L がばねの自然長 ℓ の 3 倍となるとき，力 F はどのような大きさか。

2. 滑車は力の働き方を理解するためのよい練習問題である。はじめに，滑車について復習しておく。図 (a) のように，２つのおもり（質量 m）を２人で持つと，それぞれの人はおもり１つ分の重力 mg を支えればよい。図 (b) のように片方のひもを天井に固定するとひもを支える人はひとりですむ。図 (c) のように「動滑車」を使えばおもりを上下させやすくなり，図 (d) のように「定滑車」を組み合わせればひもを引っ張ることで支えることができる。以下の議論を確認せよ。



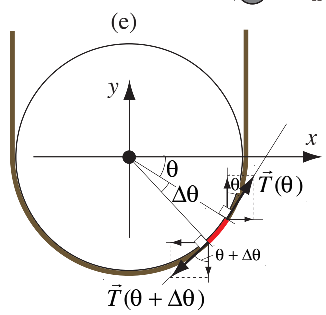
   1）ひもに大きさ T の張力が働いているとき，滑車に働く力を調べる。図 (e) のように，滑車と接しているひもを水平方向からの角度 $\theta \sim \theta+\Delta\theta$ の範囲で切り取った微小部分 に働く力を考える。この部分の上端に働く力を $\vec{T}(\theta)$，下端に働く力を $\vec{T}(\theta+\Delta\theta)$ と書く。ただし，その力の大きさはひもの張力と等しく

$$\left|\vec{T}(\theta)\right| = \left|\vec{T}(\theta+\Delta\theta)\right| = T$$

   である。図 (e) のように座標軸を設定すると， の部分に働く力は

$$(\Delta f_x, \Delta f_y) = (T\sin\theta - T\sin(\theta+\Delta\theta), T\cos\theta - T\cos(\theta+\Delta\theta))$$

   のような成分となる。三角関数の公式と $\Delta\theta$ が十分に小さいときの近似



$$\begin{aligned}
\cos(\theta+\Delta\theta) &= \cos\theta\cos(\Delta\theta) - \sin\theta\sin(\Delta\theta)\\
\sin(\theta+\Delta\theta) &= \sin\theta\cos(\Delta\theta) + \cos\theta\sin(\Delta\theta)\\
\cos(\Delta\theta) &\simeq 1, \qquad \sin(\Delta\theta) \simeq \Delta\theta
\end{aligned} \tag{1.8.2}$$

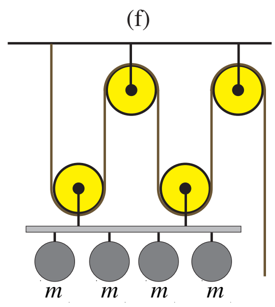
   を用いると

$$(\Delta f_x, \Delta f_y) = (-T\cos\theta \times \Delta\theta, T\sin\theta \times \Delta\theta)$$

   と書くことができる。滑車全体に働く力はひもの部分 に働く力である。この力はひもの微小部分に働く力を積分によって合計すればよく

$$(f_x, f_y) = \left(\int_0^{\pi} -T\cos\theta\, d\theta, \int_0^{\pi} T\sin\theta\, d\theta\right) = (0, 2T)$$

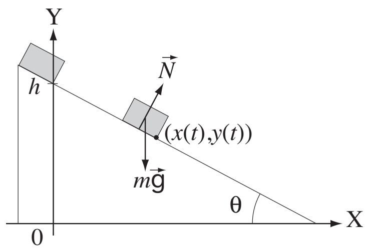
   となる。



   2）図 (f) のように２つの動滑車を使って４つのおもりを支えるためにはひもの張力で $T = mg$ であればよい。

   3）ひもを引っ張っておもりを x だけ持ち上げるとき，ひもの端は $4x$ だけ引っ張ることになる。

3. 図のように傾斜角 θ の滑らかな（摩擦がない）斜面上に質量 m の物体を置く。最初, 物体は高さ h の場所に静止しているものとする。



1) 図のように X-Y 軸を設定する。X 方向と Y 方向についての運動方程式はどのように書けるか。なお, 物体には重力 mg と斜面から垂直抗力 N が働いており, 垂直抗力は成分で書くと

$$\vec{N} = (N\sin\theta, N\cos\theta)$$

となる。また, 物体の位置は右下のカドで表すことにする。

2) 斜面は X-Y 座標内の直線で表すことができる。この直線の方程式はどのようになるか。時刻 t での物体の位置 $(x(t), y(t))$ はこの直線上に位置している。X 方向の加速度 $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$ と Y 方向の加速度 $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}$ にはどのような関係が成り立つか。

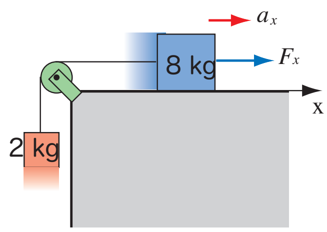
3) 2) の結果に 1) の運動方程式を代入すると, 垂直抗力の大きさが決定できる。どのようになるか。また, この結果は力のつり合いについてどのような状況を表しているか。

4) 運動方程式に 3) で求めた垂直抗力を代入して, 物体が斜面の下まで滑り落ちるのにかかる時間を求めよ。

5) 斜面の下で物体が持つ速度（X 成分, Y 成分）を求めよ。また, 速度の大きさ（速さ）はどのようになるか。

4. 問題３と同じ物体の運動について, 斜面と平行に X 軸を設定して考察せよ。X 軸の正の向きは下向きとする。

5. 図に示すように, 8 kg の物体と 2 kg の物体がひもでつながれている。8 kg の物体は摩擦のない水平面に置かれていて, 水平方向の力 F_x が作用している。水平方向の正の向きを右向きとして, 力 F_x と加速度 a_x は右向きのとき正の値をとるものとする。

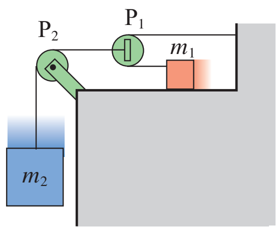


1) F_x がどのような値であれば 2 kg の物体を上向きに加速できるか。

2) F_x がどのような値であればひもの張力がゼロとなるか。

3) 力 F_x と 8 kg の物体の加速度 a の関係をグラフに描きなさい。力は -100 N から $+100$ N の範囲とする。

6. 水平で滑らかなテーブル上の質量 m_1 の物体が非常に軽い動滑車 P_1 および固定滑車 P_2 を介して質量 m_2 の物体に結ばれている。m_1 および m_2 の加速度はそれぞれ a_1 および a_2 であるとする。

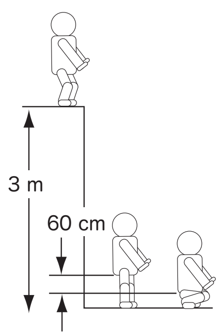


1) a_1 と a_2 の関係を求めなさい。

2) ひもの張力を質量 m_1 , m_2 および重力加速度 g を用いて表しなさい。

3) 加速度 a_1 および a_2 を質量 m_1 , m_2 および重力加速度 g を用いて表しなさい。

7. 高さ 3 m のがけから飛びおりる。がけ下の地面にふれた瞬間にひざを曲げ、胴体 (40 kg) が一様に減速されるようにする。



1) 足が地面にふれた時の人の速度はどれほどか。

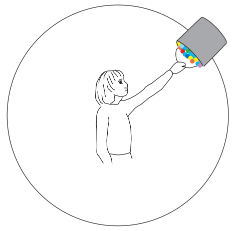
2) 減速している間、足が胴体に及ぼす力はどれほどか。

3) 減速するために必要な時間はどれほどか。

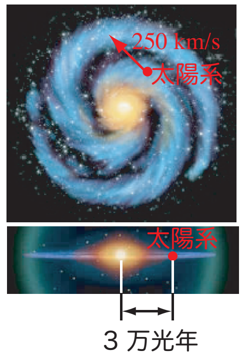
4) 筋肉が出せる力は、最大で 1 m^2 あたり $2 \sim 3 \times 10^5$ $\mathrm{N/m^2}$ である。2) の結果と比較してみなさい。

8. 子供がビー玉の一杯入ったバケツを一定の速さで鉛直面内（地面と垂直な面）に円を描いて振りまわしている。この円の半径は $R = 50$ cm として, ビー玉がバケツからこぼれ落ちないようにするには, 毎秒何回転以上の速さで振りまわせばよいか。

[hint] ビー玉がこぼれ落ちる危険性が最も高いのは, バケツが頭上に来るときである。このときにこぼれなければ他の位置でもこぼれない。物体が円軌道をまわるためには, 中心方向に向かう力が働いている必要がある、ビー玉に働く重力はこの中心方向に向かう力の一部を担う。



9. 図は太陽系が属する「天の川銀河」の様子を示したものである。太陽は円盤状の銀河の　中にあって, 銀河中心から約３万光年の距離にある外縁部に位置している。さらに, 太陽は　銀河中心のまわりに約 250 km/s の速さで円軌道を回っている。１光年とは光が１年で　進む距離を意味しており, 光の速さは秒速 30 万キロメートルである。

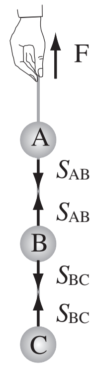


1) 太陽が銀河のまわりを一周するのにかかる時間はどれほどか。年の単位で答えなさい。

2) 太陽が銀河中心のまわりを円運動するときの運動方程式を考えて,「天の川銀河」全体の質量をもとめよ。ただし, 銀河の質量は太陽の位置より内側（中心側）に集中しているものとせよ。また, 銀河の質量分布は連続的であると考えてよい。

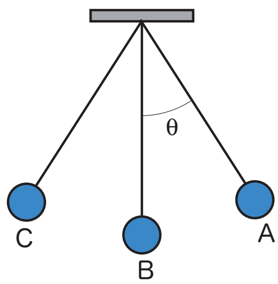
3) 太陽はありきたりの恒星であるという事実から,「天の川銀河」にある恒星の数を推定して, 億個の単位で答えなさい。ただし, 太陽の質量は 2×10^{30}kg であり, 太陽系の惑星の質量は太陽の質量と比べて無視できるものとする。

10. 質量が 0.2 kg の３つの球 A, B, C を図のようにひもでつなぎ, ひもの上端を持って力 9 N で引き上げた。ひもは伸び縮みしないものとする。



1) ３つの球の加速度を求めよ。
2) ３つの球をつなぐひもの張力を求めよ。
3) ひもの強度が一様だとすると, ひもが切れるときはどの部分が最初に切れるか。

11. 図のように, 質量 m kg の物体をひもで天井から吊り下げる。ひもが弛まないように, 鉛直方向から角度 θ だけ物体の位置を変化させる（A）。この位置 A で手を放すと物体は鉛直方向を対称軸とする反対側の C まで運動をして, 再び A に戻る。物体は, この往復運動を繰り返すことになる。このような往復運動をする系を「振り子」とよぶ。



1) 位置 A において, 物体に働く力（張力と重力）の様子を描きなさい。
2) 位置 A において, 物体に働く力の合力はどのようになっているか。また, 物体はどのような運動をすることになるか。
3) 物体の位置が, A と B の中間にあるとき, 物体に働く力（張力と重力）はどのようになっているか。
4) 物体が B と通過するとき, 物体に働く力（張力と重力）はどのようになっているか。
5) 物体の位置が, B と C の中間にあるとき, 物体に働く力（張力と重力）はどのようになっているか。
6) 位置 C において, 物体に働く力（張力と重力）の様子を描きなさい。
7) 位置 C において, 物体に働く力の合力はどのようになっているか。また, 物体はどのような運動をすることになるか。

12. P23 の問題 18 について, 物体はどのような運動をするか。また, 物体を井戸に落とした後, 地球の反対側に到達　するまでにかかる時間はどれだけか。重力加速度は $g = 10$ m/s^2 , 地球の半径は $R = 6.3 \times 10^6$m である。

1.9 抵抗力を受ける運動

流体（流れる物体）を構成する分子の間には分子間力が働く。この力のために，物体表面に隣接した分子は物体とともに動く。この現象を**粘性**と呼び，粘性流体の中を運動する物体は**抵抗力**を受ける。球形の物体が受ける抵抗力の大きさは，

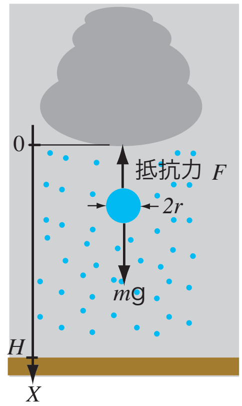
$$F = 6\pi r\eta v$$

となることが知られている（ストークスの法則）。ここで，r は物体の**半径**，v は**物体の速さ**で，η は**粘性率**と呼ばれ流体の種類によって異なる値を持つ。

粘性率 η [N s/m^2]	
空気	1.81×10^{-5}
エチルエーテル	2.43×10^{-4}
アセトン	3.22×10^{-4}
水	1.00×10^{-3}
エチルアルコール	1.19×10^{-2}
グリセリン	1.5
アスファルト	10^{7}

○抵抗力がない場合

抵抗力を受ける物体の運動を調べるために，雨粒の落下について考える。雨粒は空気から抵抗力を受けることになるが，まず，抵抗力がない場合の運動の様子を計算しておこう。地表から見て高さ H の雲から雨粒が，時刻ゼロに速度ゼロ（$v(0) = 0$）で落下を始めるとして，質量 m の雨粒の運動を考える。雨粒に働く力は重力だけで，座標は図のように下向きを正の向きとすると，運動方程式は



$$m\frac{dv(t)}{dt} = mg$$

となる。P12 と同様な計算をしてこの運動方程式を解くと

$$\text{速度}\quad v(t) - gt, \qquad \text{位置}\quad x(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

であることが分かる。このことから，地表に到達する時刻は $\sqrt{\frac{2H}{g}}$ で，地表に到達した時の雨粒の速度は $\sqrt{2gH}$ となる。雨雲は地表からおよそ高さ 2 km 程度にある。したがって，地表に到達した時の雨粒の速度は $\sqrt{2\times10\,〔\mathrm{m/s^2}〕\times 2000\,〔\mathrm{m}〕}=$ 200〔m/s〕

様々な速さ [m/s]	
血液（大動脈）	0.5
ブタ	4.7
ヒト	10
アフリカゾウ	11.1
シマウマ	18
カンガルー	20
ライオン	22.2
自動車	27.8
チーター	31.2
ツバメ	55.6
新幹線	79.2
ピストルの弾	200
旅客機	250
音	340
地球の自転	376.5
スペースシャトル	7800
地球の公転	30000
光	3×10^{8}

○抵抗力がある場合

雨粒が自由落下すると信じられないほとの高速で地面に到達することになってしまう。これは，空気抵抗を考えなかったためである。では，半径 0.1 mm の雨粒がストークスの法則にしたがう空気抵抗を受けて落下することを考えてみよう。$\alpha = 6\pi r\eta$ と書くことにすると，運動方程式は

$$m\frac{dv(t)}{dt} = mg - \alpha v(t)$$

となる。ここで，抵抗力は上向きなのでマイナスが付くことに注意しよう。この運動方程式を変形すると

$$\frac{1}{v - \frac{mg}{\alpha}}\frac{dv}{dt} = -\frac{\alpha}{m}$$

のように書き直すことができる。両辺を時刻 0 から t まで時間について積分すると

$$\int_0^t \frac{1}{v - \frac{mg}{\alpha}}\frac{dv}{dt}dt = -\int_0^t \frac{\alpha}{m}dt \Longrightarrow \int_{v(0)}^{v(t)} \frac{1}{v - \frac{mg}{\alpha}}dv = -\frac{\alpha}{m}t$$

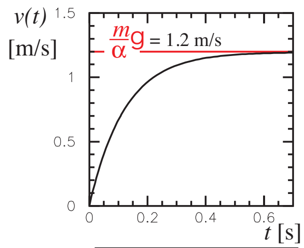
となる。初期条件 $v(0) = 0$ および $x(0) = 0$ に注意して積分を実行すると

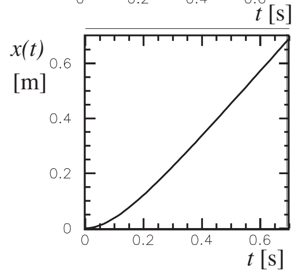
$$\text{速度}\quad v(t) = \frac{mg}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right), \text{位置}\quad x(t) = \frac{mg}{\alpha}t - g\left(\frac{m}{\alpha}\right)^2\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right),$$

を得る（次ページの練習問題）。具体的に数値を調べると，水の密度は $\rho = 10^3$ kg/m^3 なので

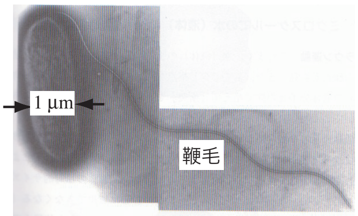
$$\frac{m}{\alpha} = \frac{\frac{4\pi}{3}r^3\rho}{6\pi r\eta} = 0.12\,〔\mathrm{s}〕$$

である。速度と位置をグラフに書くと，右の図のようになり，落下を開始してから 0.6 秒程度で一定の速度 1.2 m/s となることが分かる。





練習問題



1. 写真のようなバクテリアは, 水中でストークスの法則に従う抵抗力を受けて. 鞭毛の力によって一定の速度で運動する。バクテリアの速度が 10^{-5}m/s であるとすると, 鞭毛の発生する力はどれほどか。

2. 船が水から抵抗を受ける場合には. 抵抗力の大きさはほぼ速度の 2 乗に比例する。排水量（重量） 300 t の船が 10 ノットのときに受ける抵抗が 20000 N であるとする。この船が 12 ノットで進んでいるときエンジンを止めたとすると, 速度が 6 ノットになるまでの時間と, 進む距離を求めなさい。1 ノットは赤道上の経度 1 分を 1 時間で進む速度。地球の赤道での周長は 4×10^7m である。$\log_e 2 = 0.693$

3. 速度に比例する抵抗力が働く物体の落下運動は，座標の正の向きを下向きとして，運動方程式
$$m\frac{dv(t)}{dt} = mg - \alpha v(t)$$
に従う。時刻 $t = 0$ の速度を v_0 として, この運動方程式の解が，速度 $v(t)$ と $\dfrac{mg}{\alpha}$ の大小関係に関わらず,
$$v(t) = \frac{mg}{\alpha} + \left(v_0 - \frac{mg}{\alpha}\right) e^{-\frac{\alpha}{m}t}$$
となることを示し，速度の時間変化を表すグラフを描きなさい

4. 流体中を運動する物体にはその運動を妨げようとする抵抗力が働く。物体が小さく, 低速で運動するときは, この抵抗力は速度に比例する。半径 r〔m〕の球体が速度 v〔m/s〕で運動する場合, 抵抗力はストークスの法則
$$F_1 = arv$$
で計算することができる。ここで a は比例定数である。しかし、高速で運動する大きな物体の場合, 抵抗力は速度の 2 乗に比例することが知られている。また, このような抵抗力は運動方向に見た物体の断面積に比例しており, 球体の場合
$$F_2 = br^2v^2$$
のように表すことができる。

   1) 球形の物体に働く抵抗力 F_1 と F_2 に関する比例定数 a と b は, どのような単位 (MKS 単位系）となっているか。
   2) 半径 r の球形の水滴が, 抵抗力 F_1 と F_2 を受けながら空気中を落下している。水の密度を ρ〔kg/m^3〕重力加速度を g〔m/s^2〕として, 水滴の運動方程式を書きなさい。座標の取り方を明らかにしておくこと。
   3) 十分に時間が経過した後, 水滴は一定の速度で落下するようになる。一定の速度（終速度）で落下するようなる理由を述べて, この時の速度を表す式を書きなさい。
   4) 空気中を運動する水滴の受ける抵抗力について, 比例定数は
   $$a = 3 \times 10^{-4}, \qquad b = 0.9$$
   という値である。比例定数の単位は 1) の結果によるものを採用している。水滴の半径が 10 μm, 100 μm, 1 mm の場合について, 終速度の値を求めなさい。
   5) 4) の結果から, 水滴の大きさによっては, 抵抗力 F_1 と F_2 の片方だけを考慮すればよいことが分かる。どのような場合にどのような抵抗力を考えればよいか。また, どのような場合に, 両方の抵抗力を考える必要があるか。具体的な数値に基づいて説明しなさい。

5. 質量 2 グラムの小さな球を油を満たした容器中で静止状態から放すと, 球は 5 cm/s の終速度に達する。球が終速度の 90% で達するまでに要する時間を求めよ。ただし, 抵抗力は球の速さに比例するものとする。$\log_e 0.1 = -2.3025$

6. 質量 80 kg のスカイダイバーが飛行機からジャンプし, 終速度が 50 m/s に到達する。空気抵抗力が速さに比例するとして,

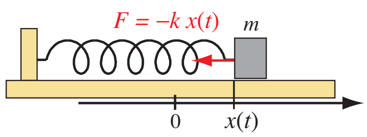
   1) スカイダイバーの速さが 30 m/s になったときの加速度はいくらか。
   2) 50 m/s になったときの抵抗力の大きさはいくらか。
   3) 30 m/s になったときの抵抗力の大きさはいくらか。

1.10 振動

物体に作用する力が物体の平衡位置からの変位に比例して, 物体の運動を妨げる向きであるときは, 平衡位置を中心とする往復運動が起きる。このような運動は周期運動あるいは振動運動と呼ばれる。バネに取り付けられた物体の振動, 振り子の運動および弦楽器の振動などの周期運動には馴染みがあろう。振動運動をする系は無数にあって, 固体中の分子はその平衡位置のまわりで振動しており, 光あるいは電磁波は電場ベクトルと磁場ベクトルが振動している。交流回路では電圧, 電流および電荷が時間的に周期的な変化をする。生体内での電気現象は一定の周期で繰り返されるし, 心臓や筋肉組織では機械的な振動現象が見られる。正常な周期からのずれを観察すれば体に起きている異常を検知することができる。また, 磁気共鳴画像法 (Magnetic Resonance Imaging) では, 身体に一定の周期（振動数）の電磁波を照射して, 体内の物質を構成する原子核に強制的な振動を生じさせる（強制振動)。この振動の様子を観察することで, 断層写真を構成している。

1.10.1 単振動

ここでは, いくつかの基本的な振動現象について議論する。最初に, バネ（バネ定数 k）につながれた物体（質量 m ）の往復運動を調べてみよう。図のように右向きが正の向きである座標を設定する。バネが自然長のときの物体の位置を原点とする。時刻 t における物体の位置を $x(t)$ とすると, 物体の加速度は $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$ と表すことができ,



バネが物体におよぼす力は P19 で議論したように $-kx(t)$ となる。したがって, 運動方程式は

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) \tag{1.10.1}$$

と書くことができる。

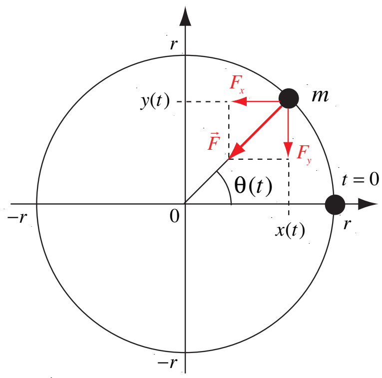
このように物体の運動を決定する運動方程式は, 位置や速度の時間微分を含む方程式となっている。このような方程式を微分方程式という。 運動方程式は位置 $x(t)$ の時間についての 2 階微分によって書かれる（2 階微分方程式)。このような 2 階微分方程式を解いて, $x(t)$ や $v(t)$ を求めるためには時間についての積分を 2 度行う必要がある。P12 と P31 で紹介した落下の問題の場合は比較的簡単に積分を実行することができる例である。しかし, そのような場合は希である。微分方程式を解くための方法は数学で詳しく調べられており, 様々な一般論がある。ここでは, 一般的な数学の議論は避けて, かなり広範囲に適用可能な手段を紹介することに留める。

等速円運動との関係

運動方程式 (1.10.1) の解がどのようになるかを調べるために, これまで何度か議論した等速円運動について考える。右図のように, 円の中心方向を向いた大きさが一定の力を受けて, 質量 m の物体が半径 r の円周を等速で回っていることを考える。この物体の運動方程式は

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}$$

となる。力の大きさは一定でも, 向きは時々刻々変化する。力ベクトルを成分で表すと



$$\vec{F} = (F_x, F_y) = (-F\cos\theta(t), -F\sin\theta(t)) = \left(-F\frac{x(t)}{r}, -F\frac{y(t)}{r}\right)$$

と書くことができる。したがって, 運動方程式を成分ごとに書くと

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{F}{r}x(t), \qquad m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -\frac{F}{r}y(t) \tag{1.10.2}$$

となる。これらの運動方程式において, $k = \dfrac{F}{r}$ と読み替えると, 微分方程式 (1.10.1) と同じ形であることが分かる。

ところで, 時刻 $t = 0$ において物体が $(r, 0)$ の位置から等速円運動を始めたとすると, 角度 $\theta(t)$ は

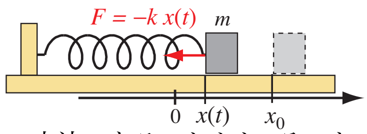
$$\theta(t) = 2\pi\frac{t}{T}$$

となる。したがって, 時刻 t での物体の位置は

$$(x(t), y(t)) = \left(r\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right), r\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\right)$$

と表すことができる。これは, 運動方程式 (1.10.2) の解となっているはずである。以上の考察から, 単振動の運動方程式の解も三角関数 cos や sin で表すことができるであろうことが推察される。

それでは, 単振動の運動方程式の解について考えてみよう。運動方程式の解 $x(t)$ は, 物体がどのような条件で運動を開始するか（初期条件）で, 異なるものになる。このため, 単振動について代表的な 2 つの場合を考え, 一般的な運動がどのようになるかについて議論する。



[A] 時刻 $t = 0$ において, 物体は $x(0) = x_0$ の位置にあって, 静止 $v(0) = 0$ した状態から運動を開始

運動方程式 (1.10.1) を直接解いて $x(t)$ を求めることが論理的に分かりやすい方法である。しかし, そのためには少々, 数学的な技術が必要となる。ここでは, 論理的な飛躍については我慢することにして, 結果がどうあるべきかを議論してみよう。(直接的な解の求め方が気になる人のために, 付録 C に解説をしておく。)

等速円運動についての考察から, 物体の位置 $x(t)$ が cos あるいは sin の関数となることが分かった。また, $x(0) = x_0, v(0) = 0$ の条件を満たすためには cos を用いた関数で表すことができることが想像できるであろう。とは言え, 関数の詳細については分からないので,

$$x(t) = A\cos(\omega t) \tag{1.10.3}$$

と仮定してみよう。ここで, A と ω は未知数である。この関数が運動方程式 (1.10.1) と初期条件 [A] を満たすと示すことができれば, 運動方程式 (1.10.1) が解けたと言ってよいであろう。このために, 式 (1.10.3) を運動方程式 (1.10.1) に代入してみる。式 (1.10.3) の両辺を時間で微分してみると

$$\frac{dx(t)}{dt} = -A\omega\sin(\omega t), \qquad \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t) \tag{1.10.4}$$

となる。したがって, 運動方程式 (1.10.1) の両辺に (1.10.4) を代入した結果は

$$m\left[-A\omega^2\cos(\omega t)\right] = -k\left[A\cos(\omega t)\right] \tag{1.10.5}$$

となることが分かる。この結果から, 両辺が等しくなるためには, A および $\cos(\omega t)$ の部分はどのような値であってもよくて（恒等式）, ω についての条件

$$m\omega^2 = k \qquad \Longrightarrow \qquad \omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.10.6}$$

が満たされていればよい。したがって, 運動方程式 (1.10.1) の解は

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \tag{1.10.7}$$

のように表すことができる。ここで, 式 (1.10.6) の $\pm$ は, cos が偶関数であるから同じ結果となる。

次に, 初期条件 [A] について調べてみよう。時刻 $t = 0$ において, 物体の位置は $x(0) = x_0$ となる必要がある。式 (1.10.7) の時刻 t をゼロとしてみると

$$x(0) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \times 0\right) = A \tag{1.10.8}$$

となるので, 未知数 A は

$$A = x_0 \tag{1.10.9}$$

と決定される。もう一つの初期条件 $v(0) = 0$ について確認してみると,

$$v(t) = -x_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \qquad \Longrightarrow \qquad v(0) = -x_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \times 0\right) = 0 \tag{1.10.10}$$

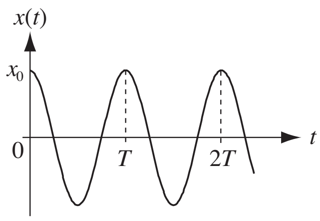
となり, 自動的にこの条件が満足されていることが分かる。

以上のことから, 初期条件 $x(0) = x_0$ と $v(0) = 0$ を満たす運動方程式 ((1.10.1) の解は

$$x(t) = x_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \tag{1.10.11}$$

と書けることが分かる。この関数をグラフに描いてみると右図のようになる。振動現象において, 「1 回の振動にかかる時間」を周期とよぶ。右のグラフでは周期を T と表しているが, 式 (1.10.11) との関係を調べてみると

$$\sqrt{\frac{k}{m}}T = 2\pi \quad \Longrightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{1.10.12}$$



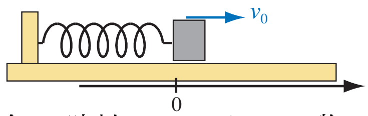
となっていることが分かる。バネ定数 k が大きいことは, バネが硬いことを意味している。式 (1.10.12) の結果は, 硬いバネでは周期が短くなること, すなわち, 早く振動することを教えている。 これは諸君の感覚とも一致することだろう。また, 同じバネを使っても, 重い物体（m が大きい）を用いると周期が長くなることも分かる。重たい物体はゆっくり動くのである。

振動現象を議論するときには, 「単位時間（1 秒間）あたりの振動の回数」を表す振動数（周波数）という量を用いることがある。 1 回の振動にかかる時間が T〔秒〕であれば, 振動数 f〔1/秒〕は

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.10.13}$$

と表すことができる。振動数には f の記号が用いられるが, これは frequency の頭文字である。また, 振動数の単位は〔1/秒〕であるが,〔Hz〕（ヘルツと読む）と書くことが多い。

[B] 時刻 $t = 0$ において, 物体は $x(0) = 0$ の位置にあって, $v(0) = v_0$ で運動を開始



初期条件が異なると, どのような結果となるか調べてみよう。初期条件 [A] の場合は, 時刻 $t = 0$ において, 物体は原点ではない位置にあった。このために, 物体の位置 $x(t)$ は cos の関数となったのである。初期条件 [B] では, 時刻 $t = 0$ で物体は原点にある。このような場合, 物体の位置 $x(t)$ は cos の関数で表すことはできないであろう。このために, 三角関数のもう一つの候補である sin の関数について検討してみよう。試みに,

$$x(t) = B\sin\omega t \tag{1.10.14}$$

とおいて, 運動方程式 (1.10.1) と初期条件 [B] を同時に成立させることができるか調べてみる。ここで, B と ω は未知数である。まず, 式 (1.10.14) が運動方程式 (1.10.1) を満足するための条件について調べてみる。このために, $x(t)$ の両辺を時間で微分してみると,

$$\frac{dx(t)}{dt} = B\omega\cos(\omega t), \qquad \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -B\omega\sin(\omega t) \tag{1.10.15}$$

となる。したがって, 運動方程式 (1.10.1) の両辺に (1.10.14) を代入した結果は

$$m\left[-B\omega^2\sin(\omega t)\right] = -k\left[B\sin(\omega t)\right] \tag{1.10.16}$$

となる。この結果から, ω についての条件

$$m\omega^2 = k \quad \Longrightarrow \quad \omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.10.17}$$

が得られることになる。この結果は P34 の式 (1.10.6) とまったく同じである。このことから, 運動方程式 (1.10.1) の解は cos の関数でも sin の関数でも, ω についての条件が満足されていればよいことが分かる。 式 (1.10.17) の結果を式 (1.10.14) に代入すると, 運動方程式の解は

$$x(t) = \pm B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \tag{1.10.18}$$

となることが分かる。ここで, $\pm$ は ω の符号に対応している。次に B を決定するために, 初期条件 $x(0) = 0$ と $v(0) = v_0$ について調べてみる。式 (1.10.18) において, $t = 0$ としてみると

$$x(0) = \pm B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}0\right) = 0 \tag{1.10.19}$$

となり, 自動的に $x(0) = 0$ の条件が満足されていることが分かる。速度については

$$v(t) = \pm B\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \quad \Longrightarrow \quad v(0) = \pm B\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}0\right) = \pm B\sqrt{\frac{k}{m}} = v_0 \tag{1.10.20}$$

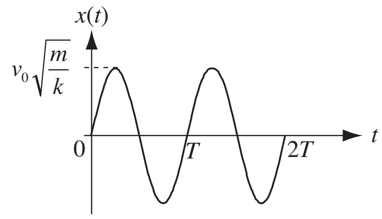
という条件が課せられることになり, 未知数 B が

$$B = \pm\sqrt{\frac{m}{k}}v_0 \tag{1.10.21}$$

のように決定される。結局, $\pm$ のどちらを採用したとしても, $x(t)$ の結果は同じになり

$$x(t) = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \tag{1.10.22}$$

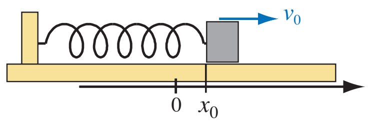
であることが分かる。この関数（$v_0 > 0$ の場合）をグラフに描いてみると右図のようになる。振動の周期は初期条件 [A] の場合と同じになる。バネと物体の周期は初期条件, すなわち, どのような状況から運動を始めるかにはよらない。振動の振れ幅は振幅とよばれる。初期条件 [B] のような状況から振動を開始させると, 振幅は



$$v_0\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{1.10.23}$$

となることが分かる。これは, 計算の結果ではあるが, エネルギー保存則（1.12 章）の考え方に基づくと理解が容易になる。

[C] 一般的な初期条件



ここまでの議論で, ２つの異なる初期条件について振動現象の表し方を調べた。その結果, 単振動には cos 型と sin 型の２種類の振動の仕方があることが分かった。では, より一般的な初期条件から振動が開始されるとすると, どのように分析を進めればよいのだろう。一般の場合として, **時刻 $t = 0$ で $\boldsymbol{x}(0) = x_0$ の位置から速度 $\boldsymbol{v}(0) = v_0$** で運動を始めるという条件を考えてみよう。

確信を持つことはできないが, ２つの特別な初期条件 [A] と [B] の場合は, それぞれ, cos 型と sin 型の振動をしていた。今の場合は, これら２つの振動が混じっていると考えてみるのは無茶ではないだろう。したがって, 振動の様子が

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \tag{1.10.24}$$

と表すことができるとしてみよう。これまでと同様に, 両辺の時間微分を計算すると

$$\frac{dx(t)}{dt} = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t), \qquad \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t) \tag{1.10.25}$$

となり, 運動方程式 (1.10.1) に代入した結果は

$$m\left[-A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t)\right] = -k\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right] \tag{1.10.26}$$

となる。これより, ω がこれまでと同じ条件

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.10.27}$$

を満足すればよいことが分かる。初期条件から

$$x(0) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\times 0\right) \pm B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\times 0\right) = A = x_0 \tag{1.10.28}$$

$$v(0) = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\times 0\right) \pm B\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\times 0\right) = \pm B\sqrt{\frac{k}{m}} = v_0 \tag{1.10.29}$$

となり, この場合の振動の様子は

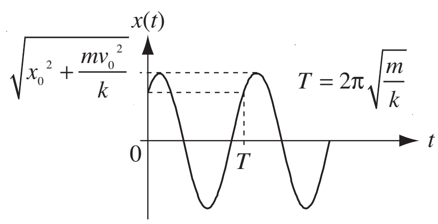
$$x(t) = x_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\times t\right) + v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\times t\right) \tag{1.10.30}$$

となる。ところで, 三角関数の公式

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\phi), \qquad \tan\phi = \frac{b}{a} \tag{1.10.31}$$

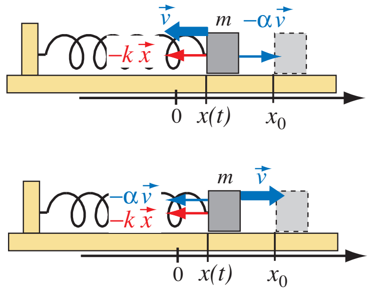
を使って, 式 (1.10.30) を整理すると

$$x(t) = \sqrt{x_0{}^2 + \frac{mv_0{}^2}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right), \qquad \tan\phi = \frac{x_0}{v_0}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.10.32}$$



のように表すことができる。この関数（$v_0 > 0$ の場合）をグラフに描くと右図のようになり, sin 関数の開始点が角度 ϕ だけずれている様子が分かる。以上のことから, 単振動には sin 型と cos 型の解があり, 一般の場合では, これらの和（一次結合）が解となっている。

1.10.2 減衰振動



次に, P31 で議論したような物体の速度に比例する抵抗力が働いている場合について考えてみる。右図に示したように、物体が同じ位置であっても、速度の向きが逆となる場合がある。しかし、速度 $\dfrac{dx(t)}{dt}$ の符号は速度ベクトルの向きを表しており、どちらの場合であっても抵抗力は $-\alpha\dfrac{dx(t)}{dt}$ と表すことができる。したがって、運動方程式は

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) - \alpha\frac{dx(t)}{dt} \tag{1.10.33}$$

となる。このように抵抗力が働いている場合についても, sin 型と cos 型の振動が起きる。ただし, 抵抗力が働いているので, 次第に振幅が小さくなっていくであろう。そこで, cos 型の解として

$$x(t) = A(t)\cos(\omega t) \tag{1.10.34}$$

のように振幅が時間とともに変化すると考えてみる。両辺の時間微分を計算する必要であるが, 今の場合は振幅が時間変化することに注意する必要があり,

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dA(t)}{dt}\cos(\omega t) - \omega A(t)\sin(\omega t), \qquad \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d^2A(t)}{dt^2}\cos(\omega t) - 2\omega\frac{dA(t)}{dt}\sin(\omega t) - \omega^2 A(t)\cos(\omega t) \tag{1.10.35}$$

となる。式 (1.10.34) と (1.10.35) を運動方程式 (1.10.33) に代入すると

$$m\left[\frac{d^2A(t)}{dt^2}\cos(\omega t) - 2\omega\frac{dA(t)}{dt}\sin(\omega t) - \omega^2A(t)\cos(\omega t)\right] + \alpha\left[\frac{dA(t)}{dt}\cos(\omega t) - \omega A(t)\sin(\omega t)\right] + k\left[A(t)\cos(\omega t)\right] = 0 \tag{1.10.36}$$

となる。この関係が時間 t について恒等式として成立するためには

$$\cos(\omega t)\text{ の係数：}\quad m\frac{d^2A(t)}{dt^2} + \alpha\frac{dA(t)}{dt} + (k - m\omega^2)A(t) = 0 \tag{1.10.37}$$

$$\sin(\omega t)\text{ の係数：}\quad 2m\omega\frac{dA(t)}{dt} + \alpha\omega A(t) = 0 \tag{1.10.38}$$

の関係が成立する必要がある。これらの関係から ω と $A(t)$ がどのようになるかを決定することになる。条件 (1.10.38) は

$$\frac{dA(t)}{dt} = -\frac{\alpha}{2m}A(t), \qquad \frac{d^2A(t)}{dt^2} = -\frac{\alpha}{2m}\frac{dA(t)}{dt} = \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 A(t) \tag{1.10.39}$$

と書き直すことができる。これらを, 式 (1.10.37) に代入すると

$$m\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 + \alpha\left(-\frac{\alpha}{2m}\right) + (k - m\omega^2) = 0 \quad\Longrightarrow\quad -\frac{\alpha^2}{4m} + k - m\omega^2 = 0 \tag{1.10.40}$$

となり

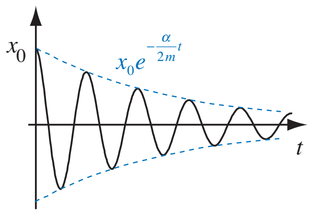
$$\omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2} \tag{1.10.41}$$

のように ω を決定することができる。さらに, 条件 (1.10.38) から

$$\frac{dA(t)}{dt} = -\frac{\alpha}{2m}A(t) \quad\Longrightarrow\quad \int_0^t \frac{1}{A(t)}\frac{dA(t)}{dt}dt = \int_0^t -\frac{\alpha}{2m}dt \quad\Longrightarrow\quad A(t) = A(0)e^{-\frac{\alpha}{2m}} \tag{1.10.42}$$

のように振幅の時間依存性を決定することができる。ここで, 振動の初期条件が $x(0) = x_0$ であるならば, 物体の位置は

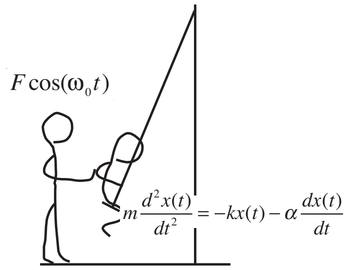
$$x(t) = x_0 e^{-\frac{\alpha}{2m}t}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2}\,t\right) \tag{1.10.43}$$



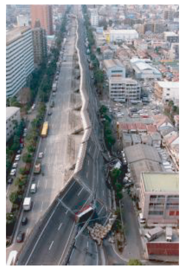
のようになることが分かる。この振動の様子は右のグラフのようになり, 全体に掛かる指数関数のために振動の振幅は時間とともに減少していくことになる。このような運動を「減衰振動」と呼ぶ。

1.10.3 強制振動

「一休さんが指一本で釣鐘を動かした」というお話がある。一休さんは釣鐘の揺れに合わせて, 少しづつ振動を大きくしていったのである。また, ブランコに乗っている子供の背中を揺れに合わせて押してやると, ブランコの振幅が大きくなっていく。

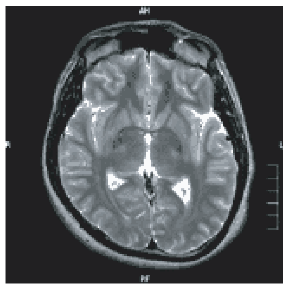


このような現象は強制振動または共鳴現象と呼ばれ, 自然界においてしばしば見かける。まだ記憶に新しい阪神淡路大震災において, 高速道路が崩壊した写真を見たことがあるだろう。高架道路で渋滞に巻き込まれ, 反対車線を大型トラックが走っていったとき, 高架全体がゆらゆら揺れることを経験したことがあるだろうか。高架道路もブランコのように固有の振動をする性質を持っている。この振動に丁度一致するように地震の揺れが加わると, 振幅が増大されて, 最終的には破壊に至ることになる。



阪神淡路大震災
阪神高速道路

磁気共鳴画像法 (MRI) は身体の断面を画像化する方法である。その名の通り, 共鳴現象を利用している。物質を構成する原子（原子核）は固有の振動をする性質を持っている。この振動に一致するような振動の性質を持つ電磁波を身体に照射すると, 振動を大きくすることができる。このような現象を利用して体の内部の情報を得ることができる。強制振動について調べるために, 減衰振動をするような系に, 外部から振動数 $\frac{\omega_0}{2\pi}$ の力



Magnetic Resonance Imaging
磁気　共鳴　画像

$$F\cos(\omega_0 t) \tag{1.10.44}$$

が働いている場合について考える。運動方程式は

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-kx(t)-\alpha\frac{dx(t)}{dt}+F\cos(\omega_0 t) \tag{1.10.45}$$

となる。外力が働いていないときは減衰振動と同じで, $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2}$ で与えられるテンポで振動をする。しかし, 強制振動の場合は外力によって振動のテンポが与えられているので, 振動の様子は外力によって決められている ω_0 を用いて

$$x(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t) \tag{1.10.46}$$

と表すことができそうである。これが, 解となっているかどうかは, まだ分からないが, 運動方程式に代入をしてみよう。これまでと同様に, $x(t)$ の時間微分

$$\frac{dx(t)}{dt}=-A\omega_0\sin(\omega_0 t)+B\omega_0\cos(\omega_0 t),\qquad \frac{d^2x(t)}{dt^2}=-A{\omega_0}^2\cos(\omega_0 t)-B{\omega_0}^2\sin(\omega_0 t), \tag{1.10.47}$$

を用意して, 運動方程式に代入すると

$$m\left[-A{\omega_0}^2\cos(\omega_0 t)-B{\omega_0}^2\sin(\omega_0 t)\right]+\alpha\left[-A\omega_0\sin(\omega_0 t)+B\omega_0\cos(\omega_0 t)\right]+k\left[A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)\right]-F\cos(\omega_0 t)=0 \tag{1.10.48}$$

となる。この関係が時間 t の恒等式として成立するためには

$$\left(-m{\omega_0}^2+k\right)A+\alpha\omega_0 B-F=0,\qquad -\alpha\omega_0 A+\left(-m{\omega_0}^2+k\right)B=0 \tag{1.10.49}$$

関係が成立する必要がある。これらの関係から A と B を求めると

$$A=\frac{k-m{\omega_0}^2}{\left(k-m{\omega_0}^2\right)^2+\left(\alpha\omega_0\right)^2}F,\qquad B=\frac{\alpha\omega_0}{\left(k-m{\omega_0}^2\right)^2+\left(\alpha\omega_0\right)^2}F, \tag{1.10.50}$$

となることが分かり, 強制振動の解は

$$x(t)=\boxed{\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k}{m}-{\omega_0}^2\right)^2+\left(\frac{\alpha}{m}\omega_0\right)^2}}\frac{F}{m}}\sin\left(\omega_0 t+\phi\right) \tag{1.10.51}$$

と表すことができる。

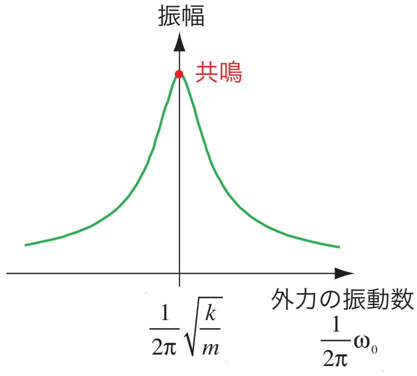
いま考えている系において, 外力がなく抵抗力もなければ, 単振動をすることになる。このときの振動数は

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

となる。式 (1.10.51) は振動数 $\frac{1}{2\pi}\omega_0$ の外力が加わったときの振動の様子を表している。黄色で囲った部分は振幅を表しており,

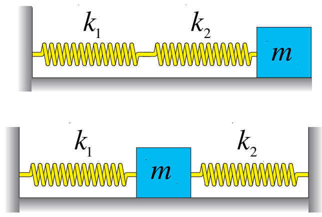
$$\frac{1}{2\pi}\omega_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

のように, 振動する系固有の振動数と外力の振動数が一致したとき振幅が最大となることを示している。このような現象を共鳴とよぶ。

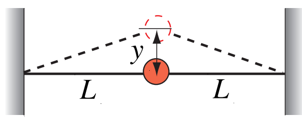


練習問題

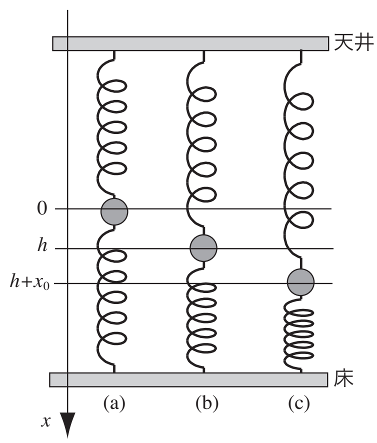
1. P23 の問題 18 について, 球体が地球であるとして, 物体が地表から落下を始めて反対側に到達するまでの時間を数値で求めなさい。$R = 6.3\times10^6$ m, $g = 10$ m/s^2 とせよ。
2. 図のようにばね定数 k_1 および k_2 の 2 つばねに質量 m の物体が付けてある。ばねの質量は無視できるものとする。



   1) 物体が平衡の位置からずれているときに, 物体がばねから受ける力, ばねが物体から受ける力, ばね同士に働く力, 壁がばねから受ける力, ばねが壁から受ける力などを, 作用・反作用の法則に注意して, 描きなさい。
   2) 物体が平衡の位置から右へ x だけずれているとき, 2 つのばねが x_1 および x_2 だけ伸びているとすると, x,x_1,x_2 にはどのような関係が成り立つか。
   3) 物体に働く力 F はどのような式で表すことができるか。物体の位置 x の式で表すとどのようになるか。
   4) 物体の運動方程式を書き, 物体が単振動をすることを確かめなさい。
   5) それぞれの単振動の周期はどのようになるか。
3. 図のように, 長さ L で各々に張力 T を受ける 2 つのゴム糸に質量 m の物体が取り付けてある。この物体を小さな距離 y だけゴム糸と垂直な向きに変位させる。張力はほとんど変わらないと仮定する。また, 重力は考えない。



   1) 物体を元の位置にもどす向きの力 $-(2T/L)y$ が働くことを示しなさい。
   2) 物体が単振動をすることを確認して, 周期を求めなさい。($L >> y$ の近似を使う)
4. 図のように, バネが天井と床に固定され, 2 本のバネの間には質量 m の物体が取り付けられている。2 本のバネは, 同じバネ定数 k のバネである。上下のバネが同じ長さのとき（図 (a)）, 両方のバネは伸びも縮みもしていない（自然長)。この物体の位置を原点として, x 軸の正の向きを下向きとする。



   1) 物体を支えていた手を離すと, 図 (b) のように物体は高さ h だけ下がった位置でつり合って静止した。物体に働いている力の様子を図示せよ。
   2) (1) のとき, m, g, k, h の間にはどのような関係が成立しているか。
   3) 図 (c) のように, つり合いの位置から x_0 だけ物体を押し下げて手を離すと, 物体は単振動を始める。時刻 t での物体の位置を $x(t)$ として, 物体の運動方程式を書け。
   4) (2) の結果を用いて, (3) の運動方程式を簡単にして, 物体が単振動することを説明せよ。
   5) 図 (c) の位置で手を離した瞬間を $t = 0$ として, 時刻 t での物体の位置 $x(t)$ を表す式を書け。
   6) この物体の振動の周期を表す式を書け。

5. 質量 m〔kg〕のおもりを, 長さ L〔m〕の ひも につないで, 原点 O につるす。ひも を角度 θ_0 だけ鉛直方向から傾けて, 速度がゼロの状態で放すと, 角度 θ_0 の振幅で左右の往復運動を始める。図のように水平方向に X 軸, 鉛直方向に Y 軸をとってこの「振り子」の運動について考える。
ひも は おもり を原点 O の方向に引っ張る。この張力を $\vec{f}(t)$ とする。おもり に働く重力を $m\vec{g}$ と表すと, $\vec{g}$ は常に鉛直方向で, 一定の大きさ 9.8 m/s^2 である。

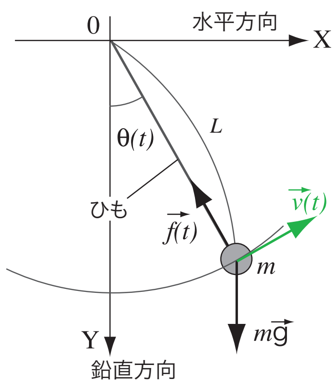


図1

1) 時刻 t での おもり の座標を $(x(t), y(t))$ とすると, ひも の鉛直方向からの角度 $\theta(t)$ を用いて

$$x(t) = L\boxed{\ 1\ }, \qquad y(t) = L\boxed{\ 2\ }$$

と表すことができる。

2) 図2と図3に示したように,$\theta(t)$ が小さい角度の場合, 三角関数は

$$\sin\theta(t) \simeq \theta(t), \qquad \cos\theta(t) \simeq 1$$

と近似できる。振り子の振幅が小さくて, この近似が使える場合, おもり の座標を $(x(t), y(t))$ は

$$x(t) \simeq L\boxed{\ 3\ }, \qquad y(t) \simeq L\boxed{\ 4\ }$$

と表すことができる。

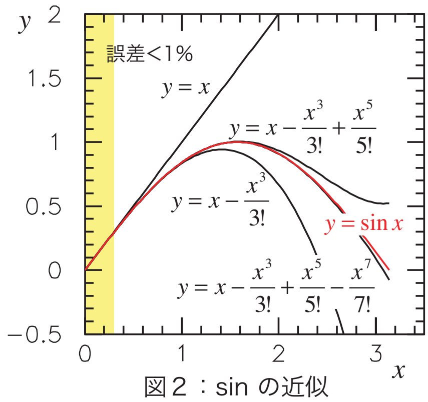


図2：sin の近似

3) 2) の結果を使うと, 振り子の振幅が小さい場合, おもり の加速度は

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \simeq L\boxed{\ 5\ }, \qquad \frac{d^2y(t)}{dt^2} \simeq L\boxed{\ 6\ }$$

となることが分かる。

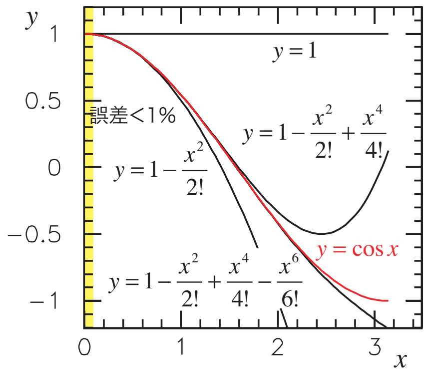


図3：cos の近似

4) おもり には 重力 と ひもの張力が働く。それぞれの力の大きさを mg, f と書くと、

力の X 成分 :$F_x(t) \simeq \boxed{\ 7\ }$, 　力の Y 成分 :$F_y(t) \simeq \boxed{\ 8\ }$

となる。

5) 4) の結果に 2) で用いた近似を適用すると

$$F_x(t) \simeq \boxed{\ 9\ }, \qquad F_y(t) \simeq \boxed{\ 10\ }$$

となることが分かる。

6) 3) と 5) の結果を用いて, おもり の運動方程式を書くと

X 方向:　$mL\boxed{\ 5\ } \simeq \boxed{\ 9\ }$, 　Y 方向:$\boxed{\ 6\ } \simeq \boxed{\ 10\ }$

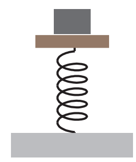
となり、Y 方向の運動方程式から ひも の張力が $f - \boxed{\ 11\ }$ となることが分かる。

7) ひも の張力 $f = \boxed{\ 11\ }$ を X 方向の運動方程式に代入すると

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \boxed{\ 12\ }\theta(t)$$

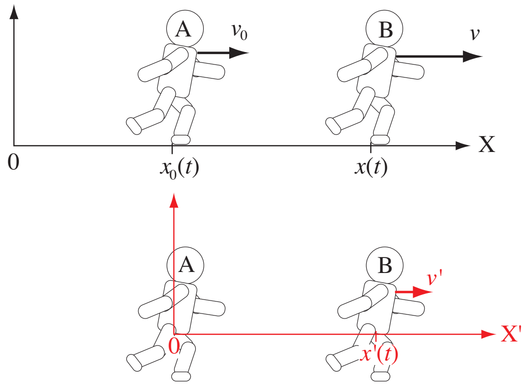
という 角度 $\theta(t)$ についての微分方程式を得る。このことから, 振幅の小さな振り子の運動は「単振動」であり、その周期は $\boxed{\ 13\ }$ であることが分かる。振り子の周期は振幅、, おもりの質量に関係していない。これがガリレオの発見した「振り子の等時性」である。

6. 鉛直方向に周期 1.2 秒の単振動とする水平板に載せられたブロックがある。このブロックが板から離れないように運動できるには振動の振幅にどのような制限があるか。



7. ばね定数 200 N/m のばねに質量 4 kg のおもりが吊り下げてある。この系には抵抗力が作用せず, 振動数が 10 Hz の sin 型の外力が働いている。この系が振幅 2 cm の強制振動を起こすとき, 外力の最大値はいくらか。

1.11 慣性系と見かけの力



A と B の 2 人が走っていることを考えてみる。地面に対する速度を A は v_0 , B は v とすると, A にとって B は

$$v - v_0 \tag{1.11.1}$$

で走っているように見えるだろう。このような 2 者間の速度を相対速度という。なぜ, このように考えることができるのかを調べてみよう。地面に固定された座標系（上の図）において, 時刻 t での A の位置を $x_0(t)$ と, B の位置を $x(t)$ とすると, それぞれの速度は

$$v_0 = \frac{dx_0(t)}{dt}, \qquad v = \frac{dx(t)}{dt} \tag{1.11.2}$$

と書くことができる。この状況を A とともに移動する座標系（下の図）で考えてみる。この座標系において B の位置を $x'(t)$ とすると,

$$x'(t) = x(t) - x_0(t) \tag{1.11.3}$$

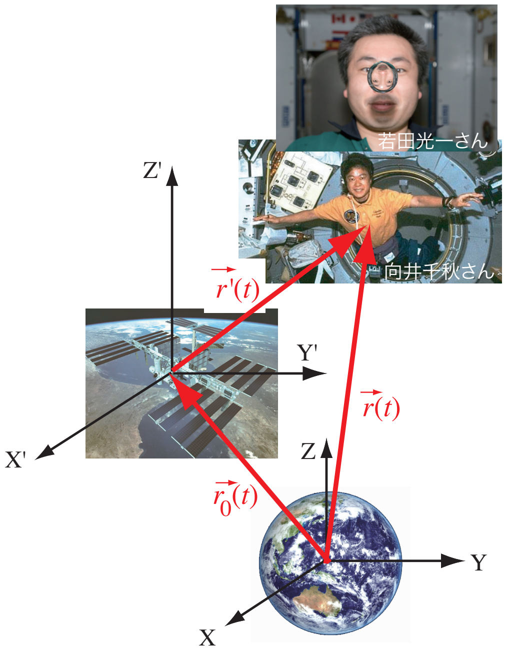
という関係が成立する。この式の両辺を時間 t で微分すると

$$\frac{dx'(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} - \frac{dx_0(t)}{dt} \tag{1.11.4}$$

という関係を得る。A とともに移動する座標系での B の速度は $v' = \dfrac{dx'(t)}{dt}$ であるから, 式 (1.11.4) に式 (1.11.2) を代入すれば

$$v' = v - v_0 \tag{1.11.5}$$

という関係を得る。これは, 最初に考えた (1.11.1) の関係と同じである。つまり, どのような座標系で議論するかによって速度は異なることになる。



では, 一般的な場合について考えてみよう。例として, 右の図のように地球を周回する宇宙船とそれに乗り組んでいる飛行士について考える。位置ベクトルとして

$\vec{r}_0(t)$	:	地球を原点とする宇宙船の位置ベクトル
$\vec{r}(t)$	:	地球を原点とする飛行士の位置ベクトル
$\vec{r}'(t)$	:	宇宙船を原点とする飛行士の位置ベクトル

を用意すると, これらのベクトルの間には

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}'(t) \tag{1.11.6}$$

という関係がある。地球に固定された座標系 XYZ について, 飛行士の運動方程式を書くと

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}(t)) \tag{1.11.7}$$

ここで, m は飛行士の質量で, $\vec{F}(t)$ は飛行士が受ける地球からの重力（万有引力）である。式 (1.11.6) の両辺を時間で 2 回微分してみると

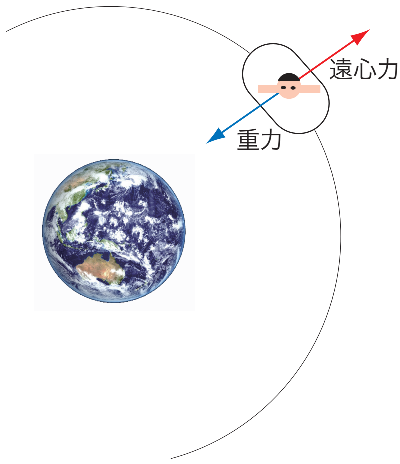
$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = m\frac{d^2\vec{r}_0(t)}{dt^2} + m\frac{d^2\vec{r}'(t)}{dt^2} \tag{1.11.8}$$

という関係を得る。これを式 (1.11.7) に代入して整理をすると

$$m\frac{d^2\vec{r}'(t)}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}_0(t) + \vec{r}'(t)) - m\frac{d^2\vec{r}_0(t)}{dt^2} \tag{1.11.9}$$

となる。$\vec{r}'(t)$ は宇宙船に固定された座標系 X'Y'Z' についての飛行士の位置ベクトルなので, $\dfrac{d^2\vec{r}'(t)}{dt^2}$ は座標系 X'Y'Z' での加速度である。したがって, 式 (1.11.9) は宇宙船から見たときの飛行士の運動方程式であることが分かる。

宇宙船からみたときの飛行士の運動方程式 (1.11.9) には, 地球からの重力 $\vec{F}$ 以外に新たな項 $-m\dfrac{d^2\vec{r}_0(t)}{dt^2}$ が付け加わっている。ここで, $\dfrac{d^2\vec{r}_0(t)}{dt^2}$ は宇宙船の加速度を表している。このように運動を記述するための座標系が加速度運動をしている場合, その加速度と逆の向きに見かけの力が発生することになる。この力は慣性力と呼ばれ, 特に座標系が円運動をしているときは遠心力と呼ばれる。宇宙船の中で飛行士は無重力状態となることはよく知られている。なぜ, そのようになるのだろうか。まず, 地球に固定された座標系で宇宙船の運動について考える。宇宙船が半径 r の円軌道を速さ v で周回していると, 宇宙船は地球の中心方向に大きさ



$$a = \frac{v^2}{r}$$

の加速度を持つ。この加速度は地球の重力によるので, 地球の質量を M, 宇宙船の質量を m_0 とすると, 運動方程式は

$$m_0 a = G\frac{m_0 M}{r^2}$$

となり, 両辺を m_0 で割れば, $a = G\dfrac{M}{r^2}$ であることが分かる。宇宙船はこのような加速度運動をしているので, この宇宙船から見れば, 飛行士には地球の方向と逆向きに大きさ

$$G\frac{mM}{r^2}$$

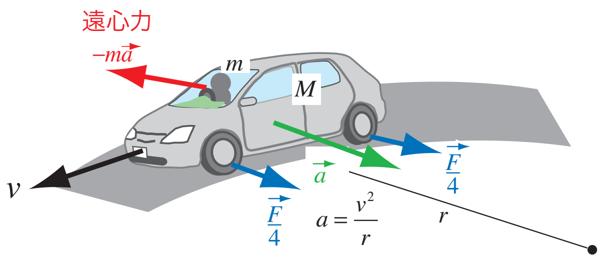
の遠心力が働くことになる。一方, 飛行士も地球からの重力を受ける。この重力の大きさは万有引力の法則により

$$G\frac{mM}{r^2}$$

で, 地球の方向を向いている。したがって, 飛行士には遠心力と重力の 2 つの力が働いており, これらの力は大きさが同じで向きが逆であるため, 2 つ力は常につり合うことになる。つまり, 宇宙船内の飛行士は無重力となる。

別の方法で無重力となることを説明することができる。宇宙船は速さ v で円運動している。飛行士も速さ v で円運動している。両者ともに, 地球からの重力を受けて円軌道をまわっているのである。その飛行士はたまたま宇宙船の中にいると考えれば, 飛行士が宇宙船内でプカプカ浮いているのは当然ではないか！

車に乗ってカーブを走行すると, カーブの外へ向かって力を受けることを経験する。車がカーブに沿った円軌道を進行するためには, 車には中心方向（カーブの内向き）に向いた力が働いていなければならない。この力は, 道路とタイヤの摩擦によって生じている。道路とタイヤの間に摩擦がなければ, 車には内向きの加速度は発生しないので, カーブは曲がれない。どこかに衝突するか,



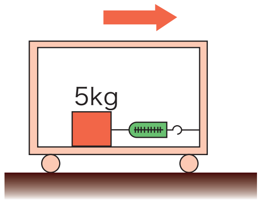
田圃に落ちるか..... 。冬期の福井では道路が凍結するので摩擦がなくなる。要注意！さて, 正しくカーブを進行する車には内向きの加速度が働いている。したがって, この車を基準とする座標系にいる搭乗者には見かけの力（遠心力）が働くことになる。この力の向きは車の加速度と逆向きなので, カーブの外へ向かって力を受けることになる。

この場合も別の説明が可能である。仮に車のシートがツルツルで, 車と搭乗者の間には摩擦がないと考えてみよう。車にはタイヤと道路の摩擦によって, カーブの内向きに力が働いてカーブを曲ることができる。しかし, 搭乗者には力が働く術がない。力が働いていない物体は等速直線運動をする。車はカーブを進行して行くが, 搭乗者は真直ぐ進む。すると, 搭乗者は車の壁に押し付けられるだろう！

以上の議論から分かるように, 物体の運動の様子はどのような座標系で見るかによって, その説明が異なるものになる。これが正しくて, あれは間違っているということはないが, 説明は首尾一貫していなければならない。

練習問題

1. 図に示すようにばね秤に取り付けられた 5 kg の物体が滑らかで水平な面上に静止している。貨車の前方端につながれたこのばね秤は、貨車の加速中 18 N の読みを示す。



   (a) 貨車が静止しているとき、ばね秤がゼロを示すとしてこの車の加速度を決定せよ。

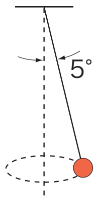
   (b) 貨車が一定の速度で運動すると、ばね秤の読みはどうなるか。

   (c) この物体にかかる力は、車内および車外の人から観て、どのような力か、説明せよ。

2. エレベーターの中で体重計の上に人が立っている。体重計の読みの最大値および最小値は 591 N および 391 N であった。エレベーターの運動開始期間と運動終了期間中の加速度の大きさは同じで一定であるとする。 (a) この人の体重, (b) エレベーターの加速度を求めよ。

3. 糸の先につるした重りは、地球の自転のために厳密には地球の中心に向かう線の方向からずれる。北緯 35° では重りは地球の中心に向かう線からどれだけずれるか。$\cos 35° = 0.819$, $\sin 35° = 0.574$

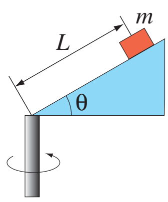
4. 鉄道の線路が半径 400 m でカーブしている。線路は角度 6° で内側に傾斜している。この線路はどのような速さの列車のためにに設計されたものか。$\tan 6° = 0.1051$



5. 円錐振り子は長いひもの端に付けたおもりが水平面内で円運動する系である。ひもと鉛直線の角度は変化しない。 10 m のひもに付けた 80 kg のおもりが鉛直線と角度 5° をなす円錐振り子を考える。$\cos 5° = 0.9962$

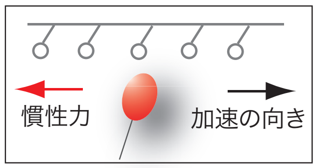
   (a) ひもの張力はいくらか。

   (b) おもりの回転の周期はいくらか。



6. 角度 θ のくさびをを考える。くさびの斜面は滑らか（摩擦がない）で, このくさびを一定の速さで回転させると, くさびの上に載せた質量 m の物体は一定の高さに留まる。物体の位置がくさびの下端から距離 L だけ上昇したとき, 物体の回転の速さは次式となることを示せ。

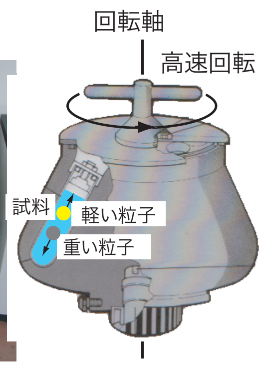
7. 加速中の列車の中では、加速度と逆の方向に慣性力が働く。この結果、乗客はつり革などにつかまり、慣性力に対抗しなければならない。一方、ヘリウムガスを入れた風船を持っていると、風船は加速度の方向に移動するという現象を観察することができる。すなわち、風船は慣性力と逆向きに力を受ける。これはなぜか。



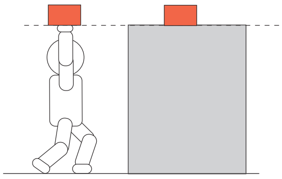
8. 図は実習機器センターにある「超遠心分離器」の概要である。右図の回転部に試料を入れた筒が格納されており、回転軸に対して傾いている。

   (a) 高速回転すると、試料の溶液より密度の小さな物質は回転軸の方向へ、密度の大きな物質は外側へ移動する。これはなぜか。問題 7 を参考にして考えよ。

   (b) 回転半径が 10 cm で、70000 回転/分の回転をするとき、試料中の粒子が受ける遠心力の大きさは重力の何倍か。



1.12 仕事とエネルギー



物理学における「仕事」という言葉の意味は, 日常使われている意味とは大きく異なることがある。例えば, 10 kg の物体をしばらくの間地面から持ち上げていても, 物理学の意味での「仕事」はしていない。つまり, 人が物体をある高さに持ち上げていようと, 物体がその高さの台の上に置かれていようと, 物体の状態としては同じなのである。台の上に物体が置いてあるとき, 「台は何も仕事をしていない」ということには違和感していない」ということには違和感を持たないであろう。物体を持ち上げている人は台の役割をしているだけだと物理学は主張するのである。けれども, 持ち上げ続けていると, 汗が出たり, ふるえたり, 呼吸があらくなったりすることは誰でも経験している通りである。物を一定の位置に保持するだけでは仕事は必要ない。物理学における仕事の定義は生理学における定義と違うのは明らかである。なぜ汗がでるのか？おもりを持ち上げているために, 食物エネルギーが消費されるのはなぜか？おもりを持つというだけのために身体の仕掛けを動かす必要があるのはなぜか？おもりを台の上に置けば, 何もしないでおもりは置かれたままになっている。つまり, エネルギーを供給しないでも, 台はおもりを同じ高さに保持し続けるのである。

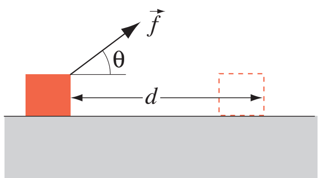
生理学的な事情は筋肉の機構による。人間や他の動物の筋肉には 2 種類のものがある。第 1 は横紋筋とか骨格筋と呼ばれるもので, 我々の腕の筋肉はその例である。横紋筋は思ったように動かすことができる。第 2 は平滑筋と呼ばれており, 腸の筋肉, あるいはハマグリの大閉殻筋のようなものである。平滑筋の働きは非常に遅いが, ある位置に留めておくことができる。すなわち, ハマグリが殻をある位置に閉じておこうとすると, 大きな力でそれを変えようとしても, ビクともしないのである。力がかかっても, 何時間もその位置を保って疲れない。ちょうどおもりを支えている台のようなものである。ある位置に留められた筋肉は一時固定し, 仕事なしで維持できる。ハマグリも別段の努力をしていない。我々がおもりを持っておくために努力をしなければならないのは横紋筋の構造によることなのである。

神経の刺激が一つの筋繊維に達すると, その繊維はピクリと動いては, 緩む。だから, 我々が何かを持っていると, 神経の刺激が筋肉に次々に沢山やってきて, ピクリピクリが何度も起こっておもりを支える。重い物を持ち続けて疲れてくると, 筋肉はふるえだす。刺激が来るのが規則的ではなく, その上, 筋肉が疲れて早く反応できなくなるからである。どうしてこんな非能率な仕掛けになっているのだろうか？進化の過程の事情によるのであろうが, 早い平滑筋というものが出来なかったのである。平滑筋ならば, 我々はただ立って, 固定しさえすればよいのであるから, おもりを支えるのにずっと能率的なはずである。仕事もいらないし, エネルギーもいらない。しかし, 平滑筋の欠点は, 働きが非常に遅いことである。

ここまでの話で誤解を招くかもしれないので注意をしておく。おもりを保持しているとき, 我々はおもりには仕事をしていない。しかし, 筋肉内の小さな世界では筋繊維がピクリピクリと動いて仕事をしているのである。筋繊維が仕事をするためにはエネルギーが消費される。だからといって, その仕事やエネルギーはおもりには伝達されてはいないのである。

物理学における「仕事」は

（移動方向の力の成分）×（移動距離）



で定義される。右の図のように物体に働いている力が, 移動方向に対して角度 θ 傾いていて, 物体が距離 d だけ移動したときの「力がする仕事」は

$$(f\cos\theta)\times(d)$$

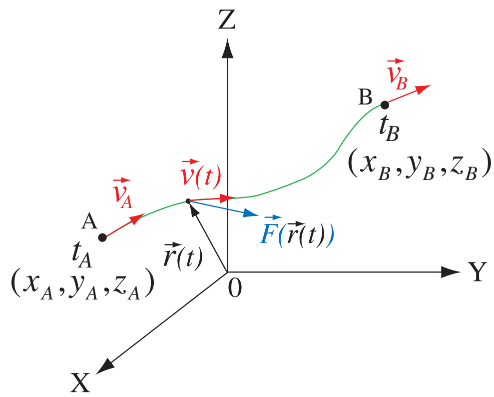
となる。では, なぜこのように定義するのだろうか。その理由は「エネルギー保存則」にある。重油を燃焼させて蒸気機関を働かせたり, 水を高所から落として発電を行い, その電気エネルギーを利用している。このとき, 重油を燃焼させることによって発生する熱や, 高いところにある水はわれわれに何を供給しているのだろうか。この「何かをすることができる能力」をエネルギーと呼び, 自然現象のなかでエネルギーと呼ばれる量は保存されることを 1842 年にマイヤーが唱えた。1847 年にヘルムホルツが, 力学的現象以外に熱現象, 電磁気的現象やその他の現象においても, エネルギー保存則がより広い範囲で成立していることを示した。これは科学が今までに生み出した, もっとも基礎的で重要な法則の一つである。1840 年代にはジュールによって, 熱エネルギーが力学的エネルギーと交換される際, 一定の関係式が成立していることが確立された。(1cal = 4.1855 J) このジュールの研究に敬意を表して, エネルギーの単位にジュール J という単位が採用されているのである。

エネルギー保存則は運動の第 2 法則から導くことができる。右の図のように質量 m の物体が緑色の曲線のような軌道を通って, 点 A から点 B まで移動することを考える。物体はその位置ごとに異なる力 $\vec{F}$ を受けて運動をするとしよう。ある時刻 t での物体の運動方程式は

$$m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{F}(\vec{r}(t)) \tag{1.12.1}$$

と書くことができる。ここで, $\vec{r}(t)$ は時刻 t における物体の位置ベクトルで, $\vec{v}(t)$ は速度ベクトルを表している。この運動方程式の両辺について速度ベクトル $\vec{v}(t)$ との内積をとると

$$m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\cdot\vec{v}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{v}(t) \tag{1.12.2}$$



を得る。ここで微分の公式を思い出すと

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v(t))^2 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{v}(t)\cdot\vec{v}(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(v_x(t)^2 + v_y(t)^2 + v_z(t)^2\right) \\ &= v_x(t)\frac{dv_x(t)}{dt} + v_y(t)\frac{dv_y(t)}{dt} + v_z(t)\frac{dv_z(t)}{dt} = \vec{v}(t)\cdot\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\end{aligned}$$

という関係があることが分かる。この関係を用いて式 (1.12.2) の左辺を書き直すと

$$\frac{m}{2}\frac{d}{dt}(v(t))^2 = \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{v}(t) \tag{1.12.3}$$

となる。この両辺を物体が点 A にいるときの時刻 t_{A} から点 B に到着する時刻 t_{B} の範囲で積分すると

$$\int_{t_A}^{t_B}\frac{m}{2}\frac{d}{dt}(v(t))^2\,dt = \int_{t_A}^{t_B}\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{v}(t)dt$$

であり, この左辺は被積分関数が時間の微分で書かれていて, それを時間で積分するので, 簡単に

$$\frac{1}{2}m{v_B}^2 - \frac{1}{2}m{v_A}^2 = \frac{1}{2}mv(t_B)^2 - \frac{1}{2}mv(t_A)^2 = \int_{t_A}^{t_B}\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{v}(t)dt \tag{1.12.4}$$

となることが分かる。この式 (1.12.4) の左辺は点 B と点 A において物体が持つ運動エネルギーの差を表している。想像できるように, 右辺は力がする仕事を意味しているのであるが, もう少し分かりやすい（使いやすい）形式に書き直してみよう。速度と位置の関係

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right)$$

を用いて式 (1.12.4) の右辺を書き下すと

$$\begin{aligned}&\int_{t_A}^{t_B}\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{v}(t)dt \\ &\quad= \int_{t_A}^{t_B}F_x(x(t),y(t),z(t))\frac{dx(t)}{dt}dt + \int_{t_A}^{t_B}F_y(x(t),y(t),z(t))\frac{dy(t)}{dt}dt + \int_{t_A}^{t_B}F_z(x(t),y(t),z(t))\frac{dz(t)}{dt}dt\end{aligned}$$

となる。ここで, 右辺に表れた時間についての積分は, 置換積分を行うことによって

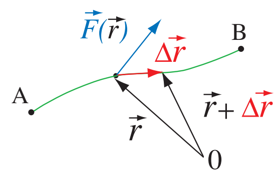
$$\int_{t_A}^{t_B}F_x(x(t),y(t),z(t))\frac{dx(t)}{dt}dt = \int_{x_A}^{x_B}F_x(x,y,z)dx$$

のように座標についての積分に書き直すことができる。したがって, y と z 座標についても同様にすれば

$$\int_{t_A}^{t_B}\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{v}(t)dt = \int_{x_A}^{x_B}F_x(x,y,z)dx + \int_{y_A}^{y_B}F_y(x,y,z)dy + \int_{z_A}^{z_B}F_z(x,y,z)dz \tag{1.12.5}$$

と書けることが分かる。この式 (1.12.5) と (1.12.4) の結果をまとめると

$$\frac{1}{2}m{v_B}^2 - \frac{1}{2}m{v_A}^2 = \int_{x_A}^{x_B}F_x(x,y,z)dx + \int_{y_A}^{y_B}F_y(x,y,z)dy + \int_{z_A}^{z_B}F_z(x,y,z)dz \tag{1.12.6}$$



となる。ここで, 右辺の x, y, z についての積分は物体が移動していく軌道に沿って実行することになる。式 (1.12.6) は, 一見, x, y, z の積分を別々に実行して合計すればよいように見えるが, 例えば, x の積分をするとき被積分関数の $F_x(x,y,z)$ の y と z は x の積分範囲にしたがって値が変化することに注意する必要がある。このような積分をまとめて書き表わすために, 軌道に沿ったすなわち軌道の接線方向の変位を表す微小ベクトルを

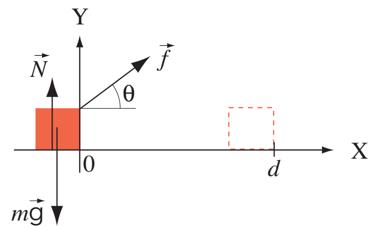
$$d\vec{r} = (dx, dy, dz)$$

と書いて, 式 (1.12.6) の積分をまとめて

$$\frac{1}{2}m{v_B}^2 - \frac{1}{2}m{v_A}^2 = \int_A^B \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \tag{1.12.7}$$

と表す。このような決まった経路に沿って行う積分を線積分という。積分記号 $\displaystyle\int_A^B$ は点 A から点 B の軌道に沿って積分を実行することを意味する。式 (1.12.7) の左辺は点 B と点 A で物体が持っている運動エネルギーの変化を意味し, 右辺は点 A から点 B への移動の間に力がする仕事を与えている。すなわち, 移動の間に力が正の仕事をすれば, 点 B での物体の運動エネルギーは点 A での値と比べてその仕事分だけ増加することになる。

では具体的に式 (1.12.7) を計算するにはどのようにすればよいのだろうか。まず, 力ベクトルの向きも大きさも変化しない場合について考えてみよう。右の図は P44 で議論したものであるが, 物体に働く力として重力と垂直抗力を加えて, 移動の方向に X 軸, 垂直方向に Y 軸を設定してある。物体に働く力を成分で書くと



$$\vec{F} - (f\cos\theta, f\sin\theta + N - mg)$$

となる。また, 物体は X 軸に沿って移動するので, 変位を表す微小ベクトルは

$$d\vec{r} = (dx, 0)$$

である。ベクトルの内積 $\vec{F}\cdot d\vec{r}$ には移動方向と垂直な力からの寄与はない。 したがって, 式 (1.12.7) の線積分は

$$\int_{(0,0)}^{(d,0)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^d f\cos\theta dx = fd\cos\theta$$

のように, 移動方向 X 軸のみの積分となる。この結果は（移動方向の力の成分）×（移動距離）の仕事を表していることが分かる。したがって, エネルギー保存則は

$$\frac{1}{2}m{v_B}^2 - \frac{1}{2}m{v_A}^2 = fd\cos\theta \tag{1.12.8}$$

とまとめることができる。このエネルギー保存則の意味を理解するために運動方程式に基づいて物体の運動を考えてみよう。X 軸方向の運動方程式は

$$m\frac{dv(t)}{dt} = f\cos\theta$$

となっていて, この運動方程式を解くと

$$v(t) = v(0) + \left(\frac{f}{m}\cos\theta\right)t, \qquad x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}\left(\frac{f}{m}\cos\theta\right)t^2$$

となることが分かる（P12 参照）。ここで, $t = t_B$ として

$$x(0) = 0, \qquad v(0) = v_A, \qquad x(t_B) = d, \qquad v(t_B) = v_B$$

とすれば

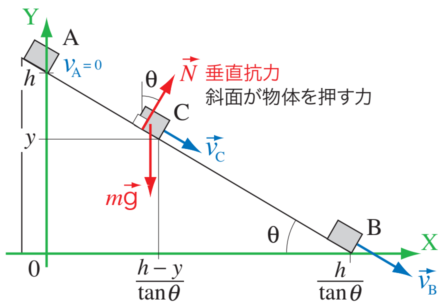
$$v_B = v_A + \left(\frac{f}{m}\cos\theta\right)t_B, \qquad d = v_A t_B + \frac{1}{2}\left(\frac{f}{m}\cos\theta\right){t_B}^2$$

となり, $t_B = \dfrac{m(v_B - v_A)}{f\cos\theta}$ であることが分かる。これを上の右の式に代入すると

$$\begin{aligned} d &= v_A\frac{m(v_B - v_A)}{f\cos\theta} + \frac{1}{2}\left(\frac{f}{m}\cos\theta\right)\left(\frac{m(v_B - v_A)}{f\cos\theta}\right)^2 \\ &= \frac{m(v_B - v_A)}{f\cos\theta}\left(v_A v_B - {v_A}^2 + \frac{1}{2}{v_B}^2 - v_B v_A + \frac{1}{2}{v_A}^2\right) = \frac{m(v_B - v_A)}{f\cos\theta}\left(\frac{1}{2}{v_B}^2 - \frac{1}{2}{v_A}^2\right) \end{aligned} \tag{1.12.9}$$

となって, 整理すると 式 (1.12.8) のエネルギー保存則と同じ結果となっていることが分かる。このように, 運動の様子を調べるときにエネルギー保存則を利用すれば, 運動方程式を解くという操作をしないで結果を得ることができるのである。

つぎに, X 軸と Y 軸の両方を扱うときの方法について説明しよう。図のように, 最初静止してた質量 m の物体が, 高さ h の位置から傾斜角 θ の斜面を滑り落ちる。この問題を運動方程式で解くことについては P29 の問題 3 で扱った。図のように水平方向に X 軸を垂直方向に Y 軸を設定する。物体に働いている力は重力を垂直抗力で, そのベクトルの合計は



$$\vec{F} = (N\sin\theta, N\cos\theta - mg)$$

となる。斜面を表す直線の方程式は

$$y = -x\tan\theta + h$$

なので, 両辺を x で微分すると

$$\frac{dy}{dx} = -\tan\theta, \qquad dy = (-\tan\theta)dx$$

であることが分かる。したがって, 物体の移動方向の微小ベクトルは

$$d\vec{r} = (dx, dy) = (dx, (-\tan\theta)dx)$$

と表すことができる。この微小ベクトルと力ベクトルの内積は

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = (N\sin\theta, N\cos\theta - mg)\cdot(dx, (-\tan\theta)dx) = (mg\tan\theta)\,dx$$

となり, 物体の移動方向と垂直な力 $\vec{N}$ は仕事に寄与しないことが分かる。以上のことを用いて物体が最初の位置 A から斜面の途中の C まで移動する間に重力がする仕事は

$$\int_A^C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{\frac{h-y}{\tan\theta}} (mg\tan\theta)dx = mg(h-y)$$

となる。したがって, エネルギー保存則は

$$\frac{1}{2}m{v_C}^2 - \frac{1}{2}m{v_A}^2 = mg(h-y)$$

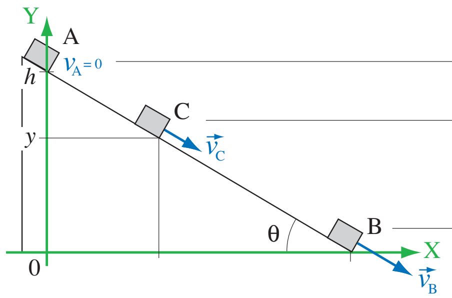
と表すことができる。この式を書き直すと

$$\frac{1}{2}m{v_C}^2 + mgy = \frac{1}{2}m{v_A}^2 + mgh \tag{1.12.10}$$

のように表すことができる。ここで, 右辺に表れた mgy は物体が C にいるときの位置エネルギーを, 左辺の mgh は物体が A にいるときの位置エネルギーを表している。重力が一定の大きさ mg としてよい場合は, 重力による位置エネルギーは重力の大きさ× 高さとなる。したがって, 式 (1.12.10) の左辺は場所 C における物体の運動エネルギーと位置エネルギーの和で, 右辺は場所 A における物体の運動エネルギーと位置エネルギーの和を表している。そして, それらのエネルギーの和は場所によらずいつも一定の値となっている。つまり, 物体の持つエネルギーは運動エネルギーであったり, 位置エネルギーであったりと, その形態は変化するが, すべてのエネルギーを集めればいつも一定の量に保たれているのである。一般に, ある場所から別の場所への移動の間に力がする仕事は, それぞれの場所での位置エネルギーの差となる。すなわち, 場所 A から場所 C への移動での仕事は, 場所 A の位置エネルギー U_A と場所 C の位置エネルギー U_C の差と等しい：

$$U_A - U_C = \int_A^C \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \tag{1.12.11}$$

各場所でのエネルギーの変化をまとめると下の表のようになる。斜面の最上端で物体が持っている位置エネルギーが, しだいに運動エネルギーへと変換されていく様子が見て取れるであろう。



	運動エネルギー	位置エネルギー	全エネルギー
A	0	mgh	mgh
C	$\frac{1}{2}m\left(\sqrt{2g(h-y)}\right)^2$	mgy	mgh
B	$\frac{1}{2}m\left(\sqrt{2gh}\right)^2$	0	mgh

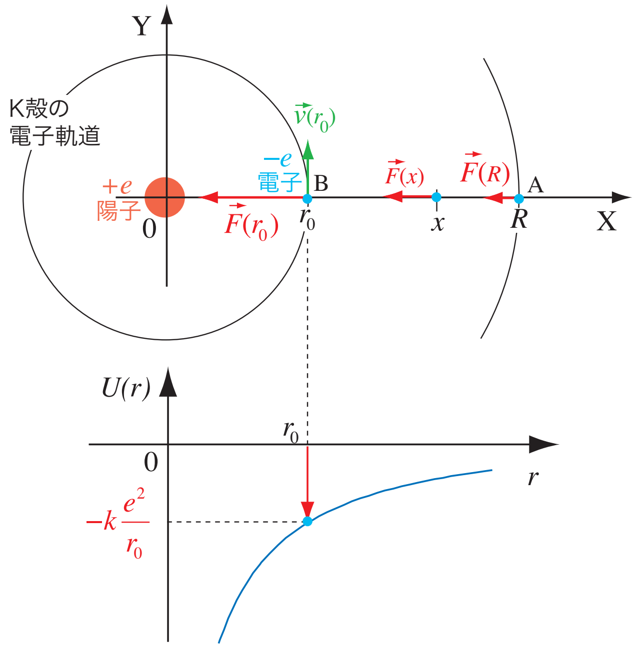
ここまで, エネルギー保存則あるいは仕事について調べてきた。物体が動くとか落ちるとかという問題については, エネルギー保存則が成り立っていそうで, 計算するときには役に立つのだろう。しかし, 線積分などという大袈裟な道具を使っているのに, 力が一定の場合にしか適用していない。また, エネルギー保存則は物理学における極めて重要で広範囲に適用可能というのに力学の問題しか考えていない。このような不満の一部を解消するために, 化学反応に関する問題を扱ってみよう。

といっても, 一般的な化学反応について議論するには, まだ力不足なので, 最も簡単な水素原子のイオン化について考えてみる。化学の教科書をみると, 水素原子のイオン化エネルギーは

$$1312 \text{ kJ/mol}$$

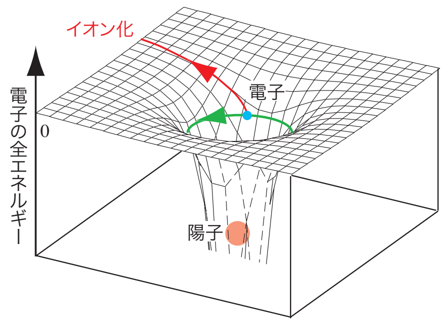
と書いてある。すなわち, 水素原子 1 つから電子を引き剥がすためには

$$\frac{1.312\times10^8}{6.02\times10^{23}} = 2.18\times10^{-18}\,\text{〔J〕}$$



のエネルギーが必要である。イオン化（正イオン）とは原子核のまわりを回っている電子を原子とは無関係な場所, つまり十分に遠方に引き離すということである。そのためにはエネルギーを与えなければならない（吸熱反応)。逆に遠方にいる電子は, 正イオンに引き付けられて原子核の周囲に落ち着く。このときはエネルギーが放出されることになる（発熱反応)。この二つのエネルギーは等しい。したがって, イオン化エネルギーを求めるためにはどちらの場合を考えてもよい。そこで, 原子核から距離 R の位置にいる電子が半径 r_0 の円軌道である K 殻電子軌道まで移動する際に余剰となるエネルギーを求めてみよう。電子に働く力は電気力で, 原子核の電荷は $+e$ で電子は $-e$ なので引力が働くことになる。上の図のように, 原子核を中心にして座標を設定する。簡単のために電子は X 軸に沿って移動するとしよう。電子が中心から距離 x の位置にあるとき, 電子の位置ベクトルは

$$\vec{r} = (x, 0)$$



なので, 微小ベクトルは

$$d\vec{r} = (dx, 0)$$

となる。また, この位置にいる電子に働く力は

$$\vec{F}(\vec{r}) = \left(-k\frac{e^2}{r^2}, 0\right)$$

と書けるので, 場所 A の位置エネルギー $U(R)$ と場所 B の位置エネルギー $U(r_0)$ の差は, 式 (1.12.11) より

$$U(R) - U(r_0) = \int_A^B \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_A^B -k\frac{e^2}{x^2}dx = \left[k\frac{e^2}{x}\right]_R^{r_0} = k\frac{e^2}{r_0} - k\frac{e^2}{R}$$

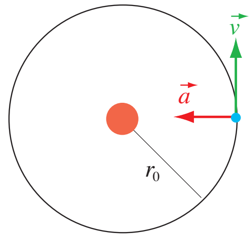
となることが分かる。ここで, イオン化のために電子を無限遠方まで取り出すことを考えて, $R=\infty$ としてみると

$$U(\infty) - U(r_0) = k\frac{e^2}{r_0} \qquad \Longrightarrow \qquad U(r_0) = U(\infty) - k\frac{e^2}{r_0} \tag{1.12.12}$$

原子核から距離 r の場所にいる電子は無限遠方にいる電子を比べて位置エネルギーが $k\dfrac{e^2}{r_0}$ だけ低いことが分かる。

すなわち, 原子に束縛されている電子は, 上の図のように, 原子核を中心にして「穴」の中でクルクル回っているような状態にある。この電子が「穴」の外で出るためには（イオン化）, 無限遠方にいる電子のエネルギーとの差額分のエネルギーを与える必要がある。これが, イオン化エネルギーである。では, イオン化エネルギーの具体的な数値を求めてみよう。

いま, K 殻にいる電子が速さ v で半径 r_0 の円軌道を周回しているとする。電子は, 原子核から電気力を受けているので, 電子の質量を m とすると, 運動方程式は



$$m\frac{v^2}{r_0} = k\frac{e^2}{{r_0}^2}$$

である。ここで, 速さ v で円軌道を回るときの加速度が $\dfrac{v^2}{r_0}$ であることを用いた。これより

$$v^2 = \frac{ke^2}{mr_0} \tag{1.12.13}$$

という関係式を得る。このような円軌道と周回する電子が持つエネルギーは, 運動エネルギーと位置エネルギーの和であるから, 式 (1.12.12) の結果を用いて

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r_0) = \frac{1}{2}mv^2 + U(\infty) - k\frac{e^2}{r_0}$$

となる。これに式 (1.12.13) の関係を代入して整理すると

$$E = U(\infty) - \frac{1}{2}k\frac{e^2}{r_0} \quad < U(\infty)$$

であることが分かる。このことから, 半径 r の円軌道にいる電子のエネルギーは無限遠方の位置エネルギーより $\dfrac{1}{2}k\dfrac{e^2}{r_0}$ だけ小さいことが分かる。したがって, この不足分のエネルギーを電子に供給しない限り, 電子は原子の束縛から逃れられない。この不足分のエネルギーの数値を求めてみよう。電気力の比例定数は $k = 9 \times 10^9 \dfrac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}$ で, 電子の電荷および陽子の電荷の大きさは $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C である。水素原子の半径すなわち K 殻電子軌道の半径は実験で測定されていて $r_0 = 0.529\ \mathrm{\mathring{A}} = 5.29 \times 10^{-11}\mathrm{m}$ である。これらの数値を用いると

$$\frac{1}{2}k\frac{e^2}{r_0} = \frac{1}{2} \times 9 \times 10^9 \times \frac{\left(1.6 \times 10^{-19}\right)^2}{5.29 \times 10^{-11}} \quad = 2.18 \times 10^{-18}〔\mathrm{J}〕$$

となって, 水素原子のイオン化エネルギーを正しく説明していることが分かる。

練習問題

1. ある物体に働く力が図 1 のように変化する。物体が

   (a) $x = 0$ から $x = 8$ m まで,

   (b) $x = 8$ m から $x = 10$ m まで, (c) $x = 10$ m から $x = 12$ m まで運動するときに

   この力がする仕事を求めよ。

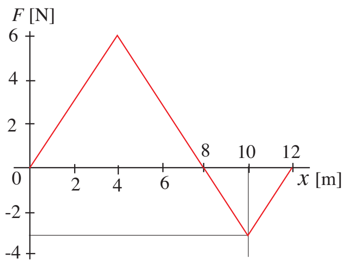


図1

2. 図 2 のような摩擦のない線路の点 A から質量 $m = 5$ kg の物体を放す。

   (a) 点 B および C における物体の速さ、

   (b) 点 A から C まで物体が運動するときに重力がする仕事

   を決定せよ。

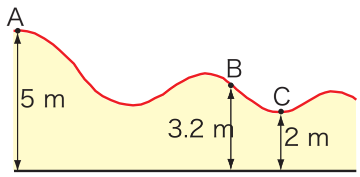


図2

3. 身長 2 m の選手が, 走り高跳びの新記録を作る。2.5 m の水平なバーを飛び越えるためには, 地面を離れるときの速さはどれだけであればよいか。

   [ヒント] ジャンプする前の選手の重心を推定せよ。また, 頂点に達するとき, 体が水平になっていると仮定せよ。

4. 図 3 のように軽いひもでつないだ 2 つの物体が軽い摩擦のない滑車にかけてある。5 kg の物体を静止状態から放す。エネルギー保存則を使って

   (a) 5 kg の物体が地面に当たるときの 3 kg の物体の速度を求めよ。

   (b) 3 kg の物体が上昇できる最大の高さを求めよ。

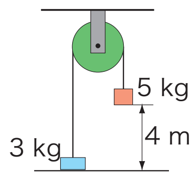


図3

5. 図 4 に示すように車をモデル化して速さ v で運動する円柱（断面積 S）とみなす。円柱は時間 Δt の間に，質量 Δm の空気柱を距離 $v \times \Delta t$ だけ運動させ，したがって，運動エネルギー $\dfrac{1}{2}\Delta m \times v^2$ を与えなければならない。このモデルを使って，空気抵抗力は $\dfrac{1}{2}\rho S v^2$ であることを示せ。ρ は空気の密度である。

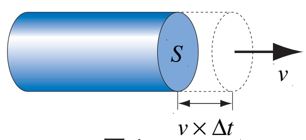


図4

6. ばね定数 k のばねに質量 m のおもりを取り付ける。

   (a) ばねが自然長である位置から、ばねの長さが x だけ伸びるまでおもりを動かす。このために必要な仕事（エネルギー）はどのようになるか。$\int_A^B \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$ にしたがって計算せよ。

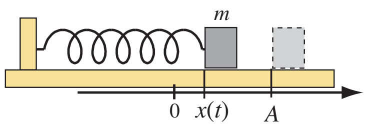
   (b) ばねを x だけ縮めた場合はどうなるか。

   (c) 上の 2 つの場合について求めた仕事は、ばねに位置エネルギーとして蓄えられる。おもりを x_0 だけ引っ張り、放すと、その後おもりは単振動をする（P33-36 参照）。ばねの持つ位置エネルギー」と「おもりの運動エネルギー」の和は一定の値となることを確かめよ。

   (d) 抵抗力が働く場合について、エネルギーの総和はどのようになるか。一定の値とならないのであれば、エネルギーの収支はどのようになっていると考えられるか。

7. フックの法則にしたがうバネを伸びていない長さから 10 cm 伸ばすために 4 J の仕事を必要とする。さらに 10 cm 伸ばすのに必要な仕事はいくらか。

8. エネルギーの考え方を使って, P37 で議論した減衰振動について考える。質量 m の物体がバネ定数 k のバネにつながれている。時刻 $t=0$ において, $x(0)=A$ の位置で物体を放す。まず, 抵抗力がない場合を考える。



   (a) 時刻 t の物体に位置を $x(t)$ と書くと, バネと物体の全体が持つエネルギーが

$$E(t)=\frac{1}{2}m\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}kx(t)^2$$

   と書けることを示せ。

   (b) エネルギー保存則はエネルギーの総和が時間変化しないこと, すなわち $\frac{dE(t)}{dt}=0$ である。この条件を用いて運動方程式が導けることを示せ。また, 物体の位置が $x(t)=A\cos(\omega t)$ のように表せることを示せ。

   (c) 運動エネルギーと位置エネルギーは 1 周期について時間平均すると同じ大きさであることを示せ。時刻 t の運動エネルギーを $K(t)$ と書くと, 時間平均は $\frac{1}{T}\int_0^T K(t)dt$ で求めることができる。T は周期である。

   (d) 全エネルギーが $E(t)=\frac{1}{2}m\omega^2A^2$ と書けることを示せ。

   次に, 抵抗力 $F=av$ が存在する場合について考える。振動の振幅は時間とともに変化するので $A(t)$ と書く。

   (e) バネと物体の全エネルギーは減少していく。この減少の割合（減少率）は

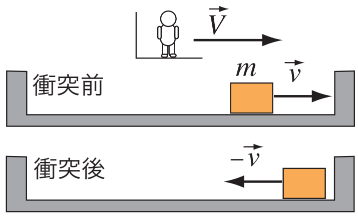
$$\frac{dE(t)}{dt}=-Fv=-\alpha v^2$$

   であることを示せ。

   (f) 1 周期の間では振幅は変化しないとして, エネルギーの減少率の時間平均が $-\frac{1}{2}\alpha A(t)^2\omega^2$ となることを示せ。

   (g) エネルギーの減少率が $\frac{dE(t)}{dt}=-\frac{1}{2}\alpha A(t)^2\omega^2$ と書けるとして, $E(t)=\frac{1}{2}m\omega^2A(t)^2$ の関係を用いて, 振幅の時間変化が指数関数となることを示して, P37 の結果と比較せよ。

9. 図のように質量 m の物体が壁に衝突して跳ね返される様子を考える。衝突の前後で速さ（速度の大きさ）が変わらなければ。物体の持つ運動エネルギーは保存されており、衝突のためにエネルギーが消費されていない。このような衝突を完全弾性衝突という。



   (a) 衝突の前後での物体の速度変化 $\Delta\vec{v}$ は、衝突前の物体の速度 $\vec{v}$ を用いるとどのように表せるか。

   (b) 衝突が短い時間 Δt で起こるとして、物体に壁から働く力は一定であるとする。物体に働く力 $\vec{F}$ は運動方程式を用いて m, $\vec{v}$, Δt によって表すことができる。どのようになるか。

   (c) 図のように速度 $\vec{V}$ で右へ動いている人が、この衝突を観測することを考える。衝突前後の速度はそれぞれどのようになるか。

   (d) (c) の結果から、物体の運動エネルギーは衝突前後で変化することになる。運動エネルギーはどれだけ変化するか。

   (e) 観測する状況によってエネルギーが保存したり、しなかったりするのは正しい結果ではない。どのように説明をすることができるか。

2. 剛体の運動

ここまで議論で取り扱ったのは, 点や小さい粒子などの力学であって, その内部の構造がどうなっているかということは問題にしなかった。生体内の物質の代謝が, どのように, なぜ起きるかというような問題を扱う場合には, 分子や原子の挙動を調べればよいので, 大きさのない粒子についての力学が威力を発揮する。しかし, 分子数が大きくなると, その立体的な構造が重要となってくる。巨大な分子数をもつタンパク質が全体に回転運動をするような機構も生体内にある。また, もっと巨視的に身体の問題を扱うときも, 筋肉や骨の運動を質点の力学だけで分析するのは困難であろう。

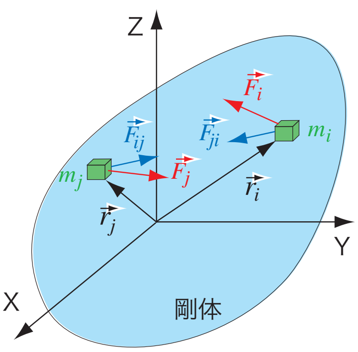
ここでは, 大きさや構造を持っているものにニュートンの運動法則を適用してみる。構造をもつ物体には興味深い力学現象がある。これらの現象は, もちろん, ニュートンの運動法則を組み合わせた以上のものではないが, $\vec{F} = m\vec{a}$ だけで理解できるのは驚くべきことである。

複雑なものを取り扱うといっても, それには色々の種類があるだろう。流れている水, 渦を巻いている銀河, 生体物質中を動き回るタンパク質, 等々。複雑なものの中で, まず始めに最も簡単に扱えるのは「剛体」である。「剛体」とは形が一定の物体（固体）のことを意味する。実際の固体は多少は変形するのであるが, これを理想化して全く変形しない物体を想定する。例えば, 机, 椅子, 机の上の鉛筆, 様々な骨など大きさがあって変形しにくいものを考える。もちろん骨に大きな力を加えれば変形して, 骨折するだろう。「剛体」にそこまで大きな力を加えてはいけない。変形して「剛体」でなくなってしまうから。

物理学は「自然現象をいかに理想化するか」ということに尽きる。大きさを持たない点の運動なんて調べて, 何の役に立つのだろう。本当の骨は変形するのに, それを変形しないと言い切って何が分かるのだろう。そのような疑問や不満があるだろう。もちろん, ニュートンの運動法則は偉大で, 相当に現実に即した状況や物体の現象について答えを与える能力を持っている。しかし, その分析（計算）は相当に複雑なものであろうし, 得られる答えも, 一見, 複雑なものである。そのような手続きを経て自然現象が説明できたからといって, その現象が分かったと思えるだろうか。まずは, 本質ではない枝葉末節を切り捨てて, 理想化のもとで本質の分析をするのが王道ではないだろうか。本質が理解できれば, 次に精密化を行えばよいのである。ここでは, 全く変形しない「剛体」の力学を扱う。次の章では, これと対極をなす「流体」の力学を議論する。「流体」とはちょっとしたことで簡単に変形するもので, 一時も一定の形を保たないようなものである。現実の物は, きっと「剛体」と「流体」の中間に位置するのだろう。

2.1 重心とその運動

図のような剛体（水色の部分）を考える。剛体の形はどのようなものでも構わない。この剛体を何らかの方法で細切れにして, 剛体を微小な部分に分割する。これらの微小部分に番号を付けておく。このようにして出来た i 番目の部分の質量を m_i と書く。いま, i 番目の部分に剛体とは無関係な原因で外部から力（外力） $\vec{F}_i$ が働いているとする。また, 剛体の内部でも, 分子間力などの原因で力が働くであろうから, i 番目の部分が j 番目の部分から受ける力（内力）を $\vec{F}_{ji}$ と書いておく。同様に, j 番目の部分には外力 $\vec{F}_j$ が, i 番目の部分から内力 $\vec{F}_{ij}$ が働く。まとめると



外力	:	物体の外部から加えられる力	内力	:	物体内部で働く力
$\vec{F}_i$	:	m_i に外部から加えられる力	$\vec{F}_{ji}$	:	m_j が m_i に与える力
$\vec{F}_j$	:	m_j に外部から加えられる力	$\vec{F}_{ij}$	:	m_i が m_j に与える力

このような力のうち, 微小部分がお互いに及ぼし合う内力は, 作用・反作用の関係になっているので

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \tag{2.1.1}$$

という関係が成立する。剛体の位置あるいは微小部分の位置を表すために便利がよいように座標を設定する。座標の原点や軸の向きは, 剛体の形や向きと無関係でもかまわない。i 番目の部分の位置ベクトルを $\vec{r}_i$, j 番目を $\vec{r}_j$ と書く。以上の準備を前提として各微小部分の運動を考える。剛体内の全ての微小部分について運動方程式を書くと

$$m_1\frac{d^2\vec{r}_1(t)}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \cdots, \quad m_2\frac{d^2\vec{r}_2(t)}{dt^2} = \vec{F}_2 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \cdots, \quad m_3\frac{d^2\vec{r}_3(t)}{dt^2} = \vec{F}_3 + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} + \cdots,$$

となる。剛体を N 個の微小部分に分けたとすると, 運動方程式も N 個となる。これらの運動方程式の左辺をすべて足し上げ, 右辺をすべて足し上げてみると

$$m_1\frac{d^2\vec{r}_1(t)}{dt^2} + m_2\frac{d^2\vec{r}_2(t)}{dt^2} + m_3\frac{d^2\vec{r}_3(t)}{dt^2} + \cdots = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \left(\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}\right) + \left(\vec{F}_{31} + \vec{F}_{13}\right) + \cdots$$

を得る。ここで, 右辺に表れた内力の和については, 式 (2.1.1) の作用・反作用の関係を使うと

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = \vec{0}, \qquad \vec{F}_{31} + \vec{F}_{13} = \vec{0}$$

となるので, 内力に関する項はすべてゼロとなり

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(m_1\vec{r}_1(t) + m_2\vec{r}_2(t) + m_3\vec{r}_3(t) + \cdots\right) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots \tag{2.1.2}$$

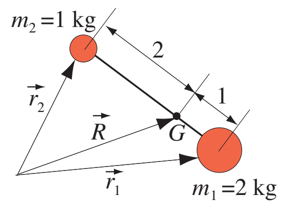
と書けることが分かる。ここで, 新しいベクトルを

$$\vec{R}(t) = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{r}_1(t) + m_2\vec{r}_2(t) + m_3\vec{r}_3(t) + \cdots\right) \quad \text{ただし} \quad M = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots \tag{2.1.3}$$

と定義すると, 式 (2.1.2) の運動方程式は

$$M\frac{d^2\vec{R}(t)}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots \tag{2.1.4}$$

となる。ここで, 新しく導入したベクトル $\vec{R}(t)$ は, 剛体の重心の位置を表すものである。このことを理解するために右の図のような例を考えてみよう。2 kg と 1 kg の 2 つのおもりが棒でつながれている。このとき, この物体全体の重心 G は, そこを支えると「やじろべえ」のようにつり合う点で, この場合, 図のように棒を 2:1 に内分する点であることが分かるだろう。式 (2.1.3) にしたがって計算すると



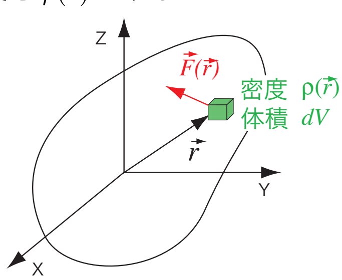
$$\vec{R} = \frac{2\times\vec{r}_1 + 1\times\vec{r}_2}{2+1}$$

となり, たしかに $\vec{R}$ が重心の位置ベクトルを表していることが分かる。逆の言い方をして, 式 (2.1.3) は重心の定義なのである。$\vec{R}(t)$ が重心の位置ベクトルであるならば, 式 (2.1.4) の運動方程式は, 剛体の重心についての運動を表している。つまり物体の重心の運動は, 全質量が重心に集中していて, 外力もすべて重心に働いているときの, 質点の運動と同じであるということが分かる。

剛体の分割の細かさはゼロの極限を取らなければならない。このためには P20-22 で説明した球の体積, 球体の重力の計算に用いた 3 重積分を使えばよい。位置ベクトル $\vec{r}$ で示される場所の密度を $\rho(\vec{r})$ とすると

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots \longrightarrow \iiint \rho(\vec{r})\ dV$$

$$M\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots \longrightarrow \iiint \rho(\vec{r}) \times \vec{r}\ dV$$



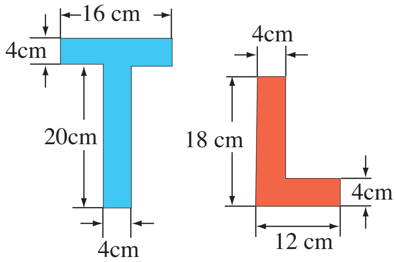
という読み替えをすればよい。したがって, 重心の位置ベクトルは

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\iiint \rho(\vec{r}) \times \vec{r}\ dV, \qquad M = \iiint \rho(\vec{r})\ dV$$

となる。

練習問題

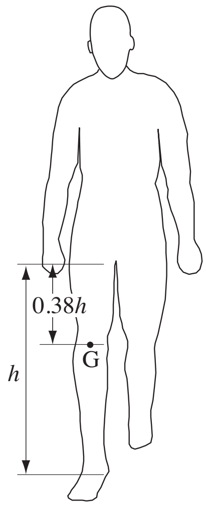
1. 図に示した T 字型, L 字型の平らな板について, 重心の位置を求めよ。



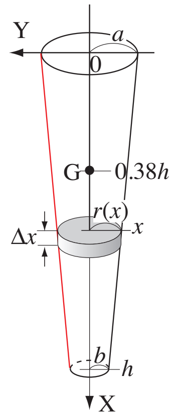
2. XY 座標の (0,0) に 5 kg, (0,4) に 3 kg, (3,0) に 4 kg の質点が置かれている。全体の重心が (0,0) に来るためには, 8 kg の 4 つ目の質点をどこに加えればよいか。

3. 長さ L で線密度 $\lambda(x) = Ax$〔kg/m〕の棒がある。A は定数で, x〔m〕は棒の一端からの長さである。棒の重心を決定せよ。A はどのような単位を持つか。

4. 通常人間の足（下肢）の重心の位置は膝の少し上の位置にある。右図 (a) のように, 足の長さを h とすると, 重心の位置は足の付け根から $0.38h$ の距離となる。簡単のために右図 (b) のように, 足を円錐台（円錐の一部を切り取ったもの）であるとして, 足の太さについて議論してみよう。
足の付け根の断面を半径 a の円で, 足首の断面が半径 b の円であるとする。図 (b) のように座標を設定して足の付け根を原点とする。このとき, 足の形状を表す直線（赤い線）の方程式は



(a)



(b)

$$y = \boxed{\ 1\ } \tag{1}$$

となるので, 足の付け根から距離 x の場所での半径 $r(x)$ は $\boxed{\ 1\ }$ となる。また, 断面の面積は $S(x) = \pi\,(r(x))^2$ なので, 円錐台の体積は積分によって求めることができ,a, b, h, π を用いて

$$V = \boxed{\ 2\ } \tag{2}$$

と書けることが分かる。足の密度 ρ が一様であると仮定すると, 足全体の質量は

$$M = \rho V \tag{3}$$

となる。重心は円錐台の中心軸上にあるので, 重心の Y 座標はゼロとなり, X 座標は

$$G = \frac{1}{M}\int_0^h S(x)\boxed{\ 3\ }\,dx \tag{4}$$

のように求めることができる。式 (1)〜(4) を用いて重心の位置を計算すると,a, b, h を用いて

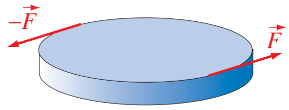
$$G = \frac{\boxed{\ 4\ }}{\boxed{\ 5\ }} \tag{5}$$

となることが分かる。ところで, 足の重心の位置は $0.38h$ なので, 式 (5) の結果を用いると, 足の付け根の半径 a と足首の半径 b の比を求めることができて

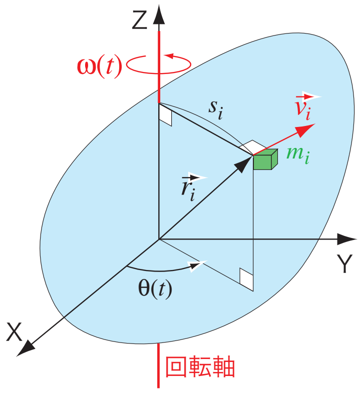
$$\frac{a}{b} = \boxed{\ 6\ } \tag{6}$$

となる。私の太腿の周長は 55 cm, 足首の周長は 22 cm なので, おおよそ正しい推定となっていることが分かる。

2.2 回転の運動エネルギーと慣性モーメント

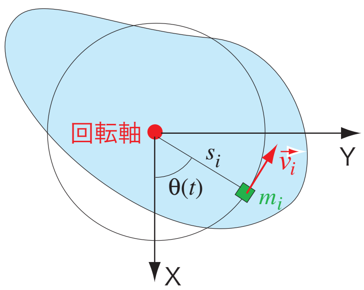


図のような状況を考えてみよう。円板状の剛体に 2 つの力が働いている。ただしこれらの力は大きさが同じで向きが逆であるとする。重心の運動は, 剛体に働いている力のベクトル和によって起きるのだから, いまの場合力の総和はゼロである。したがって, 円板の重心は最初静止しているならそのままで止まっていることになる。では, 円板には何の運動も生じないのであろうか。計算しなくても分かるように, 円板は回転するはずである。つまり, 大きさのある物体に力をおよぼすと, 物体全体の, すなわち重心の運動だけではなく, その物体の回転運動が生じることが予想される。この回転運動について考察してみよう。



右の図のように剛体に軸が串刺しになっていて, 軸は動かないように固定してあるとする。ただし, 軸のまわりの回転は自由にできるものとする。座標は自由に設定してもかまわないのであるが, いまの場合は, 座標軸のいずれかが回転軸と一致しているのが, きっと, 便利であろう。ここでは, Z 軸を回転軸と一致するように選ぶ。剛体を微小部分に分割して, i 番目の部分の質量を m_i, 位置ベクトルを $\vec{r}_i$ とする。剛体は回転しているので, ある時刻 t の微小部分の速度を $\vec{v}_i(t)$ と書く。この微小部分の位置から XY 平面に降ろした垂線の足と原点を結ぶ直線が X 軸となす角度を $\theta(t)$ とする。この角度の時間変化率を角速度と呼び $\omega(t)$ と書く。すなわち

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega(t)$$



である。この角速度は回転の速さを表している。下の図は, Z 軸の方向から剛体の様子を見たものである。微小部分から回転軸への垂線の長さを s_i とすると, 微小部分は回転軸を中心とする半径 s_i の円軌道を回転することになる。いま, 時間 Δt の間に角度が $\Delta\theta$ だけ変化したとすると, 微小部分は距離 $s_i\Delta\theta$ だけ移動することになるので, 微小部分の速さは

$$v_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s_i \Delta\theta}{\Delta\theta} = s_i \frac{d\theta(t)}{dt} = s_i \omega(t) \qquad (2.2.1)$$

であることが分かる。微小部分は速度 v で運動しているので, 運動エネルギー $\frac{1}{2}m_i {v_i}^2$ を持つ。したがって, 剛体全体では

$$K = \frac{1}{2}m_1 {v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2 {v_2}^2 + \frac{1}{2}m_3 {v_3}^2 + \cdots$$

という運動エネルギーを持つことになる。この速度に式 (2.2.1) を代入すると

$$K = \frac{1}{2}m_1 {s_1}^2 \omega(t)^2 + \frac{1}{2}m_2 {s_2}^2 \omega(t)^2 + \frac{1}{2}m_3 {s_3}^2 \omega(t)^2 + \cdots = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i {s_i}^2\right)\omega(t)^2$$

と書ける。ここでの部分は回転の速さと無関係で, 剛体の形, 質量の分布, 回転軸の位置のような物体固有の性質で決まる量である。これを慣性モーメント (moment of Inertia) と呼ぶ。微小部分の分割を無限小にすると

$$I = \sum_i m_i {s_i}^2 \longrightarrow I = \iiint \rho(\vec{r}) s^2 dV$$

のような 3 重積分に置き換えればよい。したがって, 角速度 $\omega(t)$ で回転している剛体の運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2} I \omega(t)^2 \qquad (2.2.2)$$

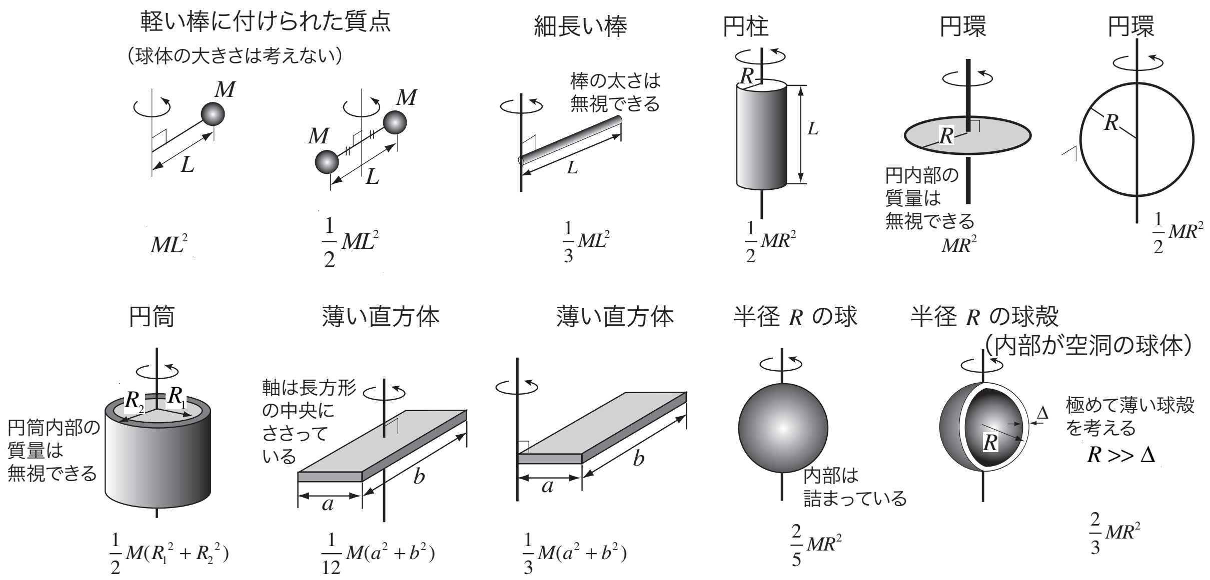
と書くことができる。質点の運動エネルギーとの対比を考えてみると

$$m \longrightarrow I, \qquad v(t) \longrightarrow \omega(t), \qquad \frac{1}{2}mv(t)^2 \longrightarrow \frac{1}{2}I\omega(t)^2$$

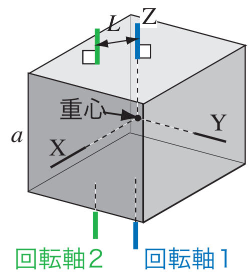
という対応関係がある。

練習問題

1. 以下の物体について慣性モーメントを求めなさい。質点の大きさや軽い棒の質量は無視してよい。



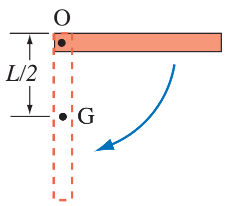
2. 図のように，1 辺が a で質量が M の立方体について慣性モーメントを考える。



(a) 立方体の重心を通って，立方体の面に垂直な「回転軸 1」についての慣性モーメントを求めよ。図に示したように，重心を原点とする座標系を設定して，直方体の微小体積を考えて 3 重積分を実行すればよい。

(b) 「回転軸 1」に平行に距離 L だけ離れた位置に「回転軸 2」を考える。「回転軸 2」についての慣性モーメントを求めよ。

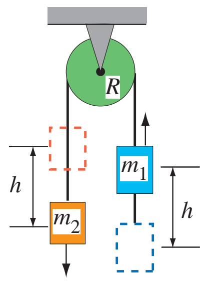
3. 長さ L、質量 M の細長い棒がその一端を通る軸 (O) のまわりになめらかに回転できる。この棒を水平位置に静止している状態から放す。



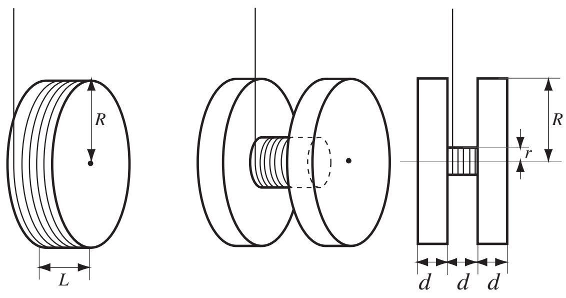
(a) 棒が最下点に来たときの角速度はそれほどか。棒の重心が持つ位置エネルギーの変化と回転の運動エネルギーに注目して求めよ。

(b) このときの棒の重心および棒の最下点の速さを求めよ。

4. 図のように、回転軸のまわりの慣性モーメントが I である滑車を介して紐でつながれている 2 つのおもりを考える。紐は滑車上を滑らないものとする。おもりの支えを放してこの系が静止状態から運動を始めた。おもり m_2 が h だけ降下した瞬間の各おもりの速さと滑車の角速度を求めよ。



5. 図のような 2 つの形のヨーヨーを考える。(a) は円筒（半径 R, 厚さ L）で，(b) は 2 つの円筒（半径 R, 厚さ d）と 1 つの円筒（半径 r, 厚さ d）からできている。(a) と (b) はともに質量は M である。



(a) (b)

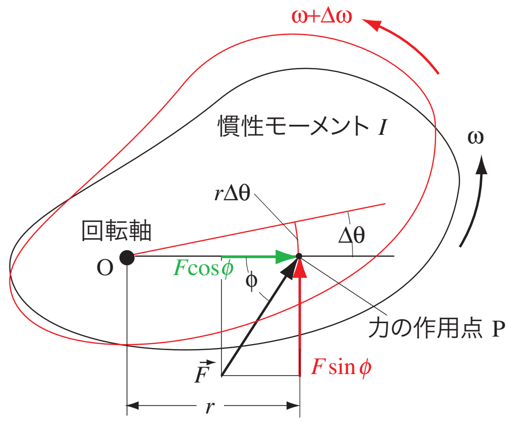
(1) (a) の形のヨーヨーについて，円筒の中心軸を回転軸としたときの慣性モーメントを求めよ。

(2) (b) の形のヨーヨーについて，円筒の中心軸を回転軸としたときの慣性モーメントを求めよ。すべての部分の材質は同じであるとする。

(3) ヨーヨーの重心の位置が高さ h だけ降下したとき，位置エネルギーはどれだけ減少するか。

(4) ヨーヨーが降下したとき，エネルギーはどのように保存されているか。

回転軸 O のまわりに回転する慣性モーメント I の剛体を考える。この剛体に力 $\vec{F}$ を作用させる。ただし，力 $\vec{F}$ は回転軸に垂直な平面内のものだけを考える。(回転軸方向の力成分は回転軸を揺り動かす効果を生じさせる。コマの歳差運動などはこのような効果を議論する必要がある。) 力が作用する場所は剛体内の点 P であるとする。回転軸から点 P までの距離は r で，直線 OP と力ベクトル $\vec{F}$ のなす角を ϕ とする。ある時刻 t において剛体は角速度 $\omega(t)$ で回転していて，力が働いているために，時刻 $t+\Delta t$ には角速度は $\omega(t)+\Delta\omega$ へと変化したとする。また，この時間 Δt の間に剛体は角度 $\Delta\theta$ だけ回転したとする。この移動において，直線 OP 方向の力の成分 $F\cos\phi$ は移動方向と直交するので仕事をしない。点 P は距離 $r\Delta\theta$ だけ移動するので，力がする仕事は



$$(F\sin\phi)\times r\Delta\theta$$

となる。ところで，回転している剛体は式 (2.2.2) のような運動エネルギーを持つので，角速度が $\omega(t)$ から $\omega(t)+\Delta\omega$ へと変化するのに応じて，回転の運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}I\omega(t)^2 \qquad \text{から} \qquad \frac{1}{2}I\left(\omega(t)+\Delta\omega\right)^2$$

に変化することになる。エネルギー保存則によって，この運動エネルギーの変化は力がした仕事と等しいので

$$\frac{1}{2}I\left(\omega(t)+\Delta\omega\right)^2-\frac{1}{2}I\omega(t)^2=(F\sin\phi)\times r\Delta\theta$$

が成立する。この両辺を Δt で割ると

$$I\omega(t)\frac{\Delta\omega(t)}{\Delta t}+\frac{1}{2}I\frac{(\Delta\omega)^2}{\Delta t}=(Fr\sin\phi)\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

となる。両辺について極限 $\Delta t\to 0$ をとると

$$I\omega(t)\frac{d\omega(t)}{dt}=(Fr\sin\phi)\frac{d\theta}{dt}$$

となる。ここで $\dfrac{(\Delta\omega)^2}{\Delta t}$ の極限はゼロとなることを用いた。さらに $\dfrac{d\theta(t)}{dt}=\omega(t)$ であることを使えば

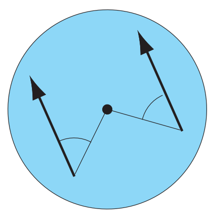
$$I\frac{d\omega(t)}{dt}=Fr\sin\phi$$

を得る。この関係式は回転の運動方程式と呼ばれる。この方程式によって，剛体の角速度がどのように時間変化するかを決定することができる。同じ大きさの力 (F) が剛体に働いたとしても，回転軸からどれくらい離れた場所 (r) に作用するか，さらに同じ場所に作用したとしても，どのような方向 (ϕ) に働くかによって回転への影響が異なることになる。力が回転に与える影響 $Fr\sin\phi$ を力のモーメントと呼ぶ。回転の運動方程式と質点の運動方程式を比較すると

$$m\longrightarrow I,\qquad v(t)\longrightarrow\omega(t),\qquad \text{力}\longrightarrow\text{力のモーメント}$$

のような対応関係がある。

右の図のような場合を考えてみると，同じ大きさの力が，同じ回転軸からの距離で，同じ角度で働いても，剛体の生じる回転の向きは異なったものになる。すなわち，力のモーメントには，剛体をどちらの向きに回転させるかという情報が必要なのである。このためには，力のモーメントに符号を付ければよい。



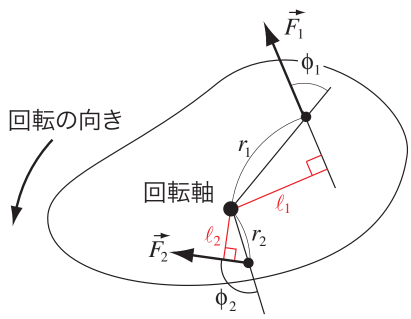
1) 剛体の回転の向きについて，「時計まわり」か「反時計まわり」のどちらを正の回転とするかを決める。これは自由に決めてよい。
2) 回転軸から力のベクトル方向の直線への距離を求める。

$$\ell_1=r_1\sin\phi_1,\qquad \ell_2=r_2\sin\phi_2$$

3) 力のモーメントの大きさは，それぞれの力の大きさと距離の積である。

$$F_1\ell_1,\qquad F_2\ell_2$$

4) 力が回転を加速 $(+)$ するか、減速するか $(-)$ を区別する。
5) 符号を付けた力のモーメントの和を求める。　$N=(+)F_1\ell_1(-)F_2\ell_2$



練習問題

1. 図に示した棒に働く力のモーメントの総和を求めよ。

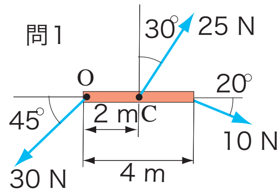
   (a) 図に垂直で O を通る軸のまわり

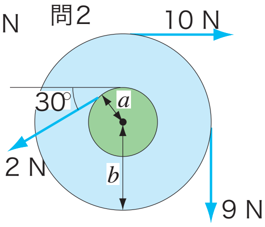
   (b) 図に垂直で C を通る軸のまわり

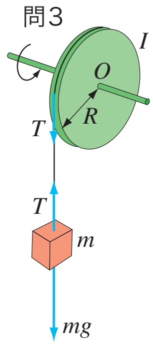
2. 図に示した車輪にかかる、O を通る軸のまわりの力のモーメントの総和を求めよ。$a = 10\mathrm{cm}$、$b = 25\mathrm{cm}$ とする。

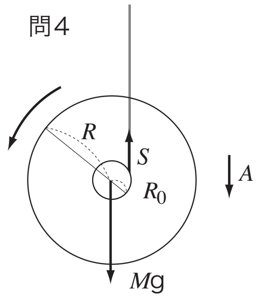
3. 半径 R、慣性モーメント I の円板が、図に示すように摩擦のない水平な軸に装着されている。円板に巻かれた軽い紐が質量 m の物体を支えている。吊るした物体が落下していく時の物体の加速度、円板の角加速度、紐の張力 T を計算せよ。

4. 図に示すヨーヨー（質量 M, 慣性モーメント I、軸の半径 R_0 ）の落下運動での重心の加速度を求めよ。ヨーヨーの慣性モーメントは半径 R の円板だとしてよいとすると, 重心の加速度はどのようになるか。

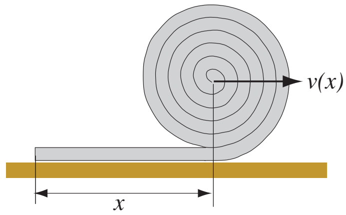


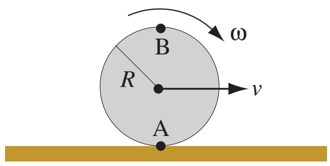






5. 図のように, 質量 M, 長さ L の消防用ホースを巻いて、半径 R のロールにする $(R << L)$ 。水平な地面の上で, ホースの端を固定してロールを転がすと, ホースはまっすぐにほどける。ホースがすべてほどけるのに必要な時間を求める。ホースの問題を解くために, 下の図のように, 質量 M で半径 R の円板が中心の速度 v で転がっている様子を考える。この円板が滑らずに地面を転がるためには, 地面と接触している点 A の速度はゼロでなければならない。このことから, 円板の回転についての角速度 ω と円板の中心の速度 v には





$$v = \boxed{\quad 1 \quad}$$

という関係があることが分かる。

円板の中心軸まわりの慣性モーメントは $I = \boxed{\quad 2 \quad}$ である。このことを用いて, 円板の持つエネルギーは

□ 円板の重心（中心）が速度 v で動いていることによる運動エネルギー

□ 円板が中心のまわりに回転していることによる回転のエネルギー

の和であることが分かる。したがって, 円板の持つエネルギーの合計は円板の半径 R には関係しない $\boxed{\quad 3 \quad}$ となる。以上の結果を用いて, ホースの問題を考える。ホースを転がし始めたときのホースの中心の速度を v_0 とすると, ホースが持つ運動および回転のエネルギーの和は $\boxed{\quad 4 \quad}$ である。ホースが長さ x だけほどけたとき, ホースの中心の速度を $v(x)$ とする。このとき, 長さ x 分のホースは地面に対して静止しているので, ホースの動いている部分の質量は $m(x) = M(1 - \boxed{\quad 5 \quad})$ であることが分かる。ホースの位置エネルギーの変化は考えなくてよい（無視できる）ものとすると, エネルギー保存則

$$\boxed{\quad 4 \quad} = \boxed{\quad 6 \quad} \times v(x)^2$$

が成立している。このことから, ホースの長さが x だけほどけたとき, ホースの中心の速度は $v(x) = \boxed{\quad 7 \quad}$ のように v_0, x, L の式で表すことができる。ほどけた長さ x と速度の間には $v(x) = \dfrac{dx}{dt}$ の関係があるので, ホースが全部ほどけるのにかかる時間 T は

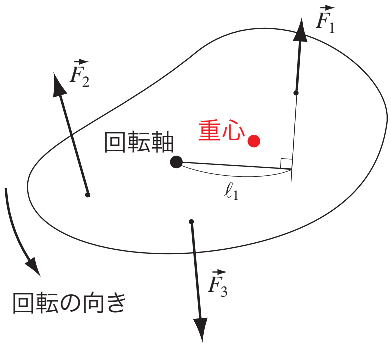
$$T = \int_0^T dt = \int_0^L \boxed{\quad 8 \quad} dx$$

と表すことができる。この積分を実行すると $T = \boxed{\quad 9 \quad}$ であることがわかる。したがって, ころがしたほうが一定速度でほどいていくのにかかる時間より短い時間でほどけることがわかる。

2.4 力のつり合い

剛体に働く力がつり合って, 剛体が静止するための条件を考える。ここまで議論で, 剛体の運動には, 重心の運動と回転軸まわりの回転運動があることが分かった。それらの運動方程式は

$$M\frac{d^2\vec{R}(t)}{dt^2}=\sum_i \vec{F}_i,\qquad I\frac{d\omega(t)}{dt}=\sum_i N_i$$

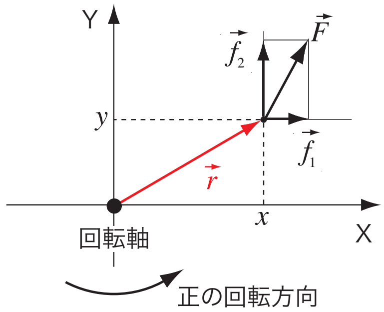


である。ここで, $\vec{R}(t)$ は重心の位置ベクトル, $\omega(t)$ は角速度, M は剛体全体の質量, I は回転軸まわりの慣性モーメント, $\vec{F}_i$ は外力, N_i は力のモーメントを表している。剛体が静止するためには, 重心が静止していて, かつ, 回転していないことが必要である。したがって,

$$\sum_i \vec{F}_i=\vec{0},\qquad \sum_i N_i=0$$

という２つの条件,「力のつり合い」と「力のモーメントのつり合い」が満たされていなければならない。

さて, 剛体に明らかな回転軸が設置されている場合は, 力のモーメントはその回転軸まわりのものを計算すればよい。しかし, 身体の問題を考えるような場合は, 回転軸がどこにあるのか明白でないことがある。このようなときは力のモーメントをどのように計算すればよいのだろうか。実は, つり合いの条件を考えるときは回転軸をどこに設定してもよいのである。このことを理解するために, 力のモーメントを座標の成分で計算する方法を説明しよう。右の図のように, 回転軸を原点とする座標を設定して, 力の作用点の位置ベクトルを



$$\vec{r}=(x,y)$$

とする。力ベクトルの成分が

$$\vec{F}=(F_x,F_y)$$

であるなら, この力を分解して,

$$\vec{f}_1=(F_x,0)\,,\qquad \vec{f}_2=(0,F_y)$$

の２つの力が働いていると考えることができる。力 $\vec{f}_1$ の場合, 回転軸までの距離は y で, 時計まわりの回転を起こす。また, 力 $\vec{f}_2$ の場合は, 回転軸までの距離が x で, 反時計まわりの回転となる。したがって, 反時計回りを正の向きとすると, 力のモーメントの合計は, 符号に注意して

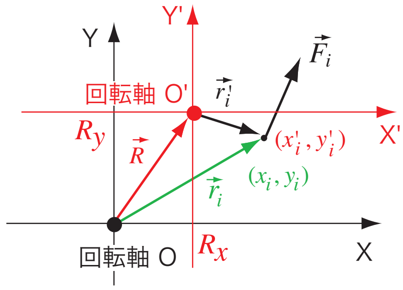
$$N=-yF_x+xF_y$$

と書けることが分かる。

右の図のように, 回転軸 O と新しい回転軸 O' を考える。力のつり合いと回転軸 O についての力のモーメントのつり合い

$$\sum_i F_{ix}=0,\quad \sum_i F_{iy}=0,\quad \sum_i(-y_iF_{ix}+x_iF_{iy})=0$$

が成立しているとする。新しい回転軸 O' を原点とする座標で見た力の作用点の位置ベクトルを $\vec{r'}=(x'_i,y'_i)$ とすると



$$\vec{r}_i=\vec{r'}_i+\vec{R}\quad なので\quad x_i=x'_i+R_x,\quad y_i=y'_i+R_y$$

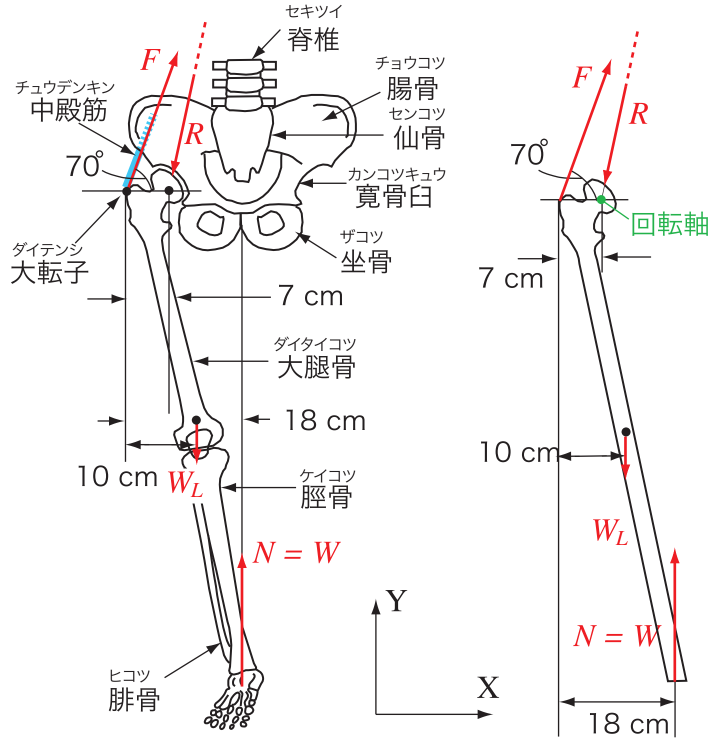
という関係がある。この関係を用いると力のモーメントのつり合いの条件は

$$\begin{aligned}0&=\sum_i(-y_iF_{ix}+x_iF_{iy})=\sum_i(-(y'_i+R_y)F_{ix}+(x'_i+R_x)F_{iy})=\sum_i(-y'_iF_{ix}+x'_iF_{iy})-R_y\sum_i F_{ix}+R_x\sum_i F_{iy}\\&=\sum_i(-y'_iF_{ix}+x'_iF_{iy})\end{aligned}$$

と書き直すことができる。したがって, 力のモーメントのつり合いを考えるための回転軸は任意の位置に設定してよいことが分かる。

例：大腿骨頭部に働く力、杖の効果

●片足で立っている場合



F：中殿筋が引っ張る力　　R：寛骨臼からの反作用

W：体の質量に働く重力　　W_L：足の質量に働く重力

N：床からの反作用

力のつり合い

X方向　$F\cos 70° - R_x = 0$

Y方向　$F\sin 70° - R_y - W_L + W = 0$

回転軸は 大転子を通るX方向の直線と寛骨臼からの反作用 R の方向の直線の交点に設定する

力のモーメントのつり合い

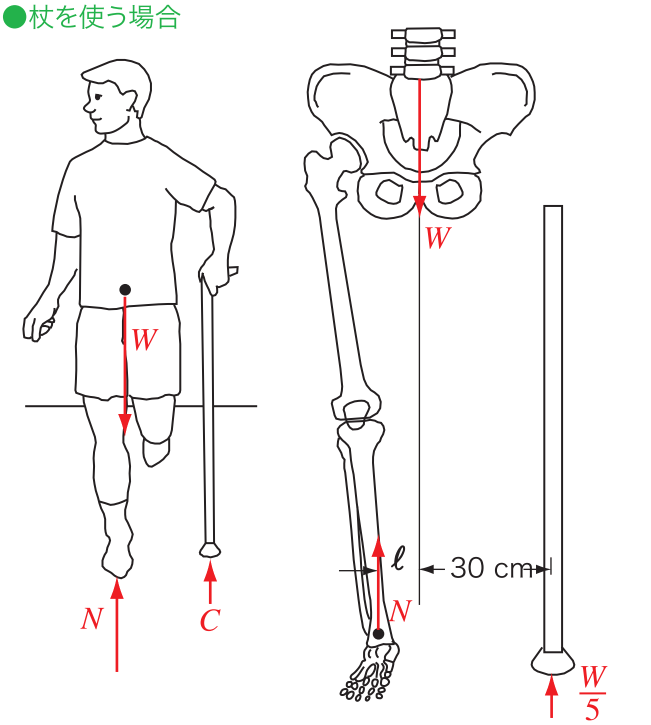
$$W \cdot (18-7) - F \cdot 7 \cdot \sin 70° - W_L \cdot (10-7) = 0$$

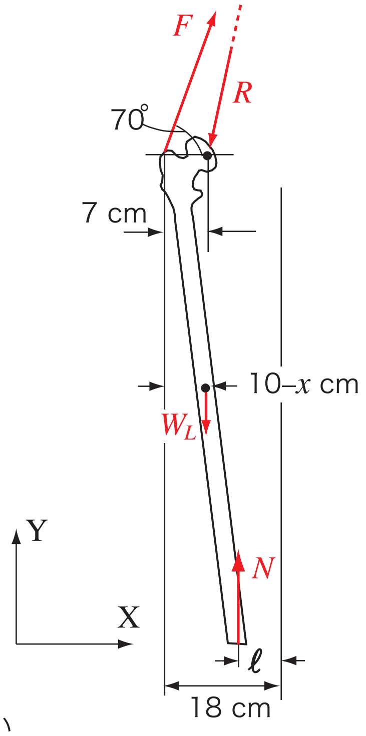
$W_L = \dfrac{1}{7}W$ とすると　　$\sin 70° = 0.94$　　$\cos 70° = 0.34$

→ $\boxed{F = 1.6\ W \qquad R = 2.5\ W}$

体重の 2.5 倍の力が大腿骨頭部に働く

●杖を使う場合





杖を体の中心軸から 30 cm の位置につく。

杖に体重の 1/5 をあずける。$C = \dfrac{W}{5}$

力のつり合い　$N + \dfrac{W}{5} - W = 0$

力のモーメントのつり合い　$\dfrac{W}{5} \cdot 30 - N\ell = 0$

→ $N = \dfrac{4}{5}W$　$\ell = 7.5\ \mathrm{cm}$　$x = \dfrac{10}{18}\ell = 4.16\ \mathrm{cm}$

力のつり合い

X方向　$F\cos 70° - R_x = 0$

Y方向　$F\sin 70° - R_y - W_L + N = 0$

力のモーメントのつり合い

$$N \cdot (18 - \ell - 7) - F \cdot 7 \cdot \sin 70° - W_L(10 - x - 7) = 0$$

→ $\boxed{F = 0.45\ W \qquad R = 1.2\ W}$

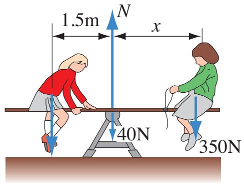
杖を使うことで中殿筋の力と大腿骨頭部に働く力を大幅に軽減できる。

練習問題

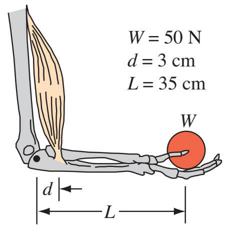
1. 図のように, 重量 40 N の一様な板が, それぞれ 500 N および 350 N の２人の子供を支えている。この支点が板の重心の下にあり, また, 500 N の子供が中心から 1.5 m にいるとき,

   (a) 支点で板に加わる力 N を求めよ。

   (b) 350 N の子供はどこに座ればつり合うか。



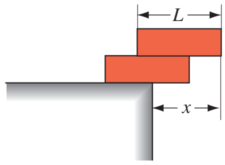
2. 図のように前腕を水平にして手の中に 50 N の重りを持っている。二頭筋は関節から 3 cm の位置についており, 重りは関節から 35 cm の距離にある。二頭筋が発生する力, 関節に働く力の大きさと向きを求めよ。



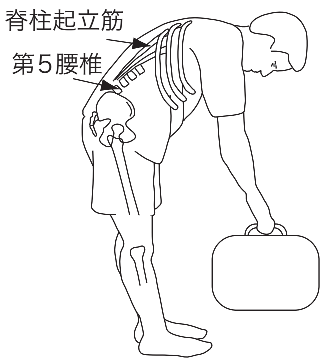
3. 図のように長さ L , 密度が一様な同一のレンガを２つ, 最大限突き出した状態に積み重ねて水平面の机の縁に置いてある。距離 x を求めよ。

   [hint] レンガ１つを机の縁に置くときは, レンガの半分が机に乗っているときが, 最大限に突き出した位置である。

   [hint] 机からレンガが受ける力の合計を表すベクトルの作用点は決まった位置にならないが, 机の縁を越えて右側になることはない。



4. 右の図のように, 質量 m〔kg〕の荷物をゆっくりと持ち上げるときに, 背を持ち上げる筋肉（脊柱起立筋）が発生する力と第５腰椎の部分に働く力について調べる。解剖学的情報に従って, 身体を曲げたときに, 脊柱に働く力を下の図のように描くことができる。脊柱を, 最下部で腰骨とつながっている長さ L〔m〕の剛体と見なす。全身体に働く重力（体重）を W〔N〕とする。脊柱に働く力には以下のものがある。

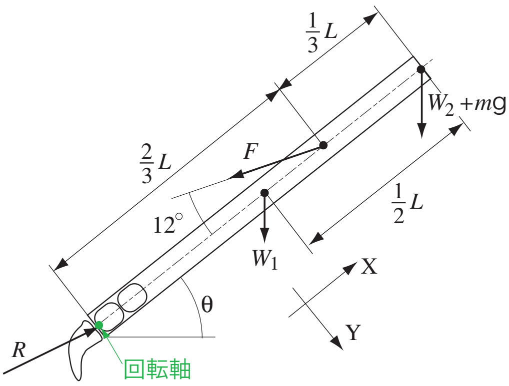


   □ 腕と頭に働く重力 (W_2), 持ち上げる物体に働く重力 (mg) は, 脊柱の最上部に働く。解剖学的測定によると $W_2 = 0.2W$ である。

   □ 胴体に働く重力 (W_1) は, 脊柱の中間点の位置に働く。解剖学的測定によると $W_1 = 0.4W$ である。

   □ 脊柱起立筋が発生する力 (F) について。脊柱起立筋は多数あるが, 合計すると脊柱の最上部から $\frac{1}{3}L$ の位置に, 脊柱と角度 12° の方向に働く１つの力と見なせる。

   □ 腰骨から脊柱の最下部（第５腰椎下部）に働く力 R について。一般には, この力の向きは脊柱の方向と一致していない。



図のように脊柱の方向に X 軸, それに垂直方向に Y 軸を設定する。力 R の成分を (R_x, R_y) と書くことにして, 回転軸を脊柱の最下部に設定して, 以下の問に答えなさい。

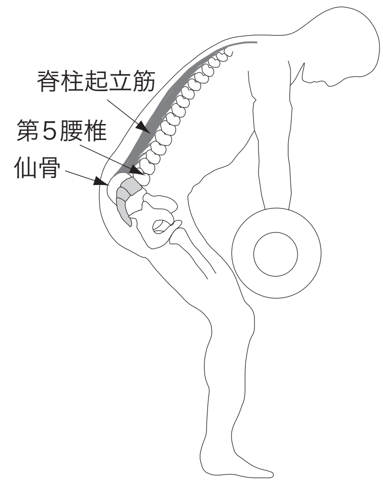
(a) 脊柱の角度が水平方向から角度 θ の場合について, 力のつり合い と 力のモーメントのつり合い の条件を書きなさい。

(b) 荷物が体重の半分のとき, 脊柱の角度が 30° の場合について, 力 F, R_x, R_y, R は W の何倍となるか。数値で求めなさい。$\sin 12^\circ = 0.208, \cos 12^\circ = 0.978, \sin 30^\circ = 0.5, \cos 30^\circ = 0.866$

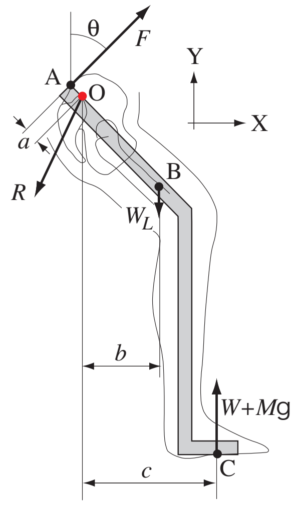
(c) 脊柱の角度が 60° の場合はどうなるか。$\sin 60^\circ = 0.866, \cos 60^\circ = 0.5$

(d) 同じ重さの荷物を持ち上げるとしても, 脊柱の角度によって, 脊柱にかかる力や筋肉の出す力は変わる。これはどのように解説することができるか。また, 重い荷物を持ち上げるときの正しい姿勢はどのようなものか。

5. 右の図のように, 前へ屈み, 質量 M〔kg〕のおもりを持ち上げている重量挙げの選手について考える。運動選手の体幹（胴）は, まっすぐな（垂直線）姿勢から測って θ の角度に曲げられている。選手の下半身に作用する力は下の図のように考えることができる。

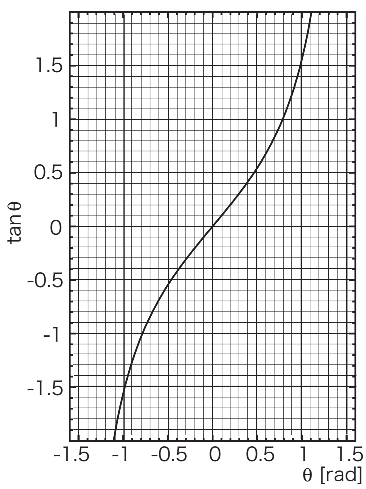


- ○ 選手の体全体に働く重力 (W) とおもりに働く重力 (Mg) を合わせた力の大きさで, 足の裏 (点 C) は地面から上向きに押される。
- ○ 骨盤を含む足の重心は点 B に位置していて, 重力 (W_L) が作用している。
- ○ 仙骨と第５腰脊椎骨の結合点 (点 O) には, 脊椎から押される力 (R) が作用する。
- ○ 図の A 点には, 脊柱起立筋が引っ張る力 (F) が作用する。この力は垂直線から測って θ の角度の方向となる。



力のモーメントを考えるための回転軸を図中の点 O に設定することにする。解剖学的測定によると,

- ○ 各力のベクトルの方向から回転軸までの垂線の長さを図中の a, b, c で表してある。選手の身長を h とすると各値は $a = 0.02h$, $b = 0.08h, c = 0.12h$ となる。
- ○ 骨盤を含む足（２本分）に働く重力は $W_L = 0.4W$ の大きさである。



図のように X 軸 と Y 軸を設定する。力 R の成分を (R_x, R_y) と書くことにして, 以下の問いに答えなさい。

(1) 足は２本ある。しかし、力のつり合いを考える場合には, ２本の足を１つにまとめて議論することができる。なぜ, そのように考えることができるか。説明せよ。

(2) 力のつりあいの条件を X 軸方向, Y 軸方向について書きなさい。記号のままでよい。

(3) 力のモーメントのつりあいの条件を書きなさい。記号のままでよい。回転の正の向きを明らかにしておくこと。

(4) 体重 (W) と同じ重さのおもりを持ち上げるとき, 角度 $\theta = 45°$ の場合について, 力 F, R は W の何倍となるか。数値で求めなさい。$\sin 45° = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(5) 角度 $\theta = 45°$ の場合, 脊椎から押される力 (R) はどのような角度で作用するか。$\tan\theta$ のグラフを参考にして求めよ。

1. 重力による円運動について考える。万有引力定数を G、円周率を π とする。太陽の質量は 2×10^{30} kg, 地球の質量は 6×10^{24} kg, 太陽の半径は 7×10^{5} km, 地球の半径は 6×10^{3} km である。

    (1) 地球が太陽のまわりを半径 r の円軌道を速さ v で回っている。太陽の質量を M、地球の質量を m とすると、地球の運動方程式はどのように書けるか。

    (2) 地球の周期を T とする。速さ v、円の半径 r、周期 T の間にはどのような関係があるか。

    (3) 太陽の密度が一様で ρ であるとして、太陽の半径を R とする。G, R, ρ, r, π の間にはどのような関係があるか。

    (4) 太陽系を相似的に縮小して、太陽と地球の距離が 1 m になったとする。(太陽の半径も同じ割合で小さくなる。) 太陽や地球の密度は変わらないとすると、1 年の長さはどれだけになるか。

2. 質量 m の物体がばね定数 k のばねにつながれている。この物体には速度 v に比例する抵抗力 $-\alpha v$ が働き、さらに外部から時間とともに変化する力 $F\cos(\omega_0 t)$ が加わっている。

    (1) 時刻 t における物体の位置を $x(t)$ として、物体の運動方程式を書け。物体の位置とばねの伸びは同じであるとする。

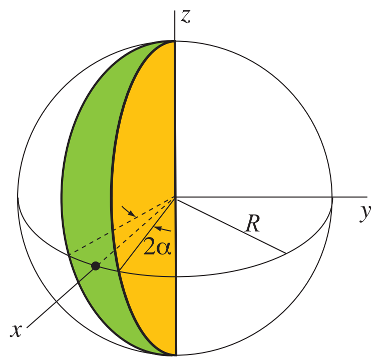
    (2) 運動方程式の解は

    $$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \delta), \qquad A = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{\alpha\omega_0}{m}\right)^2}} \tag{2.1.1}$$

    のように表すことができる。ただし、ω と δ は定まっていない。式 (1) を運動方程式に代入して、ω と δ を表す式を求めよ。

    (3) 抵抗力がない ($\alpha = 0$) 場合について考える。ばね定数が $k = 200$ N/m、物体の質量が $m = 4$ kg、外部から加わる力の振動数が $f_0 = 10$ Hz ($\omega_0 = 2\pi f_0$) であるとき、振幅 2 cm の強制振動が生じた。このとき、外部から加わる力の最大の大きさ F を数値で求めよ。円周率は $\pi = 3.14$ で計算すること。

3. 半径 R〔m〕の球の一部であるような物体を考える。みかんの房のような形である。物体の密度 ρ〔kg/m^3〕は一定であるとする。角度 2α は、球座標での角度が $-\alpha \leqq \phi \leqq \alpha$ の範囲であることを意味している。



    (1) 物体の体積を 3 重積分 (球座標系) を使って求めるための式を書いて、体積を求めよ。

    (2) 重心の y 座標を求めるための 3 重積分の式を書いて、結果がゼロであることを示せ。

    (3) 重心の z 座標を求めるための 3 重積分の式を書いて、結果がゼロであることを示せ。

    (4) 重心の x 座標を求めるための 3 重積分の式を書いて、重心の位置を求めよ。

4. イオン結合している塩化ナトリウム結晶についての考察をおこなう。

(1) 図1のように、動くことができる正の電荷 $+e$ と固定された負の電荷 $-e$ を考える。正の電荷 $+e$ と 負の電荷 $-e$ が距離 r 離れている時、正の電荷 $+e$ が受ける力の大きさと向きを答えなさい。

(2) 負の電荷 $-e$ から距離 d 離れた場所から正の電荷 $+e$ を無限遠方まで移動させるために必要な仕事を求めなさい。

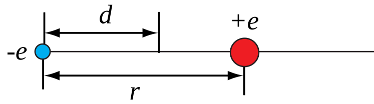


図1

図2のように、4つの負の電荷 $-e$ が A 点を通る平面上に、A 点から等しい距離 d で 90 度の角度をなす位置に置かれている。4つの負の電荷が置かれている平面に直角の方向に、A 点から距離 r 離れた場所に正の電荷 $+e$ がある。

(3) この正の電荷 $+e$ が受ける力の大きさと向きを答えなさい。

(4) 正の電荷 $+e$ を A 点から無限遠方まで移動させるために必要な仕事を、力を積分することによって求めなさい。

(5) 必要な仕事は (2) の結果の何倍となっているか。

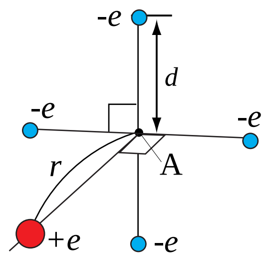


図2

図3のように、塩化ナトリウムの結晶はナトリウムイオン (Na^+) と塩素イオン ($C\ell^-$) が格子上にイオン間の距離 d で規則正しくならんでいる。図において、大きな球は Na^+ を表し、小さな球は $C\ell^-$ を表している。図の中心にある（赤い球）Na^+ に注目して考えることにする。

(6) 注目している Na^+ から最も近い位置には、6つの $C\ell^-$（青色）がある。この6つの $C\ell^-$ だけを考えて、「注目している Na^+」を結晶内部から無限遠方まで取り出すために必要な仕事を式で表しなさい。

(7) ２番目に近い位置には、１２個の Na^+（ピンク色）がある。この１２個の Na^+ だけを考えて、「注目している Na^+」を結晶内部から無限遠方まで取り出すために必要な仕事を式で表しなさい。（ヒント：仕事は負の値となる）

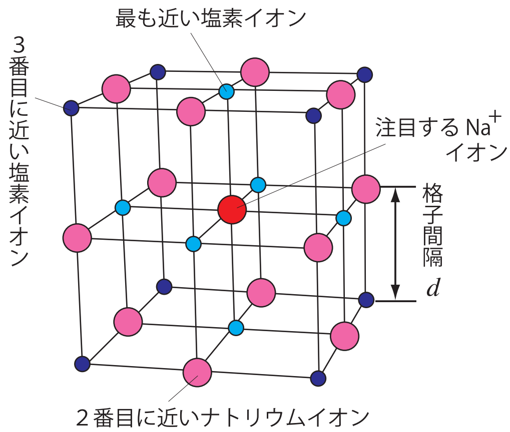


図3

(8) ３番目に近い位置には、８個の $C\ell^-$（紫色）がある。この８個の $C\ell^-$ だけを考えて、「注目している Na^+」を結晶内部から無限遠方まで取り出すために必要な仕事を式で表しなさい。

(9) 格子間距離を $d = 3$ Å として、(6)〜(8) で求めた仕事の合計を数値で求めよ。
電子の電荷は $-e = -1.6 \times 10^{-19}$ C で、1 Å$= 10^{-10}$ m である。

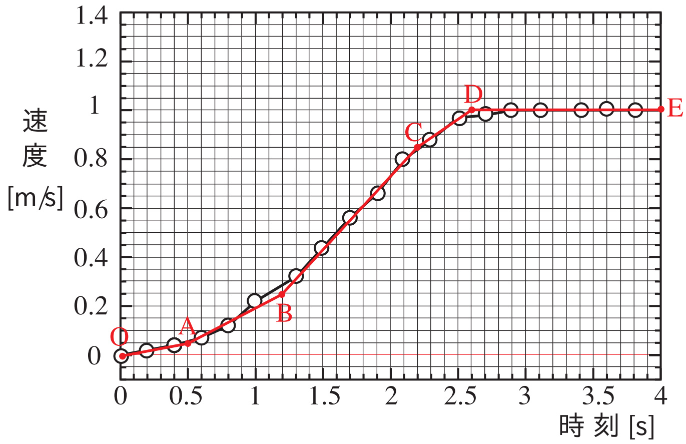
このようにして、順に結晶内のイオンから Na^+ を無限遠方まで引き離すためのエネルギーを考えることができる。これらのエネルギーをすべて足し合わせた値が、塩化ナトリウム結晶に対する Na^+ イオン1つ当たりの結合エネルギーである。$C\ell^-$ についても Na^+ についてもとめたエネルギーと同じ値になる。

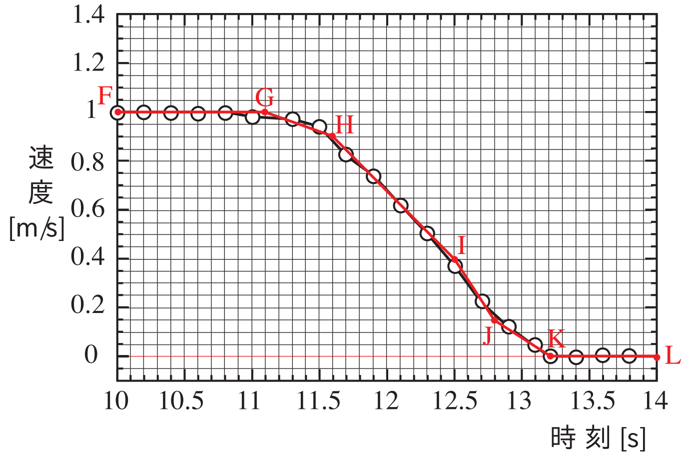
(10) 結合エネルギーは、(9) の結果で近似できるものとして、塩化ナトリウム結晶 1 mol あたりの結合エネルギーを kJ/mol の単位で求めなさい。

(11) 塩化ナトリウムを水に溶解するために必要なエネルギー（溶解エネルギー）は、およそ 4 kJ/mol である。この値は (11) で求めた結合エネルギーと比べて極めて小さい値である。結合エネルギーと溶解エネルギーの差は「水和エネルギー」と呼ばれる。「水和エネルギー」は水分子が電気双極子の性質持っていることから説明できる。この「水和エネルギー」について、また、溶解エネルギーが小さな値となる理由を定性的に説明しなさい。

5. 質量 800 kg のエレベータに質量 70 kg の人が乗っている。このエレベータの速度を測定したところ, 図のような結果（白丸）を得た。上のグラフは, 1 階で静止しているエレベータが上昇しはじめ, 一定の速度に達するまでの結果である。また, 下のグラフは, 一定の速度で上昇していた同じエレベータが 4 階に停止するまでの結果である。なお, ４秒から１０秒までの間のエレベータの速度は一定なので, その間の図は省略されている。

いま, エレベータの速度が, 測定値に基づいて描いた直線 OA, AB, BC, CD, DE, FG, GH, HI, IJ, JK で表せるとして, 以下の問に答えよ。ただし, 重力加速度は $10\ \mathrm{m/s^2}$ とせよ。





1) BC 間におけるエレベータの加速度の大きさはいくらか。

2) BC 間において, エレベータを引き上げているロープの張力はいくらか。

3) BC 間において, エレベータに乗っている人は, どのような向きにどのような大きさの力を受けるか。人が受ける力には「重力」「垂直抗力」「慣性力」がある。これらを区別して書いておくこと。

4) 動き初めてから一定の速度に達するまで (O∼D) に上昇した高さはどれだけか。

5) HI 間の加速度はどれだけか。

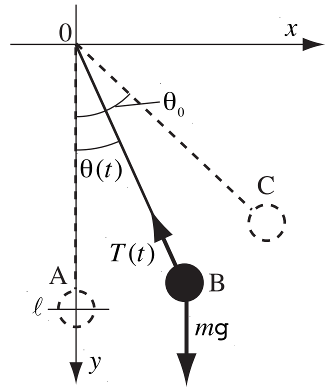
6) HI 間において, エレベータを引き上げているロープの張力はいくらか。

7) HI 間において, エレベータに乗っている人は, どのような向きにどのような大きさの力を受けるか。人が受ける力には「重力」「垂直抗力」「慣性力」がある。これらを区別して書いておくこと。

8) 一定の速度で上昇していたエレベータが, 減速を始めてから停止するまで (G∼K) に上昇した高さはどれだけか。

9) １階から４階までの高さはどれだけか。

6. 長さ ℓ〔m〕のひも（質量は無視できる）と質量 m〔kg〕のおもりからなる振り子を考える。図のように、振り子が最大に振れた状態を C とし、鉛直方向とひもがなす角度を θ_0〔rad〕とする。水平方向を x 軸とし、鉛直下向きに y 軸をとる。



時刻 t において、ひもと鉛直方向のなす角度 が $\theta(t)$ であるとして (図中 B の状態)、その時のひもの張力を $T(t)$ と書く。

1) 状態 B について、おもりの座標 $(x(t), y(t))$ は、ℓ および $\theta(t)$ を用いて

$$x(t) = \boxed{\ 1\ }, \quad y(t) = \boxed{\ 2\ } \qquad (2.1.1)$$

と表すことができる。

2) 状態 B について、おもりの運動方程式は

$$x \text{ 方向:} \quad m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \boxed{\ 3\ } \quad , \qquad y \text{ 方向:} \quad m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \boxed{\ 4\ } \qquad (2.1.2)$$

と書ける。

3) 式 (2) を式 (1) を代入して、整理すると

$$x \text{ 方向} \qquad \boxed{\ 5\ } \times \left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^2 + \boxed{\ 6\ } \times \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \boxed{\ 3\ } \qquad (2.1.3)$$

$$y \text{ 方向} \qquad \boxed{\ 7\ } \times \left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^2 + \boxed{\ 8\ } \times \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \boxed{\ 4\ } \qquad (2.1.4)$$

となる。

4) 式 (3) と (4) を用いて、張力 $T(t)$ を消去すると

$$\boxed{\ 9\ } \times \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \boxed{\ 10\ } \qquad (2.1.5)$$

のように、角度 $\theta(t)$ についての微分方程式を得る。

5) 角度 $\theta(t)$ が小さいとき、$\sin\theta(t) \simeq \theta(t)$ のように近似することができる。このような場合、振り子の周期は $\boxed{\ 11\ }$ のように表すことができる。

6) 時刻 t におけるおもりの速度は

$$\left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}\right) \qquad (2.1.6)$$

である。したがって、式 (1) を用いると、おもりの速さ（速度の大きさ）は、ℓ と $d\theta(t)/dt$ によって $\boxed{\ 12\ }$ と表すことができる。

7) おもりが最下点となる状態 A の位置エネルギーをゼロとすると、おもりが最高点となる状態 C の位置エネルギーは $\boxed{\ 13\ }$ である。

8) 状態 B のおもりは運動エネルギーと位置エネルギーを持つので、それらの合計は、$m, \ell, g, \theta(t), d\theta(t)/dt$ を用いて、$\boxed{\ 14\ }$ と書くことができる。したがって、状態 A と状態 B についてのエネルギー保存則は

$$\boxed{\ 13\ } = \boxed{\ 14\ } \qquad (2.1.7)$$

となる。

9) 式 (3) と (4) およびエネルギー保存則（式 (7)）から、ひもの張力 $T(t)$ は $m, g, \theta(t), \theta_0$ を用いて

$$T(t) = \boxed{\ 15\ } \qquad (2.1.8)$$

と表すことができる。

10) 式 (8) の結果から、張力が最大となるのは振り子が $\boxed{\ 16\ }$ の状態で、張力が最小となるのは振り子が $\boxed{\ 17\ }$ の状態であることが分かる。また、$\theta_0 = \pi/3$ の場合、張力の最大値は $\boxed{\ 18\ }$ で、張力の最小値は $\boxed{\ 19\ }$ となる。

7. 図 1 に示したように、半径 r〔m〕の円の一部（図 1 の青線）であるような物体を考える。この円弧の中心角は 2α〔rad〕で、円弧（青線）の物体は図 1 の緑線で示した堅い棒で円の中心にある回転軸と接続されている。青い円弧の部分は全体で質量 m〔kg〕を持ち、太さは無視できるものとする。さらに、緑の棒の質量も無視できるものとする。

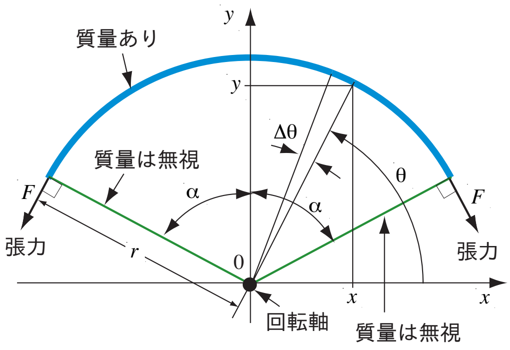


図 1

円の中心を座標の原点として、右図のように座標を設定する。回転軸は xy 平面に垂直で、青の円弧と緑の棒からなる物体は回転軸のまわりを自由に回ることができる。

1) 青い円弧部分の線密度（単位長さあたりの質量）λ [kg/m] は、m, r, α を用いて

$$\lambda = \boxed{\ 1\ } \tag{2.1.1}$$

と書ける。

2) 図 1 のように、円弧上の点 (x, y) を考える。図のように、角度 θ を x 軸から測ることにすると、座標 x, y は r, θ を用いて

$$x = \boxed{\ 2\ }, \quad y = \boxed{\ 3\ } \tag{2.1.2}$$

と書ける。

3) 円弧のうち、微小角度 $\Delta\theta$ によって切り取られる部分の質量 Δm は、$\lambda, r, \Delta\theta$ を用いて

$$\Delta m = \boxed{\ 4\ } \tag{2.1.3}$$

と書ける。

4) 円弧状物体の重心の座標 (R_x, R_y) は

$$R_x = \frac{1}{m}\int_{\boxed{\ 6\ }}^{\boxed{\ 5\ }} \boxed{\ 7\ }\, d\theta, \quad R_y = \frac{1}{m}\int_{\boxed{\ 6\ }}^{\boxed{\ 5\ }} \boxed{\ 8\ }\, d\theta \tag{2.1.4}$$

によって求めることができる。

5) 重心の x 座標は $R_x = 0$ となるはずである。これを示しなさい。

6) 重心の y 座標を r, α を用いて表しなさい。

以下、物体を軸のまわりに回転させることで、重心の位置を調べてみる。物体を回転させると、物体には遠心力が働く。また、物体には張力が働いていて、物体の形が変わらないのであれば、張力と遠心力はつり合うことになる。図 2 のように、中心角が $\Delta\theta$ であるような円弧の微小部分に着目してみる。張力は円の接線方向で、微小部分の両端を引っ張るように働いている。両端の張力の大きさは等しいはずで F〔N〕と表すことにする。

7) 2 つ張力の合力 ΔF は、$F, \Delta\theta$ を用いて

$$\Delta F = \boxed{\ 9\ } \tag{2.1.5}$$

と表すことができる。

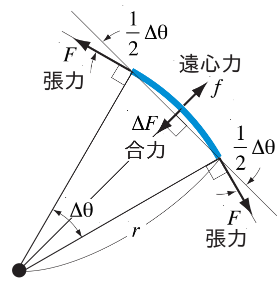


図 2

物体が軸のまわりに角速度 ω〔rad/s〕で回転しているとする。このとき、微小部分の加速度は $r\omega^2$ で、微小部分の質量は $\lambda r \Delta\theta$ である。したがって、微小部分に働く遠心力の合計の大きさは、

$$f = \lambda r \Delta\theta \times r\omega^2 \tag{2.1.6}$$

と表すことができるであろう。

8) $\Delta\theta$ 有限な大きさである場合、式 (6) は厳密には正しくない。この理由を説明しなさい。

9) 以上の考察と、

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

および式 (5) と (6) から、張力の大きさ F は λ, r, ω を用いて

$$F = \boxed{\ 10\ } \tag{2.1.7}$$

と表すことができることが分かる。導出の過程を書いておくこと。

10) 図 1 に示したように、円弧全体（青の部分）の両端にも、式 (7) で求めた張力 F が働いていることになる。したがって、円弧全体は両端に働く張力の合力を受けることになる。この合力の大きさは、F, α を用いて

$$F_{\text{total}} = \boxed{\ 11\ } \tag{2.1.8}$$

と表すことができる。

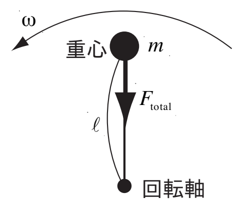


図 3

11) 図 3 のように、重心の位置に物体の質量 m が集中している質点を考える。この質点は、物体に働く力の合計 F_{total} を向心力として、角速度 ω の円運動をすることになる。なぜ、そのように考えることができるのか、重心の性質について考察することで説明しなさい。

12) 回転軸から重心までの距離を ℓ とすると、質点の運動方程式は

$$m \times \boxed{\ 12\ } = F_{\text{total}} \tag{2.1.9}$$

と書ける。

13) 式 (9),(8),(7),(1) を用いると、回転軸から重心までの距離 ℓ を r, α によって表すことができる。この結果は、積分によって求めた物体の重心の座標 R_y と一致する。このことを示しなさい。

8. 図 1 のように，距離 2ℓ 離れて正の電荷 $+q$ が固定されている。２つの電荷の中点に原点を設定し，右向きを座標の正の向きとする。
２つの電荷の間に他の正電荷 $+Q$（図中の赤い丸）が置かれている。赤の電荷は２つの電荷をむすぶ直線上のみを動くことができるものとする。力は電気力のみについて考えること。

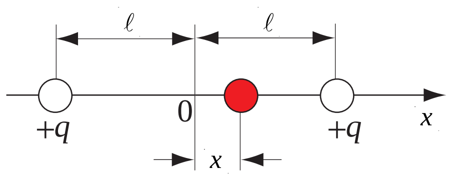


図 1

(1) 赤の電荷が中点から右へ x だけずれているとき，赤の電荷に働く力を矢印（種類ごとに）で表しなさい。矢印には説明をつけておくこと。

(2) 電気力の比例定数を k として，(1) で示した力の大きさを，それぞれ，式で表しなさい。

(3) 赤い電荷に働く力の合力を表す式を書きなさい。ただし，座標の向きに注意して，力の向きを表す符号をつけること。

(4) 赤い電荷の位置（中点からのずれ） x が $+q$ の電荷の間隔（の半分） ℓ に比べて十分に小さい

$$x << \ell$$

場合について，赤い電荷に働く力の合力（(3) の結果）を近似して，x の 1 次の項までを残した式を導きなさい。ただし，$\delta << 1$ の場合

$$(1+\delta)^{\alpha} \simeq 1 + \alpha \times \delta$$

という近似式を用いることができる。

(5) 赤い電荷が，２つ電荷 $+q$ から力（(4) の近似した結果）を受けて運動することを考える。時刻 t における赤い電荷の位置を $x(t)$，質量を m として，赤い電荷の運動方程式を書きなさい。

(6) 時刻 $t=0$ において，赤い電荷の位置が中点から右へ x_0 だけずれていて，その位置から，速度ゼロで，運動を始めるとする。時刻 t における赤い電荷の位置 $x(t)$ を表す式を導きなさい。

(7) 赤い電荷の運動の周期を m, ℓ, q, Q, k によって表しなさい。円周率は π と表す。

(8) 質量数 10 の原子が結晶を作っていて，それらの原子が 1 価の正イオンであるとする。
（現実の結晶は正イオンと負イオンが交互に配置するが，簡単のために正イオンのみを考える。）
イオンの「往復運動」ついての振動数を求めなさい。
水素原子の質量は 1.7×10^{-27} [kg]，電子の電荷は -1.6×10^{-19} [C] で，$k=9\times10^{9}$ [N m^2/C^2] であり，距離 ℓ は 1 ナノ・メートル（nm）とする。

[参考]

電荷を持つ粒子（イオン）が振動すると，同じ振動数の電磁波を放射する。また，イオンに電磁波を照射すると電磁波の振動数にしたがってイオンは振動する。

10^{12}[Hz]	〜	10^{13}[Hz]	〜	10^{14}[Hz]	〜	10^{15}[Hz]	〜	10^{16}[Hz]
	遠赤外線		赤外線		可視光線		紫外線	

9. 図 2 のように，長さ ℓ で半径 r の円柱形の冷やした缶ジュースを考える。内部の液体が凍結しているか否かは缶ジュースを転がすと判別することができる。このことについて考察する。

缶だけの質量を m_0 として，缶は一様な金属で作られており，金属の厚さは無視できるものとする。また，缶ジュースの内部の液体だけの質量を m_1 とし，凍結しているときは缶とともに回転し，凍結していないときは缶が回転しても液体は回転しないものとする。

缶ジュースは，図 2 のような角度 α の斜面をすべらずに転がるものとする。このとき，缶ジュースは円柱の中心軸（図中の「回転軸」）のまわりに回転しながら，「回転軸」の位置（缶ジュースの重心）は斜面に沿って運動することになる。

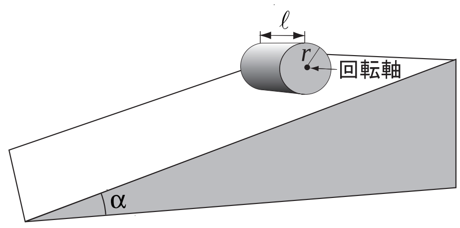


図 2

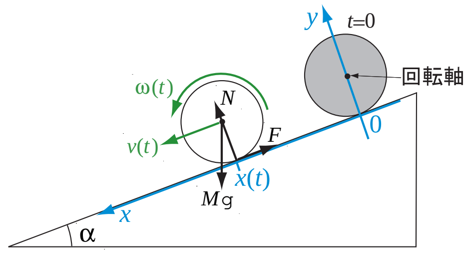


図 3

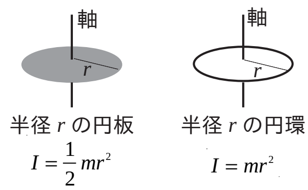


図 4

(1) 円柱の中心軸（図 2 の「回転軸」）まわりの慣性モーメントについて考える。液体が凍結していない場合の慣性モーメントを I_0，液体が凍結している場合の慣性モーメントを I_1 とすると，

$$I_0=\frac{1}{2}m_0\left(\frac{r+2\ell}{r+\ell}\right)r^2,\qquad I_1=I_0+\frac{1}{2}m_1r^2$$

となる。図 4 を参考にして，これらの式を証明しなさい。

(2) 缶ジュース全体の質量を $M(=m_0+m_1)$ と書く。缶には，図 3 に示したように

□ Mg：缶ジュース全体に働く重力（作用点は重心），

□ N：斜面からの垂直抗力，　□ F：摩擦力

の力が働く。斜面に沿って x 軸をとり，時刻 $t=0$ の缶ジュースの重心の位置を原点とする。時刻 t の缶ジュースの重心の位置を $x(t)$，速度を $v(t)$ と表して，缶ジュースの重心の運動方程式（x 軸方向のみでよい）を書きなさい。

(3) 図 3 のように，時刻 t の缶の角速度を $\omega(t)$ と書いて，缶ジュースの回転の運動方程式を書きなさい。ただし，回転軸まわりの缶ジュースの慣性モーメントは I としなさい。

(4) 缶ジュースが滑らずに転がっている場合，重心の速度 $v(t)$ と缶の角速度 $\omega(t)$ の間には $v(t)=r\times\omega(t)$ の関係がある。これを証明しなさい。

(5) 缶ジュースが滑らずに転がっている場合，まさつ力 F は条件

$$F=\frac{Mg\sin\alpha}{1+\frac{Mr^2}{I}}$$

を満たさなければならない。(2),(3),(4) の結果を用いて，これを証明しなさい。

(6) まさつ力が (5) の条件を満たしていて，$v(0)=0$ かつ $\omega(0)=0$ で転がり始めるとする。時刻 t の缶ジュースの重心の速度 $v(t)$ と位置 $x(t)$ を表す式を導きなさい。ただし，式には M,r,I,g,α,t を用いること。

(7) 図５のように，重心の位置が H だけ降下したとき（時刻 $t = T$）の，重心の速度 V と角速度 Ω を表す式を，g, H, M, r, I を用いて表しなさい。ただし，$v(0) = 0$ かつ $\omega(0) = 0$。

(8) 時刻 $t = 0$ と $t = T$ の缶ジュース（図５）について，エネルギー保存則が成立していることを，(7) の結果を用いて示しなさい。

(9) 缶ジュースが斜面を転がる速度（あるいは転がり落ちるのにかかる時間）を調べると，内部が凍結しているかどうかを判別することができる。理由を (1) と (8) の結果を用いて説明しなさい。

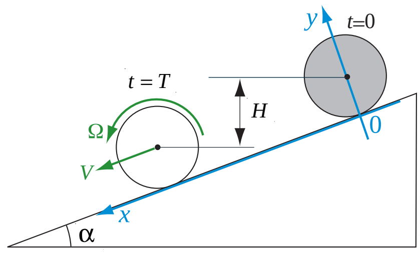


図５

10. 腹筋を鍛える運動について考察する。

図６は体全体の重心 G，上半身の重心 G_1 および下半身の重心 G_2 の関係を示している。３つの重心は直線上に位置している。股関節 B から体全体の重心までの距離を d, 上半身の重心 G_1 までの距離を ℓ_1，下半身の重心 G_2 までの距離を ℓ_2 と表す。

上半身の質量 m_1 は体全体の 66%であり，下半身の質量 m_2 は体全体の 34%である。また，$d = 10$cm, $\ell_2 = 30$cm であることがわかっている。

(1) 股関節 B から上半身の重心 G_1 までの距離 ℓ_1 を数値で求めなさい。

図７は足を水平に真直にのばして，上体（灰色の部分）を水平から角度 θ だけ持ち上げた状態を表している（通常の腹筋運動）。赤い線は腹直筋を示しており，その端（点 A）は上体に固定されていて，他方の端（点 C）は下腹部に固定されている。ここでは，点 C は足の部分に属すると考えてよく，したがって点 C は上体の如何に係わらず動かないし，点 C に働く力は足の部分に属するものとすればよい。腹直筋は収縮によって多少長さが変化するであろうが，ここでは簡単のために一定の長さ L であるとする。

上体は股関節（点 B）のまわりに回転することができ，点 B は点 C から，水平に距離 a，垂直に距離 b だけ離れた位置にある。図８は点 B, 点 C および腹直筋の位置関係を示したものである。図７の直線 E は水平方向を表しており，直線 D は上体の傾きを意味している。上体には

・ 腹直筋が収縮することによって生じる力 $\vec{F}$

腹直筋は直線 D と平行であるとする。

・ 上体に働く重力 $m_1\vec{g}$

この重力は上体の重心 G_1 に働くと考えればよい。重心の位置は，簡単のために，股関節（点 B）を通って上体の傾きと同じ直線（直線 D）の上にあるとする。また，点 B と点 G_1 の距離は ℓ_1 とする。

・ 股関節において上体に働く力 $\vec{R}$

の３つの力が働く。

(2) 座標を図７に示したように設定して，上体に働く力のつり合いの条件を書きなさい。３つの力の大きさを

F, $m_1 g$, R と表し，力 $\vec{R}$ の成分を $(-R_x, R_y)$ とすること。

(3) 上体に働く力のモーメントのつり合い条件を書きなさい。回転軸の設定と正の回転の向きを明示しておくこと。

(4) 腹直筋の力の大きさ F は上体の角度 θ によって変化する。F を $m_1, g, \ell_1, a, b, \theta$ を用いた式で表しなさい。

(5) 腹直筋の力の大きさの逆数 $1/F$ と θ の関係を表すグラフを描きなさい。

(6) 腹筋を鍛えるためには，上体を小さな角度で持ち上げるような運動が適している。理由を説明しなさい。

図９は体全体に働く力を示したものである。上半身に働く重力 $m_1\vec{g}$ の作用点は上半身の重心 G_1 で，下半身に働く重力 $m_2\vec{g}$ の作用点は上半身の重心 G_2 である。図９に示したように座標をとり，股関節 B の x 座標をゼロとする。床からの垂直抗力 N の作用点の x 座標を x_N とする。

(7) 垂直抗力 N の大きさを表す式を m_1, m_2, g を用いて書きなさい。

(8) 体全体について，力のモーメントのつり合いを表す式を書きなさい。

(9) 垂直抗力 N の作用点の x 座標 x_N を θ と数値を用いた式で表しなさい。m_1, m_2, ℓ_1, ℓ_2 のは上で与えられたり求めた数値を用いること。

(10) 垂直抗力 N の作用点が股関節より下半身側になるためには，上半身の角度 θ はどのような条件を満たせばよいか。図１０の cos のグラフを用いて数値で求めなさい。

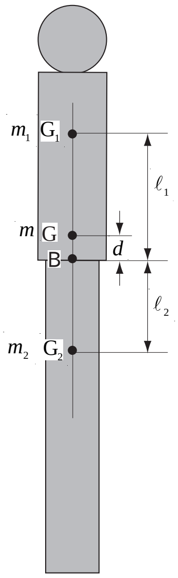


図６

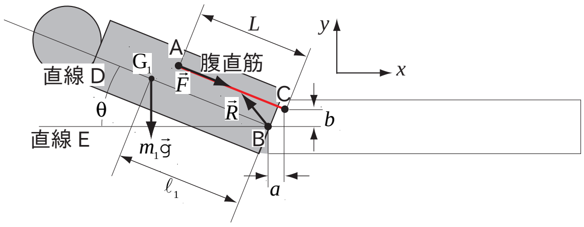


図７

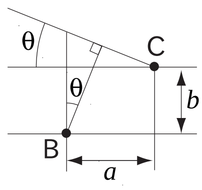


図８

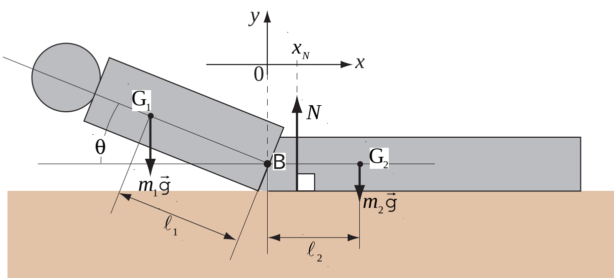


図９

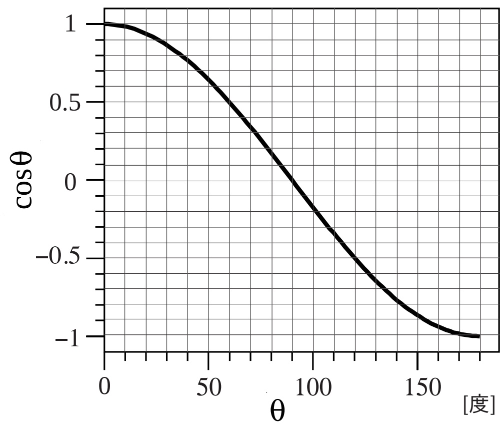


図１０